Transport and Communications Science Journal, Vol 72, Issue 5 (06/2021), 636-645

Transport and Communications Science Journal

ON THE GENERALIZED CONVOLUTION WITH THE WEIGHT FUNCTION $\gamma(y)=\sin\alpha y$ FOR THE FOURIER COSINE AND SINE TRANSFORMS

Nguyen Minh Khoa*, **Tran Van Thang**

Electric Power University, No 235 Hoang Quoc Viet Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article
Received: 30/12/2020
Revised: 19/05/2021
Accepted: 24/05/2021
Published online: 15/06/2021
https://doi.org/10.47869/tcsj.72.5.10

*Corresponding author
Email: khoanm@epu.edu.vn; Tel: 0904367812

Abstract. During the past three decades, the generalized convolution has been interested in research by international and domestic mathematicians. Moreover, mathematicians also apply them in solving problems about integral equations, integro-differential equations, and so on. Therefore, the study of generalized convolution is a hot topic. In this paper we introduce and study the new generalized convolution of two functions f, g with the weight-function for the Fourier cosine integral transform and Fourier sine integral transform. We prove the existence of this new generalized convolution in the space $L(R_+)$.The essential factorization equality with the appearance of two distinctive integral transforms namely Fourier cosine and Fourier sine and some properties as noncommutation, disassociation which are different from other forms of convolution of integral transform are proved. Finally, we apply this new convolution in solving a system of integral equations of Toeplitz plus Hankel type and receive a solitary solution in the closed form.

Keywords: Fourier integral transform, Fourier cosine transform, Fourier sine transform, generalized convolution, integral equation of Toeplitz-Hankel type.

© 2021 University of Transport and Communications

Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải, Tập 72, Số 5 (06/2021), 636-645

Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải

TÍCH CHẬP SUY RỘNG VỚI HÀM TRỌNG $\gamma(y)=\sin\alpha y$ ĐỐI VỚI CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN FOURIER COSINE VÀ FOURIER SINE

Nguyễn Minh Khoa*, **Trần Văn Thắng**

Trường Đại học Điện lực, số 235 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học
Ngày nhận bài: 30/12/2020
Ngày nhận bài sửa: 19/05/2021
Ngày chấp nhận đăng: 24/05/2021
Ngày xuất bản Online: 15/06/2021
https://doi.org/10.47869/tcsj.72.5.10

**Tác giả liên hệ*
Email: khoanm@epu.edu.vn; Tel: 0904367812

Tóm tắt. Trong ba thập niên trở lại đây, tích chập suy rộng được các nhà toán học quốc tế và trong nước quan tâm nghiên cứu. Đồng thời các nhà toán học cũng ứng dụng chúng trong việc giải các bài toán về phương trình tích phân, phương trình vi tích phân,… Vì vậy, việc nghiên cứu tích chập suy rộng là vấn đề thời sự. Trong bài báo này, tích chập suy rộng mới với hàm trọng đối với hai phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Fourier sine được chúng tôi xây dựng và nghiên cứu trong. Chúng tôi chứng minh sự tồn tại của tích chập suy rộng mới này trong không gian $L(R_+)$. Đẳng thức nhân tử hóa cốt yếu với sự có mặt của hai phép biến đổi tích phân khác biệt là Fourier cosine, Fourier sine và hàm trọng cùng một số tính chất khác như tính không giao hoán, tính không kết hợp khác với các tích chập của một phép biến đổi tích phân được phát biểu và chứng minh. Cuối cùng là áp dụng tích chập suy rộng mới được xây dựng để giải hệ phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel và nhận được nghiệm dưới dạng đóng.

Từ khóa: các phép biến đổi tích phân Fourier, Fourier cosine, Fourier sine, tích chập suy rộng, phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel.

© 2021 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. MỞ ĐẦU

Từ đầu thế kỷ 20 đến cuối những năm chín mươi của thế kỷ trước tích chập với số lượng rất ít và hầu hết là các tích chập đơn đối với một phép biến đổi tích phân, do đó trong đẳng thức nhân tử hóa cốt yếu chỉ có mặt một phép biến đổi tích phân. Điều này dẫn tới phạm vi ứng dụng hạn hẹp, không giải quyết được nhiều vấn đề mở rộng của nội tại phép biến đổi tích phân và tích chập cũng như nhiều lĩnh vực khoa học ứng dụng khác. Năm 1998 V. K. Kaichev và N. X. Thảo đã đưa ra phương pháp kiến thiết để xác định tích chập suy rộng đối với ba phép biến đổi tích phân bất kỳ K_1, K_2, K_3 với hàm trọng $\gamma(y)$ mà đối với chúng luôn có đẳng thức nhân tử hóa then chốt

$$K_1(f \overset{\gamma}{*} g)(y) = \gamma(y)(K_2 f)(K_3 g)(y).$$

Tư tưởng và kỹ thuật của phương pháp này mở đường cho một số tích chập suy rộng mới đối với hai và ba phép biến đổi tích phân khác nhau xuất hiện.

Trong vòng 3 thập kỷ trở lại đây các tác giả V. K. Kaichev, N. X. Thảo, V. K. Tuấn và N. M. Khoa và một số tác giả khác đã nghiên cứu về tích chập suy rộng đối với các phép biến đổi tích phân [1-8]. Tiếp theo hướng nghiên cứu này, ở đây các tác giả tập trung xây dựng và nghiên cứu tích chập suy rộng có hàm trọng $\gamma(y) = \sin \alpha y$ đối với các phép biến đổi tích phân Fourier cosine và Fourier sine. Các tính chất đặc trưng của tích chập này được đưa ra và chứng minh. Đặc biệt một lớp hệ của bài toán mở phương trình tích phân Toeplitz-Hankel:

$$f(x) + \int_0^{+\infty} [k_1(x+y) + k_2(x-y)] f(y)dy = g(x), x \in \mathbb{R}_+,$$

nhờ tích chập suy rộng này giải được và cho nghiệm dưới dạng đóng. Đồng thời từ nền tảng tích chập suy rộng này ta có thể tiếp tục nghiên cứu phép biến đổi tích phân dạng chập tương ứng, các bất đẳng thức kiểu tích chập suy rộng, phương trình vi tích phân dạng chập, phương trình đạo hàm riêng và các ứng dụng khác trong vật lý, trong xử lý tín hiệu, xử lý ảnh,…

Một số các tích chập đã biết sau được dùng trong việc thiết lập một số tính chất của tích chập mới. Tích chập của phép biến đổi tích phân Fourier cosine F_C của hai hàm f và g [9,10]:

$$(f \underset{F_C}{*} g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(y)[g(x+y) + g(|x-y|)]dy, x > 0, \tag{1}$$

và thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa:

$$F_C\left(f \underset{F_C}{*} g\right)(y) = (F_C f)(y).(F_C g)(y), \forall y > 0. \tag{2}$$

Tích chập với hàm trọng $\gamma_1(y) = \sin y$ của hai hàm f và g đối với phép biến đổi tích phân Fourier sine F_S [11]:

$$\begin{aligned}\left(f \overset{\gamma_1}{\underset{F_S}{*}} g\right)(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)[g(x+1+t) + g(|x+1-t|)\,sign(x+1-t) \\ g(|x-1+t|)\,sign(x-1+t) + g(|x-1-t|)\,sign(x-1-t)]dt.\end{aligned} \tag{3}$$

Với tích chập này ta nhận được đẳng thức nhân tử hóa:

$$F_S\left(f \overset{\gamma_1}{\underset{F_S}{*}} g\right)(y) = \sin y(F_S f)(y).(F_S g)(y), \forall y > 0. \tag{4}$$

Tích chập suy rộng của hai hàm f và g đối với các phép biến đổi tích phân Fourier sine và Fourier cosine [9,10]:

$$\left(f \underset{1}{*} g\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(y)[g(|x-y|)-g(x+y)]dy, x>0, \tag{5}$$

với đẳng thức nhân tử hóa:

$$F_S\left(f \underset{1}{*} g\right)(y)=(F_S f)(y).(F_C g)(y), \forall y>0. \tag{6}$$

Tích chập suy rộng của hai hàm f và g đối với các phép biến đổi tích phân Laplace

L có dạng [9,10]:

$$\left(f \underset{L}{*} g\right)(x)=\int_0^{x} f(x-t)g(t)dt, x>0, \tag{7}$$

thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa:

$$L\left(f \underset{L}{*} g\right)(y)=(Lf)(y).(Lg)(y), \forall y>0. \tag{8}$$

2. TÍCH CHẬP SUY RỘNG VỚI HÀM TRỌNG

2.1. Định nghĩa

Tích chập với hàm trọng $\gamma(y)=\sin\alpha y, (\alpha>0)$ đối với các phép biến đổi tích phân Fourier cosine, Fourier sine của hai hàm f và g được xác định bởi:

$$\begin{aligned}(f \overset{\gamma}{*} g)(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(y)\big[g(|x+y-\alpha|)+g(|x-y+\alpha|)\\ -g(x+y+\alpha)-g(|x-y-\alpha|)\big]dy, x>0.\end{aligned} \tag{9}$$

2.2. Định lý

Cho f, g là các hàm thuộc $L(\mathbb{R}_+)$. Khi đó tích chập (9) thuộc $L(\mathbb{R}_+)$ và thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa sau:

$$F_C\left(f \overset{\gamma}{*} g\right)(y)=\sin\alpha y(F_S f)(y).(F_C g)(y), \forall y>0. \tag{10}$$

Chứng minh. Từ (9) giả thiết $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$, ta có**:**

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|(f \overset{\gamma}{*} g)(x)|dx \le \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}|f(y)|\Bigg[\int_0^{+\infty}|g(|x+y-\alpha)|dx+\int_0^{+\infty}|g(|x-y-\alpha|)|dx\\ +\int_0^{+\infty}|g(x+y+\alpha)|dx+\int_0^{+\infty}|g(|x-y-\alpha|)|dx\Bigg]dy\end{aligned} \tag{11}$$

Mặt khác ta có

$$\int_0^{+\infty} |g(x+\alpha+y)|dx + \int_0^{+\infty} |g(|x-\alpha-y|)|dx = \int_{y+\alpha}^{+\infty} |g(t)|dt + \int_{-y-\alpha}^{+\infty} |g(|t|)|dt = 2\int_0^{+\infty} |g(t)|dt \quad (12)$$

Tương tự,

$$\int_0^{+\infty} |g(|x+\alpha-y|)|dx + \int_0^{+\infty} |g(|x-\alpha+y|)|dx = 2\int_0^{+\infty} |g(t)|dt \qquad (13)$$

Từ (11), (12) và (13) ta nhận được

$$\int_0^{+\infty} |(f \overset{\gamma}{*} g)(x)|\, dx \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt \int_0^{+\infty} |g(t)|dt < +\infty$$

Vậy ta có $(f \overset{\gamma}{*} g)(x) \in L(\mathbb{R}_+)$. Xuất phát từ các đẳng thức

$$\sin\alpha x (F_c f)(x)(F_c g)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \sin\alpha x \sin xu \cos xv . f(u).\mathrm{g}(v)dudv,$$

$$\sin\alpha x . \sin xu \cos xv = \frac{1}{4}\big[\cos x(u-v-\alpha) + \cos x(u+v-\alpha) - \cos x(u+v+\alpha)$$
$$- \cos x(u-v-\alpha)\big],$$

ta nhận được

$$\sin\alpha x (F_S f)(x)(F_c g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \big[\cos x(u-v-\alpha) + \cos x(u+v-\alpha) - \cos x(u+v+\alpha)$$
$$- \cos x(u-v+\alpha)\big] f(u)g(v)dudv. \qquad (14)$$

Với phép đổi biến $y = u$ và $t = u + v + \alpha$ ta có

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \cos x(u+v+\alpha) f(u)g(v)dudv = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{y+\alpha}^{+\infty} \cos xt f(y)g(t-y-\alpha)dtdy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \cos xt f(y)g(|t-y-\alpha|)dtdy - \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{y+\alpha} \cos xt f(y)g(y-t+\alpha)dtdy. \qquad (15)$$

Tương tự, với phép đổi biến $y = u,\ \ t = v - u - \alpha$ ta có

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \cos x(u-v+\alpha) f(u)g(v)dudv = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\alpha-y}^{+\infty} \cos xt f(y)g(t+y+\alpha)dtdy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \cos xt f(y)g(t+y+\alpha)dtdy + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-y-\alpha}^{0} \cos xt f(y)g(y+t+\alpha)dtdy. \qquad (16)$$

Hơn nữa ta có

$$\int_0^{+\infty}\int_{-y-\alpha}^{0} \cos xt f(y)g(y+t+\alpha)dtdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{y+\alpha} \cos xt f(y)g(y-t+\alpha)dtdy \qquad (17)$$

Từ (15), (16) và (17) ta nhận được:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left[\cos x(u+\alpha+v)+\cos x(u-v+\alpha)\right]f(u)g(v)dudv$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos xt\left[g(|t-y-\alpha|)+g(t+y+\alpha)\right]f(y)dtdy. \qquad (18)$$

Với kỹ thuật đổi biến tương tự, ta có:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left[\cos x(u+v-\alpha)+\cos x(u-v-\alpha)\right]f(u)g(v)dudv$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos xt\left[g(|t-y+\alpha|)\quad+g(|t+y-\alpha|)\right]f(y)dtdy \qquad (19)$$

Từ (14), (18) và (19), ta nhận được:

$$\sin\alpha x(F_S f)(x)(F_C g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\cos xt\left\{\int_0^{+\infty}f(y)\left[g(|t+y-\alpha|)+g(|t-y+\alpha|)\right.\right.$$
$$\left.\left.-g(t+y+\alpha)+g(|t-y-\alpha)\right]dy\right\}dt.$$

Từ đẳng thức cuối và (9) có điều phải chứng minh

2.3. Định lý

Trong không gian các hàm liên tục thuộc $L(\mathbb{R}_+)$, tích chập với hàm trọng (9) không giao hoán và có đẳng thức liên hệ với tích chập Laplace như sau:

$$\left(f\overset{\gamma}{*}g\right)(x)=-\left(g\overset{\gamma}{*}f\right)(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[sign(\alpha-x)\left(f\underset{L}{*}g\right)(|x-\alpha|)+\left(f\underset{L}{*}g\right)(x+\alpha)\right], \qquad (20)$$

ở đây $f\underset{L}{*}g$ *là tích chập với toán tử tích phân (7).*

Chứng minh. Thật vậy**,** với các phép đổi biến $t=y+x-\alpha,\ t=y-x-\alpha,\ t=y+x+\alpha,$ $t=y-x+\alpha,$ ta có

$$\left(f\overset{\gamma}{*}g\right)(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{x-\alpha}^{+\infty}g(|t|)f(t-x+\alpha)dt+\int_{-x-\alpha}^{+\infty}g(|t|)f(x+\alpha+t)dt\right.$$
$$\left.-\int_{x+\alpha}^{+\infty}g(|t|)f(t-x-\alpha)dt-\int_{\alpha-x}^{+\infty}g(|t|)f(t+x-\alpha)dt\right].$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left\{\int_0^{+\infty}\left[f(|x-t-\alpha|)+f(x+t+\alpha)-f(|x-t+\alpha|)-f(|x+t-\alpha|)\right]g(t)dt\right.$$
$$+\int_{x-\alpha}^{0}g(|t|)f(t-x+\alpha)dt+\int_{-(x+\alpha)}^{0}g(|t|)f(x+\alpha+t)dt-\int_{x+\alpha}^{0}g(|t|)f(t-x-\alpha)dt$$
$$\left.-\int_{-(x-\alpha)}^{0}|g(|t|)|f(x+t-\alpha)dt\right\}$$

$$= -\left(g \overset{\gamma}{*} f\right)(x) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{x-\alpha}^{0} g(|t|)f(t-x+\alpha)dt - \int_{-(x-\alpha)}^{0} g(|t|)f(x+t-\alpha)dt \right.$$

$$\left. - \int_{x+\alpha}^{0} g(|t|)f(t-x-\alpha)dt + \int_{-(x+\alpha)}^{+\infty} g(|t|)f(x+t+\alpha)dt\right].$$

Với phép biến đổi $u = -t$ ta được

$$\int_{0}^{x-\alpha} g(|t|)f(|t-x+\alpha|)dt = -\int_{0}^{\alpha-x} g(|u|)f(|u+x-\alpha|)du$$

$$\int_{0}^{-(x+\alpha)} g(|t|)f(x+\alpha+t)dt = -\int_{0}^{\alpha+x} g(u)f(|u-x-\alpha|)du.$$

Do đó

$$\int_{0}^{\alpha-x} g(|u|)f(|u+x-\alpha|)du - \int_{0}^{x-\alpha} g(|u|)f(|u-x+\alpha|)du$$

$$= 2sign(\alpha-x)\int_{0}^{|x-\alpha|} g(u)f(|x-\alpha|-u)du = 2sign(\alpha-x)\left(f \underset{L}{*} g\right)(|x-\alpha|).$$

Với phép đổi biến $u = t-x+\alpha$, $u = t+x-\alpha$, $u = t-x-\alpha$, $u = t+x+\alpha$ ta được

$$\int_{x-\alpha}^{0} g(|t|)f(t-x+\alpha)dt - \int_{\alpha-x}^{0} g(|t|)f(x+t-\alpha)dt - \int_{x+\alpha}^{0} g(t)f(t-x-\alpha)dt$$

$$+ \int_{-(\alpha+x)}^{0} g(|t|)f(t+x+\alpha)dt = 2sign(\alpha-x)\left(f \underset{L}{*} g\right)(|x-\alpha|) + 2\left(f \underset{L}{*} g\right)(x+\alpha).$$

Do đó nhận được (20). Ta chứng minh xong định lý.

2.4. Định lý

Trong không gian các hàm liên tục thuộc $L(\mathbb{R}_+)$, tích chập với hàm trọng (9) không kết hợp và thỏa mãn các đẳng thức sau:

a) $f \overset{\gamma}{*}\left(g \overset{\gamma}{*} h\right) = g \overset{\gamma}{*}\left(f \overset{\gamma}{*} h\right)$

b) $f \underset{1}{*}\left(g \overset{\gamma}{*} h\right) = \left(f \underset{1}{*} h\right) \overset{\gamma}{*} g$

ở đây $f \underset{1}{*} h$ *là tích chập suy rộng đối với phép biến đổi tích phân Fourier sine và Fourier cosine (5).*

Chứng minh. Sử dụng các đẳng thức nhân tử hóa (6), (10) ta chứng minh dễ dàng định lý này.

3. ÁP DỤNG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

Xét hệ phương trình tích phân

$$\lambda_1 f(y) + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t)\left[g(|t-y|) + g(|t+y|)\right]\mathrm{dt} = k(y),$$

$$\frac{\lambda_3}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\left[\psi(|y+t-\alpha|) + \psi(|y-t+\alpha|) - \psi(y+t+\alpha) - \psi(|y-t-\alpha|)\right]dt \qquad (21)$$

$$+\lambda_4 g(y) = h(y),\ y>0,$$

Ở đây $\alpha > 0$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ là các hằng số phức; $\varphi, \psi, k, h \in L(\mathbb{R}_+)$ đã biết; f và g là hai ẩn hàm.

3.1. Định lý

Với điều kiện $1 + CF_C(\varphi \overset{\gamma}{*} \psi)(y) \neq 0$, *thì hệ phương trình tích phân (21) có nghiệm duy nhất nghiệm thuộc* $L(\mathbb{R}_+)$ *xác định bởi:*

$$f(y) = \frac{1}{\lambda}\left\{\lambda_4 k(y) - \lambda_2(\varphi \underset{1}{*} h)(y) - (k \underset{1}{*} l)(y) + \lambda_2\left((\varphi \underset{1}{*} h)\underset{1}{*} l\right)(y)\right\}. \qquad (22)$$

$$g(y) = \frac{1}{\lambda}\left\{\lambda_1 h(y) - \lambda_3(k \overset{\gamma}{*} \psi)(y) - \lambda_1(h \underset{F_C}{*} l)(y) + \lambda_3\left((k \overset{\gamma}{*} \psi)\underset{F_C}{*} l\right)(y)\right\}$$

Ở đây, $l \in L(\mathbb{R}_+)$ *và được xác định như sau:*

$$(F_C l)(\mathrm{y}) = \frac{CF_C(\varphi \overset{\gamma}{*} \psi)(y)}{1 + CF_C(\varphi \overset{\gamma}{*} \psi)(y)},\ \lambda = \lambda_1\lambda_4,\ C = -\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_4}.$$

Chứng minh. Viết lại hệ (21) ở dạng

$$\begin{cases} \lambda_1 f(y) + \lambda_2(\varphi \underset{1}{*} g)(y) = k(y), \\ \lambda_3(f \overset{\gamma}{*} \psi)(y) + \lambda_4 g(y) = h(y), y > 0. \end{cases}$$

Sử dụng các đẳng thức nhân tử hóa của tích chập (5) và (9) ta nhận được

$$\begin{cases} \lambda_1(F_S f)(y) + \lambda_2(F_S\varphi)(y)(F_C g)(y) = (F_S k)(y) \\ \lambda_3 \sin\alpha y(F_S f)(y)(F_C\psi)(y) + \lambda_4(F_C g)(y) = (F_C h)(y), y > 0. \end{cases}$$

Ta tính các định thức

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2(F_S\varphi)(y) \\ \lambda_3(F_C\psi)(y)\sin\alpha y & \lambda_4 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_4\left[1+\frac{-\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_4}\sin\alpha y(F_S f)(y)(F_C\psi)(y)\right]$$

$$= \lambda\left[1+CF_C(\varphi\overset{\gamma}{*}\psi)(y)\right] \neq 0,\ \lambda=\lambda_1\lambda_4 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (F_S k)(y) & \lambda_2(F_S\varphi)(y) \\ (F_C h)(y) & \lambda_4 \end{vmatrix} = \lambda_4(F_S k)(y) - \lambda_2(F_S\varphi)(y)(F_C h)(y).$$

Do đó,

$$(F_S f)(y) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\lambda} - \frac{\Delta_1}{\lambda}\frac{CF_C(\varphi\overset{\gamma}{*}\psi)(y)}{1+CF_C(\varphi\overset{\gamma}{*}\psi)(y)}, \mathrm{y} > 0.$$

Theo định lý Winner-Lévy [12] tồn tại hàm $l \in L(\mathbb{R}_+)$ sao cho:

$$(F_C l)(\mathrm{y}) = \frac{CF_C(\varphi\overset{\gamma}{*}\psi)(y)}{1+CF_C(\varphi\overset{\gamma}{*}\psi)(y)}.$$

Từ đây và đẳng thức nhân tử hóa (6) ta có:

$$(F_S f)(y) = \frac{1}{\lambda}[\Delta_1\text{-}\Delta_1(F_C l)(y)]$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left\{(F_S k)(y)\lambda_4 - \lambda_2(F_S\varphi)(y)(F_C h)(y) - \left[(F_S k)(y)\lambda_4\right.\right.$$
$$\left.\left.\text{-}\lambda_2(F_S\varphi)(y)(F_C h)(y)\right](F_C l)(y)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{(F_S k)(y)\lambda_4 - \lambda_2 F_S(\varphi\underset{1}{*}h)(y) - F_S(k\underset{1}{*}l)(y) + \lambda_2 F_S(\varphi\underset{1}{*}h)(y)(F_C l)(y)\right\}$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left\{(F_S k)(y)\lambda_4 - \lambda_2 F_S(\varphi\underset{1}{*}h)(y) - F_S(k\underset{1}{*}l)(y) + \lambda_2 F_S\left((\varphi\underset{1}{*}h)\underset{1}{*}l\right)(y)\right\}.$$

Do đó

$$f(y) = \frac{1}{\lambda}\left\{k(y)\lambda_4 - \lambda_2(\varphi\underset{1}{*}h)(y) - (k\underset{1}{*}l)(y) + \lambda_2\left((\varphi\underset{1}{*}h)\underset{1}{*}l\right)(y)\right\}.$$

Với kỹ thuật biến đổi tương tự, ta nhận được

$$g(y) = \frac{1}{\lambda}\left\{\lambda_1 h(y) - \lambda_3(k\overset{\gamma}{*}\psi)(y) - \lambda_1(h\underset{F_C}{*}l)(y) + \lambda_3\left((k\overset{\gamma}{*}\psi)\underset{F_C}{*}l\right)(y)\right\}.$$

Từ $k(y)$, $h(y)$ và các tích chập trong công thức (22) thuộc $L(\mathbb{R}_+)$, ta suy ra $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$. Định lý được chứng minh

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này chúng tôi đã xây dựng và nghiên cứu tích chập mới với hàm trọng $\gamma(y) = \sin \alpha y, (\alpha > 0)$ đối với các phép biến đổi tích phân Fourier cosine, Fourier sine. Sau đó áp dụng tích chập nhận được để giải một lớp hệ phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. V. A. Kakichev, N. X. Thao, Amethod for constructing generalized integral convolutions. Izv. Vyss Ucrbu, Zaved, Mat., 1 (1998) 31-40. http://mi.mathnet.ru/eng/ivm279

[2]. N. M. Khoa, On a generalized convolution with a weight function for the Hartley and Fourier cosine transforms, Acta Math. Vietnam, 39 (2014) 263-276. https://doi.org/10.1007/s40306-014-0055-2

[3]. N. X. Thao, V. A. Kakichev, V. K. Tuan, On the generalized convolution for Fourier cosine and sine transforms, East-West J. Math., 1 (1998) 85-90. http://eastwestmath.org/index.php/ewm/article/view/343

[4]. N. X. Thao, N. M. Khoa, On the generalized convolution with a weight function for the Fourier, Fourier cosine and sine transforms, Vietnam J. Math., 33 (2005) 421-436. http://www.math.ac.vn/publications/vjm/VJM_33/Pdf_files_4_2005/Bai5_Khoa.pdf

[5]. N. X. Thao, N. M. Khoa, On the generalized convolution with a weight function for the Fourier sine and cosine transforms, Integral Transforms Spec. Funct., 17 (2006) 673-685. https://doi.org/10.1080/10652460500432071

[6]. N. M. Tuan, P. D. Tuan, Generalized convolutions relative to the Hartley transforms with applications, Sci. Math. Jpn., 70 (2009) 77-89. https://doi.org/10.32219/isms.70.1_77

[7]. T. Tuan, N. T. Hong, P. V. Hoang, Generalized Convolution for the Kontorovich-Lebedev, Fourier Transforms and Applications to Acoustic Fields, Acta Math. Vietnam, 41 (2016) 355-367. https://doi.org/10.1007/s40306-015-0148-6

[8]. X. Zhi, D. Wei, W. Zhang, A generalized convolution theorem for the special affine Fourier transform and its application to filtering, Optik, 127 (2016) 2613-2616. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2015.11.211

[9]. I. N. Sneddon, Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York, 1951.

[10]. E. C. Titchmarch, Introduction to Theory of Fourier Integrals, Oxford Univ. Press, 1937.

[11]. V. A. Kakichev, On the convolution for integral transforms, Izv. An BSSR. Ser. Fiz. Mat., in Russian, 1967, pp. 48-57.

[12]. N. I. Achiezer, Lectures on Approximation Theory, Science Publishing House, Moscow, 1965.