Transport and Communications Science Journal

THE FOURIER TRANSFORM TO DISTRIBUTIONS AND SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Nguyen Sy Anh Tuan*

University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article
Received: 15/03/2021
Revised: 19/05/2021
Accepted: 24/05/2021
Published online: 15/06/2021
https://doi.org/10.47869/tcsj.72.5.11

**Corresponding author*
Email: anhtuanns@utc.edu.vn; Tel: 0903231051

Abstract. The study of the regularity or the smoothness of the solutions of the partial differential equations in the broad distributions has stimulated an important mathematical development. This article presents the Fourier transform in a Schwartz space and the space of distributions to study generalised solutions, weak solutions and fundamental solutions of the partial differential equations that are being interested by many mathematicians. Part 2 introduces the geometric symbols and necessary functional spaces for the reader to connecting the following sections. Fourier transforms in the Schwartz space are included in Part 3. Part 4 is devoted to presenting the Fourier transform to distributions. The problems of generalised solutions, weak solutions and fundamental solutions of the partial differential equations are presented in Part 5. The results of the study show that partial differential equations act as a bridge between mathematics and applications, promoting the development of mathematical ideas in many different fields.

Keywords: Fourier transform, distributions, generalised solutions, fundamental solutions.

Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải

BIẾN ĐỔI FOURIER HÀM SUY RỘNG VÀ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

Nguyễn Sỹ Anh Tuấn*

Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học
Ngày nhận bài: 15/03/2021
Ngày nhận bài sửa: 19/05/2021
Ngày chấp nhận đăng: 24/05/2021
Ngày xuất bản Online: 15/06/2021
https://doi.org/10.47869/tcsj.72.5.11

**Tác giả liên hệ*
Email: anhtuanns@utc.edu.vn; Tel: 0903231051

Tóm tắt. Việc nghiên cứu tính chính quy hay độ trơn của nghiệm của phương trình đạo hàm riêng trong lớp hàm suy rộng đã kích thích một hướng Toán học quan trọng phát triển. Bài viết này trình bày biến đổi Fourier trong không gian Schwartz và không gian các hàm suy rộng để nghiên cứu nghiệm suy rộng, nghiệm yếu, nghiệm cơ bản của phương trình đạo hàm riêng đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm. Phần 2 đưa vào các ký hiệu hình học và các không gian hàm cần thiết để người đọc dễ theo dõi các phần tiếp theo. Biến đổi Fourier trong không gian Schwartz được đưa vào ở phần 3. Phần 4 dành cho việc trình bày biến đổi Fourier hàm suy rộng. Các bài toán về nghiệm suy rộng, nghiệm yếu và nghiệm cơ bản của phương trình đạo hàm riêng được trình bày ở phần 5. Kết quả của nghiên cứu cho thấy phương trình đạo hàm riêng đóng vai trò là chiếc cầu nối giữa toán học và ứng dụng, thúc đẩy sự phát triển các ý tưởng toán học trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

Từ khóa: biến đổi Fourier, hàm suy rộng, nghiệm suy rộng, nghiệm cơ bản.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Bài toán được đặt ra là cần phải tìm nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng không có nghiệm cổ điển để lý giải các hiện tượng thực tế mà chúng ta mô tả. Ví dụ, ta xét định luật bảo toàn $u_t + F(u)_x = 0$. Phương trình này xuất hiện trong thuỷ động học và mô tả nhiều hiện tượng vật lý khác nhau. Nói chung định luật bảo toàn không có nghiệm cổ điển. Tuy nhiên đây là một phương trình đạo hàm riêng được đặt chỉnh nếu ta xét nghiệm suy rộng hoặc nghiệm yếu của nó. Biến đổi Fourier hàm suy rộng đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu nghiệm suy rộng, nghiệm yếu của phương trình đạo hàm riêng.

2. CÁC KHÔNG GIAN HÀM

Trong phần này chúng ta sẽ làm quen với những ký hiệu và kiến thức phụ trợ cần thiết được sử dụng trong các phần sau.

¡ ^{n} là không gian Euclide thực n chiều, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Một điểm trong $\mathbb{R}^n$ là $x = (x_1, ..., x_n)$.

Một điểm trong $\mathbb{R}^{n+1}$ thường được ký hiệu là $(x,t) = (x_1, ..., x_n, t)$, t là biến thời gian.

Nếu $x = (x_1, ..., x_n)$ và $y = (y_1, ..., y_n)$ thuộc $\mathbb{R}^n$ thì $xy = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, $|x| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2}$

Một véc tơ dạng $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, trong đó mỗi thành phần α_i là một số nguyên không âm, được gọi là một đa chỉ số bậc $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Cho trước một đa chỉ số α, ký hiệu $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_1^{\alpha_n}$.

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n} u.$$

$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j}$ là toán tử Laplace của u.

Giá của hàm liên tục u ký hiệu là $\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \neq 0\}}$.

$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ khả vi vô hạn$\}$. Hàm $u \in C^\infty(\Omega)$ được gọi là hàm trơn.

D $(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}^n$ với giá compact.

D $(\mathbb{R}^n)$ còn gọi là không gian các hàm thử.

$L^p(\mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid u$ đo được Lebesgue, $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \}$ $(1 \le p < \infty)$.

$L^1_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \in L^1(V)$ với mọi $V \subset\subset \Omega\}$.

Ta viết $V \subset\subset \Omega$ nếu $V \subset \overline{V} \subset \Omega$, $\overline{V}$ là compact và ta nói V được chứa compact trong Ω.

$\mathbb{C}$ là mặt phẳng phức. Nếu $z \in \mathbb{C}$ ta ký hiệu $\overline{z}$ là số phức liên hợp của z.

3. BIẾN ĐỔI FOURIER TRONG KHÔNG GIAN SCHWARTZ

3.1. Định nghĩa

Không gian Schwartz là không gian các hàm trơn giảm nhanh,

$S(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$, với mọi đa chỉ số $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \}$ [1].

Sự hội tụ trong $S(\mathbb{R}^n)$: Ta nói rằng $f_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} f$ khi $k \to \infty$ nếu $\| f_k - f \|_{\alpha,\beta} \to 0, k \to \infty$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

3.2. Biến đổi Fourier trong không gian $S(\mathbb{R}^n)$

Định nghĩa:

Nếu $f \in S(\mathbb{R}^n)$, ta định nghĩa biến đổi Fourier của f là

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)dx, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

và biến đổi Fourier ngược của f là

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

Định nghĩa tích chập:

Nếu $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ ta định nghĩa tích chập của f và g là $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ (3)

3.3. Các tính chất của biến đổi Fourier

Giả sử $u, v \in S(\mathbb{R}^n)$. Khi đó

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\bar{\hat{v}}d\xi$ [2]

(ii) $D^\alpha u(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{u}(\xi)$

(iii) $(u*v)(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)$

(iv) $u = (\hat{u})\check{}$

Chứng minh: (ii) Ta có $D^\alpha u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} D^\alpha u(x)dx = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha (e^{-ix\xi})u(x)dx =$

$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} i^{|\alpha|}\xi^\alpha e^{-ix\xi} u(x)dx = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{u}(\xi)$ (đpcm).

(iv) Tính $u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi} u(y)dyd\xi = (\hat{u})\check{}(x)$ (đpcm).

Các tính chất (i) và (iii) xem ở [3].

3.4. Các ví dụ về biến đổi Fourier trong không gian Schwartz

Ví dụ 1: Tìm biến đổi Fourier của hàm Gauss $g(x) = e^{-k|x|^2}, k > 0$ (4)

Giải: Với $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = \prod_{j=1}^{n} e^{-kx_j^2}$ (5)

Ta có $g(x)$ là hàm Schwartz, $g(x) \in S(\mathbb{R}^n)$.

Trước hết ta đi tìm biến đổi Fourier của hàm Gauss một biến $g(x_j) = e^{-kx_j^2}, x_j \in \mathbb{R}$.

Thấy rằng $g(x_j)$ thoả mãn phương trình $g'(x_j) + 2kx_j g(x_j) = 0$ (6)

Lấy biến đổi Fourier hai vế của phương trình này theo biến x_j ta được

$$i\xi\hat{g}(\xi_j) + 2ki\left(\hat{g}(\xi_j)\right)' = 0 \Rightarrow \hat{g}(\xi_j) = ce^{\frac{-\xi j^2}{4k}}, j = 1, ..., n \tag{7}$$

Ta có $c = \hat{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_j)dx_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx_j^2}dx_j$

Ta đã biết $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ nên suy ra

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{k}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{k}x_j)^2} d(\sqrt{k}x_j) = \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \times \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \tag{8}$$

Do đó biến đổi Fourier của hàm Gauss là

$$\hat{g}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \hat{g}(\xi_j) = \left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)^n e^{\frac{-|\xi|^2}{4k}}, \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n \tag{9}$$

Ví dụ 2: Tìm biến đổi Fourier hàm $f(x)$ là nghiệm của phương trình tích phân:

$$f(x) + \int_{-\infty}^{x} e^{\tau - x} f(\tau)d\tau = e^{-2|x|} \tag{10}$$

Thấy rằng $\int_{-\infty}^{x} e^{\tau - x} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-\tau)e^{-(x-\tau)} f(\tau)d\tau = \left(e^{-x}.H(x)\right) * f(x)$ (11)

trong đó $H(x)$ là hàm Heaviside [4]: $H(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ (12)

Do đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$f(x) + \left(e^{-x}.H(x)\right) * f(x) = e^{-2|x|} \tag{13}$$

Lấy biến đổi Fourier hai vế của phương trình này ta có

$\hat{f}(\xi) + \sqrt{2\pi}e^{-x}H(x)(\xi)\,\hat{f}(\xi) = e^{-2|x|}(\xi)$

Do đó biến đổi Fourier của hàm $f(x)$ là:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{3}{4} \times \frac{4}{\xi^2 + 4} + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{i}{2 + i\xi}\right)\right] \tag{14}$$

(Vì $e^{-a|x|}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{2a}{a^2+\xi^2}$, $a > 0$).

Ví dụ 3: Tìm biến đổi Fourier hàm u là nghiệm của phương trình vi sai phân

$$\frac{du}{dx} + au(x) + u(x-1) = f, a \in \mathbb{R} \text{ và } f \in S(\mathbb{R}) \tag{15}$$

Ta có $\dfrac{du}{dx}(\xi) = i\xi\hat{u}(\xi), u(x-1)(\xi) = e^{-i\xi}\hat{u}(\xi)$ (16)

Do đó lấy biến đổi Fourier hai vế của phương trình ta được

$i\xi\hat{u}(\xi) + a\hat{u}(\xi) + e^{-i\xi}\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),\ \ \xi \in \mathbb{R}$

Do đó biến đổi Fourier của hàm u là $\hat{u}(\xi) = \dfrac{\hat{f}(\xi)}{i\xi + a + e^{-i\xi}}$ (17)

4. BIẾN ĐỔI FOURIER HÀM SUY RỘNG

4.1. Định nghĩa (hàm suy rộng)

Ta gọi phiếm hàm tuyến tính liên tục $u : \mathbf{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ là hàm suy rộng.

Giá trị của phiếm hàm u tại hàm $f \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$ ký hiệu là u_f hoặc $\langle u, f\rangle$.

Không gian các hàm suy rộng ký hiệu là $\mathbf{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Ta nói dãy $\{f_n\}$ các hàm suy rộng hội tụ đến hàm suy rộng f nếu với mọi hàm thử φ dãy $\langle f_n, \varphi\rangle$ hội tụ đến $\langle f, \varphi\rangle$.

4.2. Các ví dụ về hàm suy rộng

Ví dụ 1: Giả sử $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ [5]. Khi đó $u_f : \mathbf{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ xác định bởi

$$\langle u_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \tag{18}$$

là hàm suy rộng.

Thật vậy, tính liên tục của u_f được suy ra từ đánh giá

$$\left|\langle u_f, \varphi\rangle\right| \le \int_K |f(x)\varphi(x)|dx \le \|\varphi\|_\infty \int_K |f(x)|dx \tag{19}$$

$\forall \varphi \in \mathbf{D}_K, K$ compact trong $\mathbb{R}^n$.

Hiển nhiên phiếm hàm u_f là tuyến tính $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2: Giả sử φ là hàm thử trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó phiếm hàm $\delta_x : \mathbf{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ xác định bởi

$$\langle \delta_x, \varphi\rangle = \varphi(x) \tag{20}$$

là một hàm suy rộng (gọi là độ đo Dirac tại $x \in \mathbb{R}^n$).

Thật vậy, ta có $\langle \delta_x, \varphi_k \rangle = \varphi_k(x) \to \varphi(x) = \langle \delta_x, \varphi \rangle$ nếu $\varphi_k \to \varphi$ trong $\mathbf{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3: Giá trị chính Cauchy $P \cdot v \cdot \frac{1}{x}: \mathbf{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ (21)

là hàm suy rộng.

Thật vậy, $a > 0$ sao cho $\operatorname{supp} \varphi \subset [-a, a]$ ta có

$$\left\langle P \cdot v \cdot \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{\varepsilon < |x| < a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon < |x| < a} \frac{\varphi(0)}{x} dx \right) =$$

$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon < |x| < a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$. Giới hạn này tồn tại và hữu hạn vì

$$\left| \int_{\varepsilon < |x| < a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \right| \leq 2a \max_{\mathbb{R}} |\varphi'|, \forall \varepsilon > 0.$$

4.3. Đạo hàm của hàm suy rộng

Định nghĩa: Giả sử f là hàm suy rộng trong $\mathbf{D}'(\mathbb{R}^n)$. Đạo hàm riêng của hàm f được xác định bởi $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \{1, ..., n\}$ (22)

Ví dụ 1: Hàm Heaviside $H(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ là hàm suy rộng.

Với $\varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R})$ ta có $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$

Vậy $H' = \delta$ (23)

Ví dụ 2: $D \ln|x| = P \cdot v \cdot \frac{1}{x}$ trong $\mathbf{D}'(\mathbb{R}^n)$ (24)

Thật vậy ta có $\langle D \ln|x|, \varphi \rangle = -\langle \ln|x|, \varphi' \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \ln|x| \varphi'(x)dx =$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \int_{[-a,a] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{1}{x} \varphi(x)dx + \ln \varepsilon [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{[-a,a] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx =$$

$=\left\langle P\cdot v\cdot\frac{1}{x},\varphi\right\rangle$ (đpcm). (Vì $\int\limits_{[-a,a]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]}\frac{v(0)}{x}dx=0$ và $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\ln\varepsilon\left[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)\right]=0$).

4.4. Hàm suy rộng ôn hoà

Định nghĩa: Ta gọi phiếm hàm tuyến tính liên tục $u:S(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$ là hàm suy rộng ôn hoà. Giá trị của phiếm hàm u tại hàm $f\in S(\mathbb{R}^n)$ ký hiệu là u_f hoặc $\langle u,f\rangle$.

Không gian các hàm suy rộng ôn hoà ký hiệu là $S'(\mathbb{R}^n)$ [6].

Chú ý: (i) Nếu $u\in S'(\mathbb{R}^n)$ thì $x^\alpha\partial^\beta u\in S'(\mathbb{R}^n),\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$.

(ii) Hàm suy rộng ôn hoà là một hàm suy rộng, nghĩa là $S'(\mathbb{R}^n)\subset \mathbf{D}'(\mathbb{R}^n)$ (25)

4.5. Biến đổi Fourier trong không gian $S'(\mathbb{R}^n)$

Mệnh đề: Với $\varphi,\phi\in S(\mathbb{R}^n)$ ta luôn có $\langle\hat{\varphi},\phi\rangle=\langle\varphi,\hat{\phi}\rangle$ [7].

Chứng minh: Theo Định lý Fubini ta có $\langle\hat{\varphi},\phi\rangle=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)e^{-ix\xi}dx\right)\phi(\xi)d\xi=$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi(\xi)e^{-ix\xi}d\xi\right)dx=\langle\varphi,\hat{\phi}\rangle.$$

Định nghĩa: Biến đổi Fourier của hàm suy rộng $u\in S'(\mathbb{R}^n)$ được xác định bởi

$\langle\hat{u},\varphi\rangle=\langle u,\hat{\varphi}\rangle,\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ (26)

Biến đổi Fourier ngược của hàm suy rộng $u\in S'(\mathbb{R}^n)$ được xác định bởi

$\langle\breve{u},\varphi\rangle=\langle u,\breve{\varphi}\rangle,\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ (27)

Một số tính chất của biến đổi Fourier trong $S'(\mathbb{R}^n)$:

(i) $u(x+y)=e^{iy\xi}\hat{u}$, trong đó $u\in S'(\mathbb{R}^n),y\in\mathbb{R}^n$;

(ii) $D_x^\alpha u=i^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{u}$;

(iii) $x^\alpha u=i^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha\hat{u}$.

Chứng minh: (i) Ta có $\langle u(x+y),\varphi\rangle=\langle u(x+y),\hat{\varphi}\rangle=\langle u,\varphi(x-y)\rangle=\langle u,e^{iy\xi}\varphi\rangle=$

$=\langle\hat{u},e^{iy\xi}\varphi\rangle=\langle e^{iy\xi}\hat{u},\varphi\rangle$ (đpcm).

Các tính chất (ii) và (iii) xem ở [8].

Ví dụ: Biến đổi Fourier của độ đo Dirac δ_{x_0} là hàm suy rộng xác định bởi

$$\left\langle \hat{\delta}_{x_0}, \varphi \right\rangle = \left\langle \delta_{x_0}, \hat{\varphi} \right\rangle = \hat{\varphi}(x_0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_0 y} \varphi(y) dy \qquad (28)$$

Vậy $\hat{\delta}_{x_0}(y) = \dfrac{e^{-ix_0 y}}{(2\pi)^{n/2}}$. Đặc biệt $\hat{\delta}_0 = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}$.

Lấy biến đổi Fourier ngược ta có $\hat{1} = (2\pi)^{n/2} \delta_0$.

5. NGHIỆM SUY RỘNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠO HÀM RIÊNG

5.1. Định nghĩa (nghiệm suy rộng):

Giả sử $P(D)$ là toán tử đạo hàm riêng và $f \in \mathbf{D}'(\mathbb{R}^n)$. Hàm $u \in \mathbf{D}'(\mathbb{R}^n)$ được gọi là nghiệm suy rộng của phương trình $P(D)u = f$ nếu $\left\langle P(D)u, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \varphi \right\rangle, \forall \varphi \in \mathbf{D}'(\mathbb{R}^n)$ (29)

Bài toán 1: Giả sử $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ và xét $u(x,t) = f(x-t)$ [9]. Khi đó $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ là nghiệm suy rộng của phương trình sóng một chiều.

Thật vậy, ta có $\left\langle \partial_t^2 u - \partial_x^2 u, \varphi \right\rangle = \left\langle u, \partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi \right\rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x-t)(\partial_t^2 \varphi(x,t) - \partial_x^2 \varphi(x,t)) dxdt$ với $\forall \varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^2)$.

Đặt $\begin{cases} u = x - t \\ v = x + t \end{cases} \Rightarrow \varphi(x,t) = \varphi\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right) = \Psi(u,v)$, với $\Psi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^2)$

Vì $\partial_t^2 \varphi = \partial_u^2 \Psi + \partial_v^2 \Psi - 2\partial_u \partial_v \Psi, \partial_x^2 \varphi = \partial_u^2 \Psi + \partial_v^2 \Psi + 2\partial_u \partial_v \Psi$ nên $\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi = -4\partial_u \partial_v \Psi$. Suy ra $\left\langle \partial_t^2 u - \partial_x^2 u, \Psi \right\rangle = -2\iint_{\mathbb{R}^2} f(u) \partial_u \partial_v \Psi dvdu = -2\int_{\mathbb{R}} f(u) \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_u \partial_v \Psi(u,v) dv \right) du = 0$ vì $\int_{\mathbb{R}} \partial_u \partial_v \Psi(u,v) dv = 0 \Rightarrow$ đpcm.

5.2. Nghiệm cơ bản của phương trình đạo hàm riêng

Định nghĩa: Hàm suy rộng $E \in \mathbf{D}'(\mathbb{R}^n)$ được gọi là nghiệm cơ bản của toán tử đạo hàm riêng $P(D)$ nếu $P(D)E = \delta_0$ [10] trong $\mathbf{D}'(\mathbb{R}^n)$ (30)

Bài toán 2: Tìm nghiệm cơ bản của bài toán Cauchy đối với phương trình Schrodinger

$$\begin{cases} u_t = i\Delta u \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \text{ trên } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\},\ f \in S(\mathbb{R}^n) \end{cases} \qquad (31)$$

Lấy biến đổi Fourier theo biến x hai vế của phương trình ta được

$$\hat{u}_t(\xi,t) = -i|\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) \text{ và } \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi)$$

Giải phương trình vi phân này ta có $\hat{u}_t(\xi,t) = \hat{f}(\xi) e^{-i|\xi|^2 t}$. Lấy biến đổi Fourier ngược ta được nghiệm của bài toán là:

$$u(x,t)=\left(\hat{f}(\xi)e^{-i|\xi|^2 t}\right)^{\vee}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(e^{-i|\xi|^2 t}\right)^{\vee}*f=F*f \tag{32}$$

trong đó $F(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{-|x|^2}{4it}} \text{ nếu } t>0\\ 0 \text{ nếu } t\le 0\end{cases}$ (33)

Ta chứng minh rằng $F(x,t)$ là nghiệm cơ bản của toán tử Schrodinger.

Với $\varepsilon>0$ đặt $F_\varepsilon(x,t)=\begin{cases}F(x,t) \text{ nếu } t>\varepsilon\\ 0 \text{ nếu } t\le\varepsilon.\end{cases}$

Ta phải chứng minh $\langle\partial_t F_\varepsilon(x,t)-i\Delta F_\varepsilon(x,t),\varphi(x,t)\rangle=\langle F_\varepsilon(x,t),(-\partial_t-i\Delta)\varphi(x,t)\rangle\to\varphi(0,0)$ khi $\varepsilon\to 0$ với $\forall\varphi\in\mathbf{D}(\mathbb{R}^{n+1})$. Bằng cách lấy tích phân từng phần ta có:

$$\langle\partial_t F_\varepsilon(x,t)-i\Delta F_\varepsilon(x,t),\varphi(x,t)\rangle=\int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n}F(x,t)(-\partial_t-i\Delta)\varphi(x,t)dxdt=$$

$$=\int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n}-i\Delta F(x,t)\varphi(x,t)dxdt+\int_{\mathbb{R}^n}\int_\varepsilon^0\partial_t F(x,t)\varphi(x,t)dxdt+\int_{\mathbb{R}^n}F(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx=$$

$$=\int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t-i\Delta)F(x,t)\varphi(x,t)dxdt+\int_{\mathbb{R}^n}F(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx+0(\varepsilon)=0(\varepsilon)+\int_{\mathbb{R}^n}F(x,\varepsilon)\varphi(x,0)dx$$

Ta có $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,0)|\to 0$ khi $\varepsilon\to 0^+$ và $\int\limits_{\mathbb{R}^n}F(x,\varepsilon)dx=1$.

Từ đó cho $\varepsilon\to 0^+$ ta được $\langle(\partial_t-i\Delta)F,\varphi\rangle=\varphi(0,0)$ (đpcm).

Bài toán 3 (Phương pháp triệt tiêu độ nhớt đối với phương trình Burgers)

Ta nghiên cứu nghiệm u^ε khi $\varepsilon\to 0$ của bài toán giá trị ban đầu đối với phương trình độ nhớt Burgers

$$\begin{cases}u_t^\varepsilon+u^\varepsilon u_x^\varepsilon=\varepsilon u_{xx}^\varepsilon, x\in\mathbb{R}, t>0\\ u^\varepsilon(x,0)=u_0^\varepsilon(x), x\in\mathbb{R}\end{cases} \tag{34}$$

Nếu đặt $\Psi_x=-u^\varepsilon, \Psi_t=\dfrac{(u^\varepsilon)^2}{2}-\varepsilon u_x^3$ thì từ (34) suy ra $\Psi_t=\dfrac{(\Psi_x)^2}{2}+\varepsilon\Psi_{xx}$

hoặc $\Psi_t-\varepsilon\Psi_{xx}-\dfrac{1}{2}\Psi_x^2=0$ (35)

Phương trình (35) là phương trình phi tuyến thường xuất hiện trong lý thuyết điều khiển tối ưu ngẫu nhiên.

Đặt $\varphi = g(\Psi)$ trong đó hàm $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sẽ xác định sau. Ta chọn hàm g sao cho hàm φ thoả mãn một phương trình tuyến tính. Ta có $\varphi_t = g'(\Psi)\Psi_t \Rightarrow \Psi_t = \dfrac{\varphi_t}{g'(\Psi)}$ và $\varphi_x = g'(\Psi)\Psi_x$; $\varphi_{xx} = g''(\Psi)\Psi_x^2 + g'(\Psi)\Psi_{xx}$

Thế các đạo hàm $\Psi_t = \dfrac{\varphi_t}{g'(\Psi)}$, $\Psi_{xx} = g''(\Psi)\Psi_x^2 + g'(\Psi)\Psi_{xx}$ vào phương trình (35) và rút gọn ta nhận được phương trình $\varphi_t - \varepsilon\varphi_{xx} = -\left[\varepsilon\dfrac{g''(\Psi)}{g'(\Psi)} - \dfrac{1}{2}\right]\Psi_x^2$

Ta được phương trình truyền nhiệt $\varphi_t - \varepsilon\varphi_{xx} = 0$ (36)

với điều kiện chọn hàm g sao cho $\varepsilon\dfrac{g''(\Psi)}{g'(\Psi)} - \dfrac{1}{2} = 0$ nghĩa là lấy $g = e^{\frac{\Psi}{2\varepsilon}}$.

Do đó $u^\varepsilon = -\Psi_x = -2\varepsilon\dfrac{\varphi_x}{\varphi}$. Từ điều kiện ban đầu ta suy ra $\varphi_0(x) = e^{-\frac{h(x)}{2\varepsilon}}$ trong đó $h(x)$ là một nguyên hàm của $u_0(x)$.

Xét bài toán giá trị ban đầu đối với phương trình truyền nhiệt

$$\begin{cases} \varphi_t - \varepsilon\varphi_{xx} = 0 \\ \varphi_0(x) = e^{-\frac{h(x)}{2\varepsilon}} \end{cases} \tag{37}$$

Thay hình thức i bởi ε vào công thức nghiệm cơ bản của phương trình Schordinger ở bài toán 2 (với $n=1$) ta có nghiệm cơ bản của (36) là $\varphi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}} \text{ nếu } t > 0 \\ 0 \text{ nếu } t \le 0 \end{cases}$

Từ đây ta có nghiệm của bài toán giá trị ban đầu (37) là $\varphi(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h(y)}{2\varepsilon}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon t}} dy$

Trở lại biến gốc ban đầu ta có nghiệm của phương trình độ nhớt Burger là

$$u^\varepsilon(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} e^{\frac{-K(x,y,t)}{2\varepsilon}} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-K(x,y,t)}{2\varepsilon}} dy} \tag{38}$$

Với $K(x,y,t) = h(y) + \dfrac{(x-y)^2}{2t}$, $x, y \in \mathbb{R}, t > 0$ trong đó $h(x)$ là một nguyên hàm của $u_0(x)$. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng nghiệm u^ε hội tụ khi $\varepsilon \to 0$ tới một nghiệm suy rộng u của định luật bảo toàn [11]

$$\begin{cases} u_t + \left(\dfrac{u^2}{2}\right)_x = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{39}$$

Kỹ thuật triệt tiêu độ nhớt này cho phép tìm được nghiệm Entropi u của phương trình (39), nghiệm này có thể không liên tục qua các sóng sốc và giới hạn của các nghiệm u^{ε} của (34). Ở đây sẽ trình bày tóm tắt phương pháp Laplace nghiên cứu sự tiệm cận khi $\varepsilon \to 0$ của các tích phân chứa biểu thức $e^{-\frac{I}{\varepsilon}}$, I là hàm cho trước.

Bổ đề (tiệm cận). Giả sử rằng $k, l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục, l tăng nhiều nhất là tuyến tính và k tăng ít nhất là bậc hai.

Giả thiết tồn tại duy nhất $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $k(y_0) = \min k(y)$.

Khi đó $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} l(y) e^{\frac{-k(y)}{\varepsilon}} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-k(y)}{\varepsilon}} dy} = l(y_0)$

Chứng minh: Đặt $k_0 = k(y_0)$. Khi đó hàm $\mu_\varepsilon(y) = \dfrac{e^{\frac{k_0 - k(y)}{\varepsilon}}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{k_0 - k(z)}{\varepsilon}} dz}, y \in \mathbb{R}$

thoả mãn $\begin{cases} \mu_\varepsilon \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\varepsilon(y) dy = 1 \\ \mu_\varepsilon(y) \to 0 \text{ như hàm mũ với } y_0 \neq y, \text{khi } \varepsilon \to 0 \end{cases}$

Do đó $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} l(y) e^{\frac{-k(y)}{\varepsilon}} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-k(y)}{\varepsilon}} dy} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} l(y) \mu_\varepsilon(y) dy = l(y_0)$. Bổ đề được chứng minh xong.

Từ bổ đề trên suy ra $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}(x,t) = u(x,t)$ (40)

Công thức (40) cho ta công thức nghiệm Entropi của bài toán giá trị ban đầu (39).

Bài toán 4: Tìm hàm suy rộng $E \in S'(\mathbb{R}^3)$ là nghiệm cơ bản của toán tử Laplace trong không gian ba chiều, nghĩa là $\Delta E = \delta_0$.

Lấy biến đổi Fourier hai vế của phương trình đã cho ta được

$-|\xi|^2\hat{E}(\xi)=\delta_0$. Vì $\delta_0=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$ nên $\hat{E}(\xi)=-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}|\xi|^2}$ (41)

Lấy biến đổi Fourier ngược ta được nghiệm của phương trình là $E=-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}(|\xi|^{-2})^{\vee}$ (42)

Đổi biến sang toạ độ cầu ta có

$$\int_{|\xi|\le R}|\xi|^{-2}d\xi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R}\frac{r^2\sin\theta}{r^2}dr=4\pi R<\infty\Rightarrow|\xi|^{-2}\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$$

Trong không gian $S'(\mathbb{R}^3)$ có $\lim_{R\to\infty}(|\xi|^{-2}\mathbf{1}_{B(0,R)})^{\vee}=(|\xi|^{-2})^{\vee}$ (43)

Do đó với $\varphi\in S(\mathbb{R}^3)$ ta có

$$\left\langle E,\varphi\right\rangle=\left\langle(2\pi)^{-\frac{3}{2}}(-|\xi|^{-2})^{\vee},\varphi\right\rangle=-\lim_{R\to\infty}\left\langle(2\pi)^{-\frac{3}{2}}(|\xi|^{-2}\mathbf{1}_{B(0,R)})^{\vee},\varphi\right\rangle=$$

$$=-\lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\left\langle|\xi|^{-2}\mathbf{1}_{B(0,R)},\varphi^{\vee}\right\rangle=-\lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{-2}\mathbf{1}_{B(0,R)}(\xi)\varphi^{\vee}(\xi)d\xi=$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^3}\lim_{R\to\infty}\int_{|\xi|\le\mathbb{R}}|\xi|^{-2}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(x)e^{i\xi x}dxd\xi=-\frac{1}{(2\pi)^3}\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{|\xi|\le\mathbb{R}}|\xi|^{-2}e^{i\xi x}d\xi\varphi(x)dx$$

Bằng cách đổi miền ta có

$$\int_{|\xi|\le R}\int_{S^2}|\xi|^{-2}e^{i\xi x}d\xi=\int_0^R\int_{S^2}r^{-2}e^{ir\theta x}d\theta r^2dr=\int_0^R\int_{S^2}\cos(r\theta x)d\theta dr \quad (44)$$

Dùng tiếp phép thế $\varphi=\arccos s\Rightarrow\frac{d\varphi}{ds}=-\frac{1}{\sqrt{1-s^2}},0\le\varphi\le\pi$ suy ra

$$\int_{s^2}\cos(r\theta x)d\theta=-2\pi\int_{-1}^{1}\cos(r|x|s)ds=-4\pi\frac{\sin(r|x|)}{r|x|} \quad (45)$$

Vì $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ nên $\int_0^{\infty}\frac{\sin(r|x|)}{r|x|}dr=\frac{\pi}{2|x|}$. Từ đó suy ra

$$\left\langle E,\varphi\right\rangle=\frac{1}{(2\pi)^3}\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^R4\pi\frac{\sin(r|x|)}{r|x|}dr\varphi(x)dx=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}2\pi^2\frac{1}{|x|}\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{4\pi|x|}\varphi(x)dx$$

Vậy nghiệm suy rộng của bài toán là $E(x)=\frac{1}{4\pi|x|}$ (46)

6. KẾT LUẬN

Bài viết đã trình bày biến đổi Fourier cho lớp hàm suy rộng và đưa ra một vài phương pháp để nghiên cứu nghiệm suy rộng, nghiệm cơ bản cho một số phương trình đạo hàm riêng mà thực tế chúng không có nghiệm khả vi đến bậc cần thiết.

LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin trân trọng gửi đến Trường Đại học Giao thông vận tải lời cảm ơn chân thành đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả thực hiện nghiên cứu trong bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. E. M. Stein, R. Shakarchi, Fourier Analysis: An Introduction (Princeton Lectures in Analysis I), Princeton: Princeton University Press, (2003), ISBN 0-691-11384-X.

[2]. J. Jost, Partial Differential Equations, New York: Springer-Verlag (2002), ISBN 0-387-95428-7.

[3]. Juha Kinnunen, Shulin Zhou, A local estimate for nonlinear equations with discontinuous coefficients, Communications in partial differential equations, 24 (1999) 2043-2068. https://doi.org/10.1080/03605309908821494

[4]. N. S. Minh, T. D. Vân, N. S. A. Tuấn, The space of exponential functions associated with a class of differential operator and application, Pro. Of Inter. Conference on Applied analyses and Mechanies of Continuous Media, Ho Chi Minh City, (1995), 268-281.

[5]. Yaffe, Laurence. G, Chapter 6: Symmetries, Physics 226: Particles and Symmetries. Retrieved 1 January, 2021.

[6]. P.Agarwal, R.P. Agarwal, M. Ruzhansky, Special Functions and Analysis of Differential Equations, RC Press, 2020. https://doi.org/10.1201/9780429320026

[7]. Drabek Pavel, Holubova Gabriela, Elements of partial differential equations, Berlin: de Gruyter, (2007), ISBN 9783110191240.

[8]. Treves Francois, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Mineola, N.Y: Dover Publications, (2006), ISBN 978-0-486-45352-1. https://www.elsevier.com/books/topological-vector-spaces-distributions-and-kernels/treves/978-1-4831-9859-0

[9]. Nguyễn Sỹ Anh Tuấn, Phép biến đổi Fourier - Cauchy cho các hàm thuộc lớp Holder, Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải, 68 (2019) 17-25.

[10]. Nguyễn Sỹ Anh Tuấn, Phương pháp biến đổi Fourier nhiều chiều trong phương trình đạo hàm riêng, Kỷ yếu Hội thảo về Giảng dạy và Nghiên cứu Khoa học cơ bản, (2020) 41-48.

[11].Nguyễn Sỹ Anh Tuấn, A Remark on Analytic Pseudodifferential Operators with Singularities, Vietnam Journal of Mathematics, 26 (1998) 91-94. http://www.math.ac.vn/publications/vjm/vjm_26/No.1/91-94_Tuan.PDF