



STEM WAVES EVOLUTION ALONG VERTICAL POROUS BREAKWATER

Van Nghi Vu^{1,*}, Van Khoi Pham²

¹Ho Chi Minh City University of Transport, No 2 Vo Oanh Street, Binh Thanh District, Ho Chi Minh City, Vietnam

²Vietnam Maritime University, No 484 Lach Tray Street, Le Chan District, Hai Phong, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 04/02/2021

Revised: 01/04/2021

Accepted: 15/04/2021

Published online: 15/06/2021

<https://doi.org/10.47869/tcsj.72.5.2>

*Corresponding author

Email: nghi.vu@ut.edu.vn

Abstract. Stem waves exist and develop along the vertical structures by the interaction between the incident waves and the reflected waves in cases of the obliquely incident waves. Stem waves impact on the safety of ship navigation and the vertical structures. In addition, Stem waves may increase wave-overtopping amount in extreme weathers. Thus, Stem waves should be seriously considered in the designing process of the vertical structures. This study applies the extended Boussinesq equations for waves in porous media to investigate the evolution and propagation of Stem waves in front of the vertical rigid and porous structures. Numerical results from the present extended Boussinesq model for Stem waves in front of a vertical wall are well verified with those of the SWASH model and the experimental data. For obliquely incident waves to a vertical rigid breakwater, Stem waves develop and propagate along the vertical rigid breakwater and are clearly shown in cases of the large incident angles and high nonlinearity. For a vertical porous breakwater, Stem waves still exist and develop along the structure though wave heights decrease due to energy dissipation inside the porous structure. The research results can be applied for the accretion or erosion investigation in front of vertical porous structures.

Keywords: Stem waves, overtopping, vertical rigid breakwater, vertical porous structure, Boussinesq model, SWASH model.



SỰ PHÁT TRIỂN CỦA SÓNG STEM DỌC ĐÊ TƯỜNG ĐỨNG DẠNG RỘNG

Vũ Văn Nghi^{1,*}, Phạm Văn Khôi²

¹Trường Đại học Giao thông vận tải TP HCM, Số 2 Võ Oanh, Quận Bình Thạnh, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

²Trường Đại học Hàng hải Việt Nam, Số 484 Lạch Tray, Quận Lê Chân, Hải Phòng, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 04/02/2021

Ngày nhận bài sửa: 01/04/2021

Ngày chấp nhận đăng: 15/04/2021

Ngày xuất bản Online: 15/06/2021

<https://doi.org/10.47869/tcsj.72.5.2>

*Tác giả liên hệ

Email: nghi.vu@ut.edu.vn

Tóm tắt. Sóng Stem là sóng được hình thành và phát triển dọc theo các công trình tường đứng do sự tương tác giữa sóng tới và sóng phản xạ khi sóng tới xiên góc với công trình và có thể gây nguy hiểm cho tàu bè cũng như công trình. Hơn nữa, sóng Stem có thể làm tăng lượng sóng tràn qua đê trong điều kiện thời tiết cực trị. Do đó, sóng Stem cần được lưu ý khi thiết kế đê tường đứng. Bài báo này sử dụng phương trình Boussinesq mở rộng cho sóng truyền trong môi trường rộng để nghiên cứu về sự phát triển của sóng Stem phía trước đê tường đứng vách kín và đê tường đứng kết cấu rộng. Các kết quả mô phỏng sóng Stem trong nghiên cứu này cho thấy sự phù hợp với các kết quả của mô hình SWASH và số liệu thí nghiệm từ mô hình vật lý. Đối với trường hợp đê tường đứng vách kín, sóng Stem đặc biệt thấy rõ khi góc sóng tới lớn và độ phi tuyến của sóng cao. Khi mô phỏng sóng tới đê tường đứng kết cấu rộng, sóng Stem vẫn xuất hiện phía trước đê dù chiều cao sóng giảm đi do năng lượng sóng bị hấp thụ một phần qua đê rộng. Kết quả của bài báo có thể được sử dụng trong các nghiên cứu về bồi xói phía trước đê tường đứng kết cấu rộng.

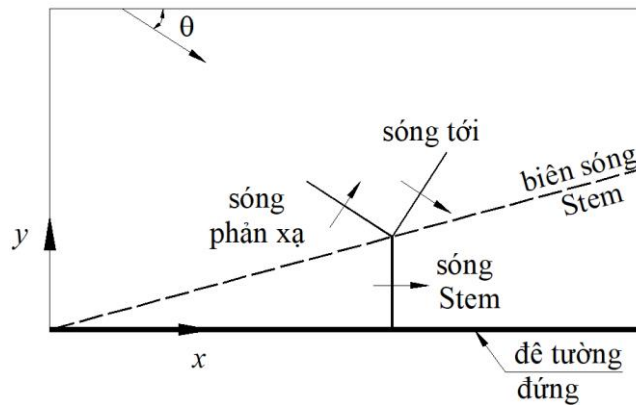
Từ khóa: Sóng Stem, sóng tràn, đê tường đứng vách kín, đê tường đứng kết cấu rộng, mô hình Boussinesq, mô hình SWASH.

©2021 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Theo lý thuyết sóng tuyến tính, khi sóng truyền vuông góc tới các công trình chắn sóng có kết cấu dạng tường đứng vách kín, chiều cao sóng phía trước tường tăng gấp đôi. Tuy

nhiên, khi sóng truyền xiên góc tới đê tường đứng vách kín, do sự tương tác giữa sóng tới và sóng phản xạ sẽ hình thành nên sóng Stem dọc theo công trình "như thể hiện trên Hình 1" [1]. Sóng Stem được cho là có thể gây khó khăn cho việc hành hải của tàu bè khi đê chắn sóng được bố trí dọc lối vào cảng, có thể gây xói lở đường bờ và gây hư hại cho các thiết bị neo tàu dọc bến [2]. Hơn nữa, do sự phát triển của sóng Stem trước đê tường đứng, nó có thể làm tăng lượng sóng tràn qua đê trong điều kiện thời tiết cực trị. Như vậy ảnh hưởng của sóng Stem trước đê tường đứng là khá đáng kể. Nghiên cứu cho thấy sóng Stem được tạo ra từ sóng đơn và phát triển dọc theo tường đứng vách kín trước khi gặp đê chắn sóng kết cấu rỗng [3]. Tuy nhiên nghiên cứu này chưa có đánh giá chi tiết về sự phát triển của sóng Stem dọc theo đê tường đứng vách kín.



Hình 1. Sóng Stem phát triển trước tường đứng [4].

Sóng Stem không những được nghiên cứu qua việc mô phỏng sử dụng các mô hình số như REF/DIF 1, COULWAVE, và SWASH mà còn được nghiên cứu dựa trên các kết quả thí nghiệm từ mô hình vật lý [4,5].

Hiện nay dọc theo ven biển khu vực Đồng bằng sông Cửu Long, hệ thống đê tường đứng kết cấu rỗng đã được xây dựng dưới dạng các hàng cọc bê tông cốt thép đổ đá học vào giữa [6] (Hình 2.a) hay dạng hàng cọc tre [7-9] (Hình 2.b). Phía trước các đê này xuất hiện hiện tượng xói chân công trình tuy nhiên chưa có nhiều nghiên cứu về vấn đề này cũng như vẫn chưa có nghiên cứu nào liên quan tới sự hình thành sóng Stem dọc theo các kết cấu đê hiện tại. Nghiên cứu này bước đầu đánh giá sự phát triển của sóng Stem dọc theo đê tường đứng kết cấu rỗng. Từ đó, ảnh hưởng của loại sóng Stem này tới khả năng chịu lực của đê chắn sóng kết cấu rỗng cũng như hiện tượng bồi xói địa hình xung quanh đê sẽ được nghiên cứu phát triển trong tương lai.



Hình 2. a) Đê chắn sóng bằng 2 hàng cọc bê tông [6]. b) Đê chắn sóng bằng hàng rào tre [7].

2. PHƯƠNG TRÌNH MÔ PHỎNG

Để mô phỏng sóng Stem dọc đê tường đứng kết cấu rỗng, trong nghiên cứu này, tác giả sử dụng mô hình sóng lan truyền trong môi trường rỗng được phát triển từ nghiên cứu [10]. Mô hình [10] được phát triển từ hệ phương trình Boussinesq mở rộng và được chứng minh là phù hợp khi mô phỏng sóng qua kết cấu rỗng ở vùng nước sâu và vùng nước trung gian. Hệ phương trình chủ đạo gồm phương trình liên tục (1) và phương trình động lượng (2) như sau:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \eta) \bar{\mathbf{u}}] = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \left(\beta \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right) \bar{\mathbf{u}} + g \nabla \eta + \beta \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{6} \left(\beta \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right) h^2 \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \\ & - \left(\frac{1}{2} + \gamma \right) \left(\beta \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right) h \nabla [\nabla \cdot (h \bar{\mathbf{u}})] - \gamma g h \nabla [\nabla \cdot (h \nabla \eta)] = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Các đại lượng trong các công thức trên bao gồm: η là cao độ mặt nước; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ là toán tử 2 chiều; h là độ sâu nước; $\bar{\mathbf{u}} = (u, v)$ là vec tơ vận tốc nước lỗ rỗng lấy trung bình theo phương đứng; γ là thông số hiệu chỉnh mô hình Boussinesq, $\gamma = 1/18$; các đại lượng đặc trưng cho môi trường rỗng bao gồm λ , α , và β lần lượt là độ rỗng, hệ số cản dòng chảy và hệ số cản quán tính của môi trường rỗng. Độ rỗng là đại lượng không thứ nguyên được định nghĩa là tỷ số giữa thể tích lỗ rỗng và toàn bộ thể tích khối kiểm tra. Do đó độ rỗng có giá trị từ 0 tới 1, với độ rỗng có giá trị 0 khi môi trường đặc hoàn toàn và có giá trị 1 khi rỗng hoàn toàn. Khi áp dụng hệ phương trình trên cho đê chắn sóng, độ rỗng có giá trị 0 áp dụng cho đê tường đứng vách kín như đê thùng chìm (không có buồng tiêu sóng), kè bảo vệ bờ biển; độ rỗng có giá trị 1 cho trường hợp không có đê (môi trường hoàn toàn là nước); độ rỗng có giá trị lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1 cho các dạng đê đá đổ, đê bằng 2 hàng cọc bê tông ly tâm đổ đá học vào giữa, đê bằng hàng rào tre chèn các bó cành cây vào giữa. Như vậy hệ phương trình từ nghiên cứu [10] có thể áp dụng cho các trường hợp sóng truyền trong môi trường không có đê chắn sóng và/hoặc có đê chắn sóng với độ rỗng khác nhau.

Các hệ số cản dòng chảy và hệ số cản quán tính của môi trường rỗng được xác định qua các công thức sau:

$$\alpha = \alpha_t \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{\nu}{d^2} + \alpha_r \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{1}{d} |\bar{\mathbf{u}}| \quad (3)$$

$$\beta = 1 + (1 - \lambda) \kappa \quad (4)$$

với α_t và α_r lần lượt là hệ số cản dòng chảy tầng và hệ số cản dòng chảy rối; ν là hệ số nhớt động học của nước; d là đường kính hạt và κ là hệ số khối lượng nước kèm.

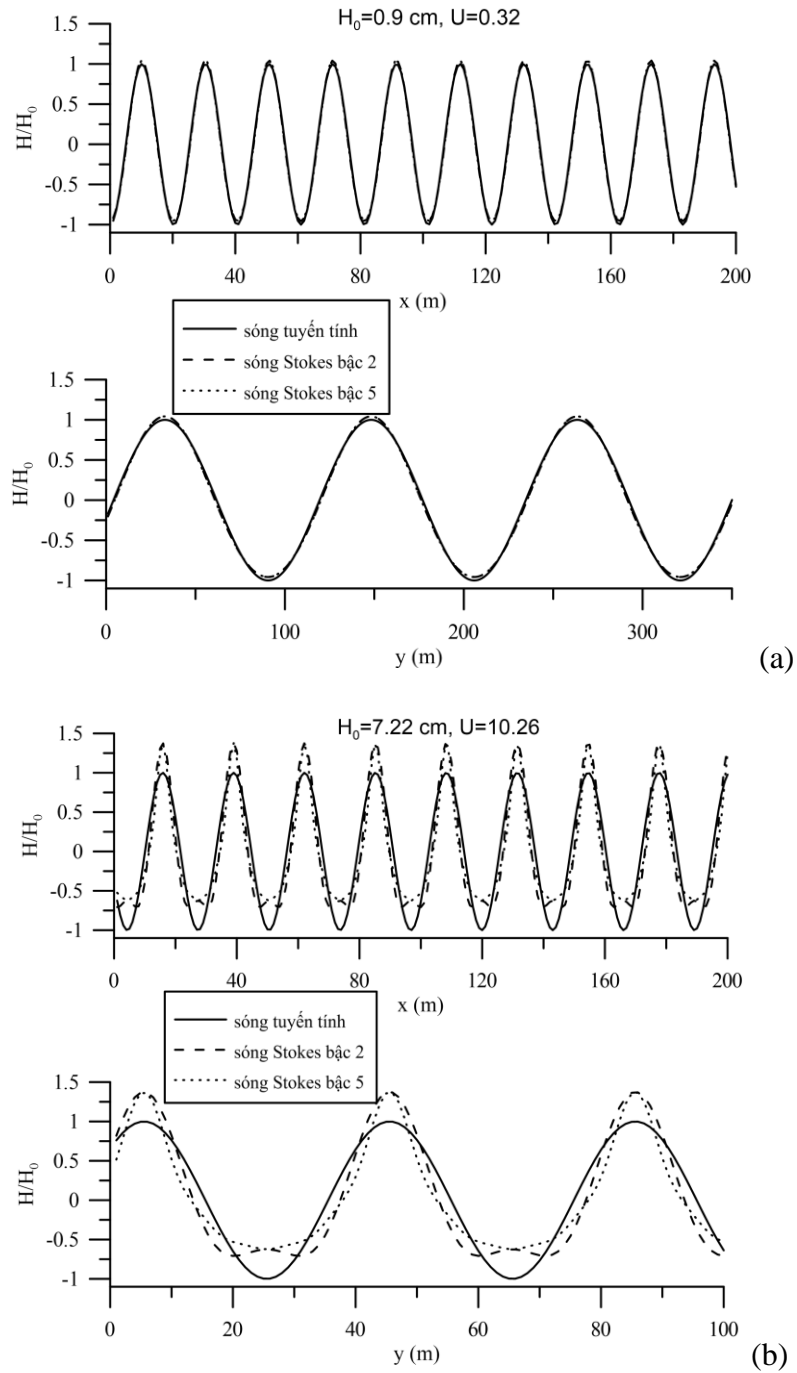
3. MÔ PHỎNG SÓNG STEM TRƯỚC CÔNG TRÌNH

3.1. Điều kiện ban đầu

Để so sánh kết quả của nghiên cứu này với kết quả thí nghiệm và mô hình SWASH, nghiên cứu đã sử dụng điều kiện ban đầu là sóng Stokes bậc 5 [11] với các thông số Ursell khác nhau. Thông số Ursell [12] là thông số không thứ nguyên, thể hiện tính phi tuyến của sóng:

$$U = \frac{H}{h} \left(\frac{L}{h} \right)^2 \quad (5)$$

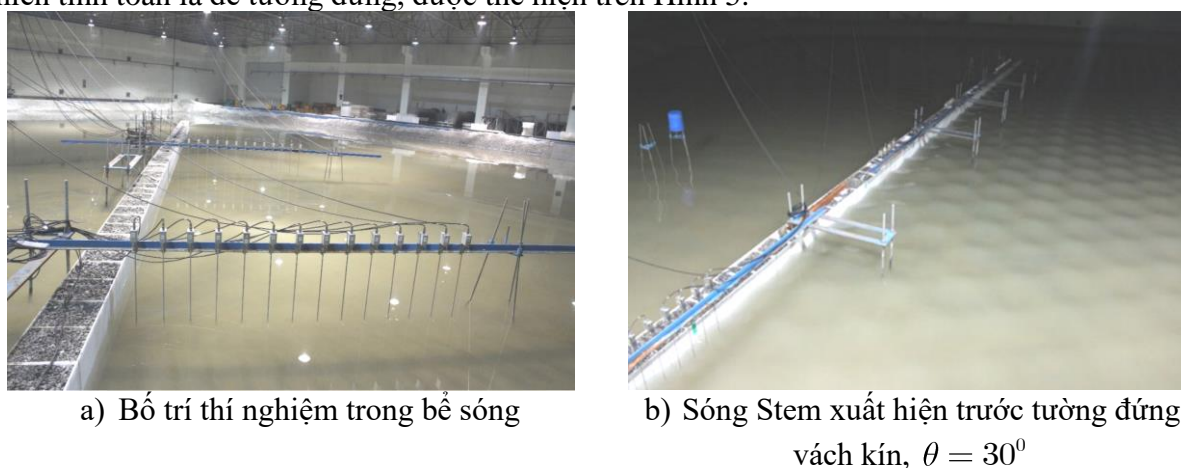
với H là chiều cao sóng và L là chiều dài sóng. Hình 3.a cho thấy khi hệ số Ursell bé, tính phi tuyến của sóng nhỏ nên việc sử dụng lý thuyết sóng tuyến tính, Stokes bậc 2 hay bậc 5 đều không có sự khác nhau đáng kể. Tuy nhiên khi hệ số Ursell lớn hay tính phi tuyến của sóng lớn thì việc sử dụng sóng Stokes bậc 5 sẽ mang lại độ chính xác tốt hơn sử dụng sóng Stokes bậc 2 hoặc sóng tuyến tính. Điều kiện sóng đầu vào được thể hiện trên Hình 3.b.



Hình 3. So sánh điều kiện ban đầu khi sử dụng các sóng khác nhau.
a) thông số $U = 0.32$; b) thông số $U = 10.26$.

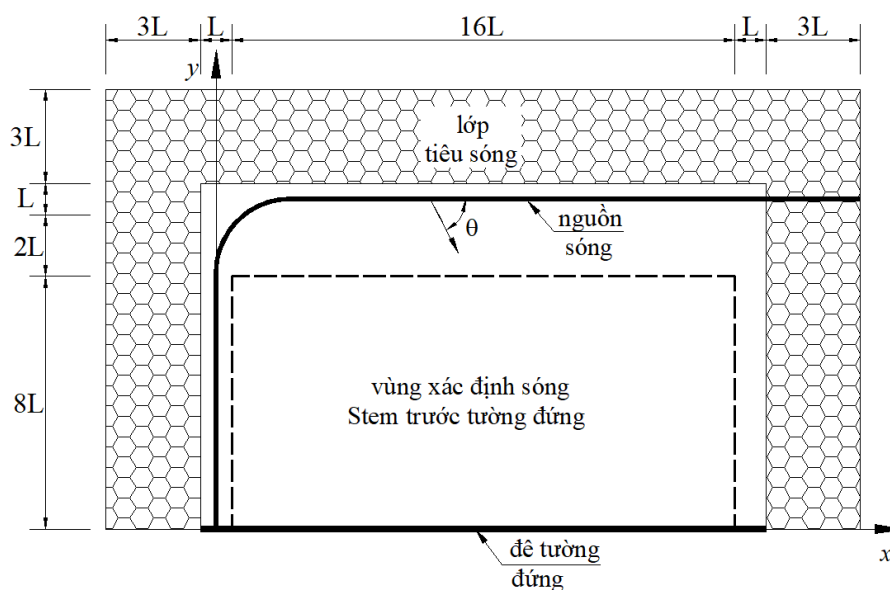
3.2. Sóng Stem trước đê tường đứng vách kín

Để kiểm chứng mô hình số ứng dụng trong nghiên cứu này, trước hết bài báo tiến hành mô phỏng sóng truyền xiên góc tới đê tường đứng vách kín và so sánh với các kết quả mô phỏng từ mô hình SWASH và số liệu thí nghiệm mô hình vật lý [4]. Trong mô hình vật lý của mình, nhóm nghiên cứu [4] tiến hành thí nghiệm trong bể sóng tại Viện Công nghệ xây dựng Hàn Quốc có kích thước dài 42 m, rộng 36 m và cao 1.05 m (Hình 4a). Kết quả thí nghiệm cho thấy sự phát triển rất rõ ràng của sóng Stem trước đê tường đứng vách kín (Hình 4b). Mô hình số ứng dụng trong nghiên cứu này với miền tính toán có kích thước theo phương x là $18L$ và theo phương y là $11L$ (với L là chiều dài sóng), 3 phía của miền tính toán được bố trí lớp tiêu sóng nhằm giảm ảnh hưởng của sóng phản xạ làm nhiễu miền tính toán, phía còn lại của miền tính toán là đê tường đứng, được thể hiện trên Hình 5.



Hình 4. Mô phỏng bằng mô hình vật lý, [4].

Để tạo sóng 2 chiều, nghiên cứu này áp dụng phương pháp tạo sóng với nguồn sóng có dạng cong [13–15]. Phương pháp này có ưu điểm là giảm bớt hiện tượng sóng nhiễu xạ tại vị trí nguồn sóng giao nhau [13] và giảm kích thước miền tính toán giúp tiết kiệm được thời gian mô phỏng đối với các bài toán 2 chiều [14].



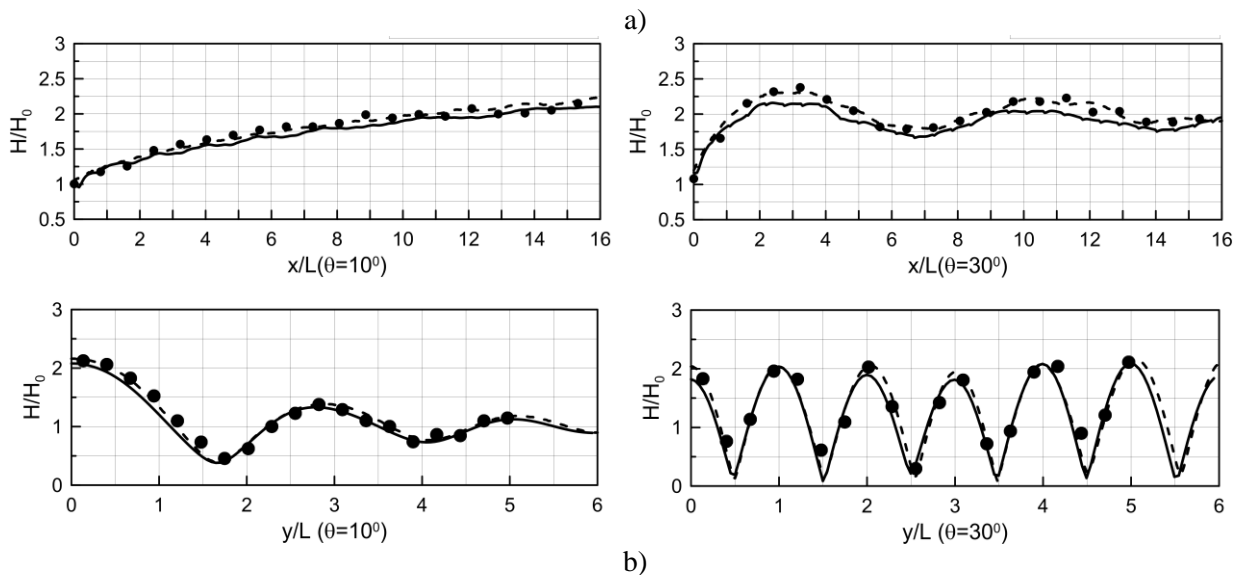
Hình 5. Miền tính toán cho trường hợp sóng Stem trước đê tường đứng vách kín.

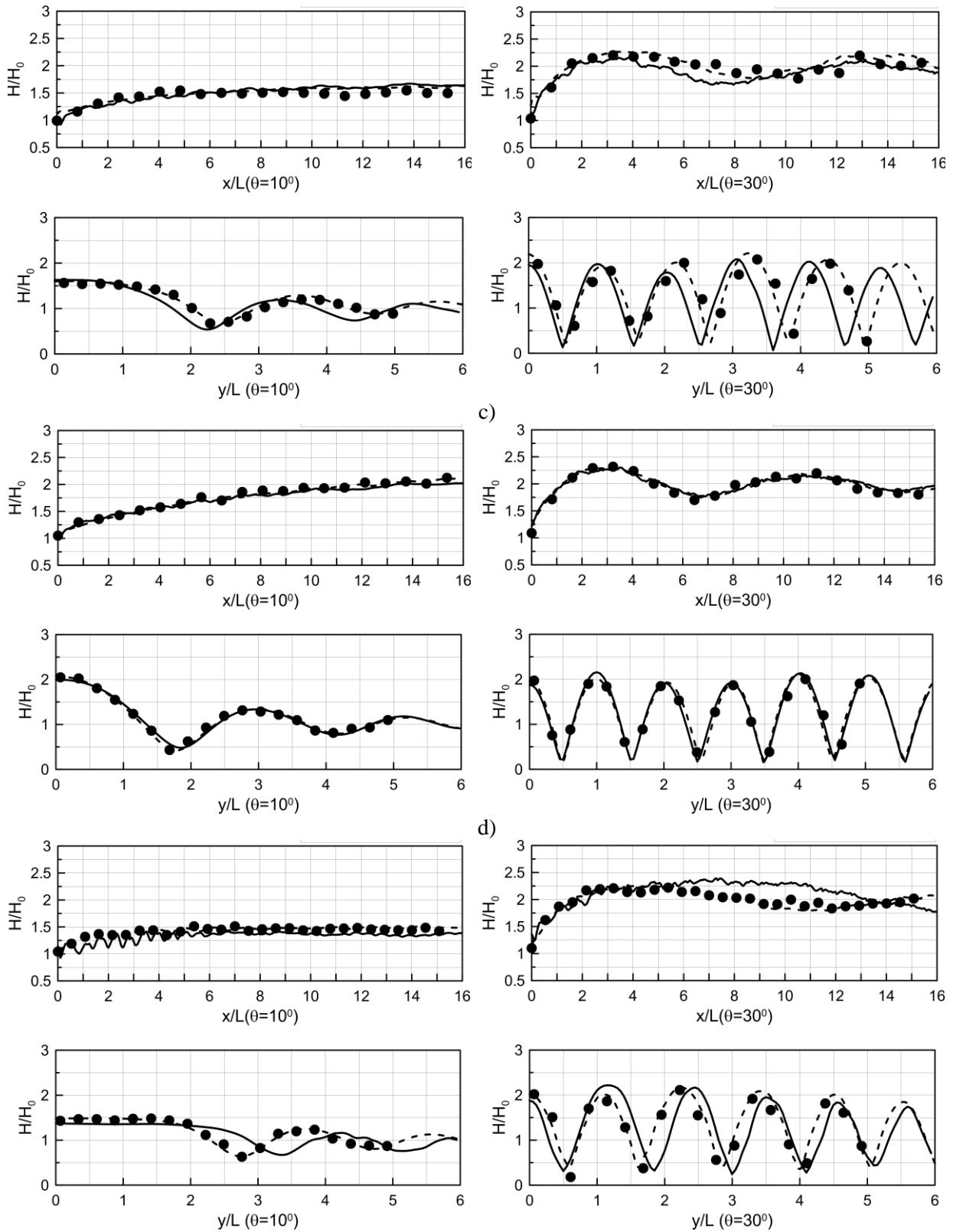
Mô phỏng được tiến hành theo 4 kịch bản (C1-C4) với chu kỳ sóng, chiều cao sóng và hướng sóng tới khác nhau được cho trong Bảng 1.

Bảng 1. Bốn kịch bản mô phỏng sóng Stem.

	T (s)	L (m)	H_0 (cm)	θ °	U	H_0/h	kh/π
C1	0.7	0.74	0.9	(10, 30)	0.32	0.036	0.67
C2	0.7	0.74	3.6	(10, 30)	1.26	0.144	0.67
C3	1.1	1.49	1.8	(10, 30)	2.57	0.072	0.34
C4	1.1	1.49	7.22	(10, 30)	10.26	0.288	0.34

Hình 6 dưới đây thể hiện chi tiết chiều cao sóng Stem trước đê tường đứng vách kín theo phương x (theo trục dọc đê) và phương y (vuông góc với trục đê) cũng như cho thấy kết quả khá tương đồng của mô hình hiện tại với số liệu thí nghiệm mô hình vật lý [4] và kết quả của mô hình SWASH. Khi chiều cao sóng tới nhỏ, tính phi tuyến của sóng yếu trong 2 trường hợp C1 ($H_0/h = 0.036$) và C3 ($H_0/h = 0.072$), kết quả từ mô hình số hiện tại rất phù hợp với các số liệu so sánh. Khi chiều cao sóng tới tăng lên, tính phi tuyến của sóng mạnh hơn cho trường hợp C2 ($H_0/h = 0.144$) và C4 ($H_0/h = 0.288$), kết quả từ mô hình số hiện tại cho thấy mức độ phù hợp với các kết quả từ mô hình vật lý và mô hình SWASH khá tốt khi góc sóng tới nhỏ ($\theta = 10^\circ$). Khi góc sóng tới lớn ($\theta = 30^\circ$) và tính phi tuyến của sóng mạnh như trường hợp C2 và C4, kết quả từ mô hình hiện tại cho thấy sự khác biệt đôi chút với các số liệu so sánh. Nguyên nhân chính có thể do mô hình số hiện tại là mô hình có tính phi tuyến yếu (weakly nonlinear), tính phi tuyến của sóng tăng lên khi sóng tới tương tác với sóng phản xạ làm cho kết quả từ mô hình hiện tại có chút khác biệt với mô hình SWASH và số liệu thí nghiệm.

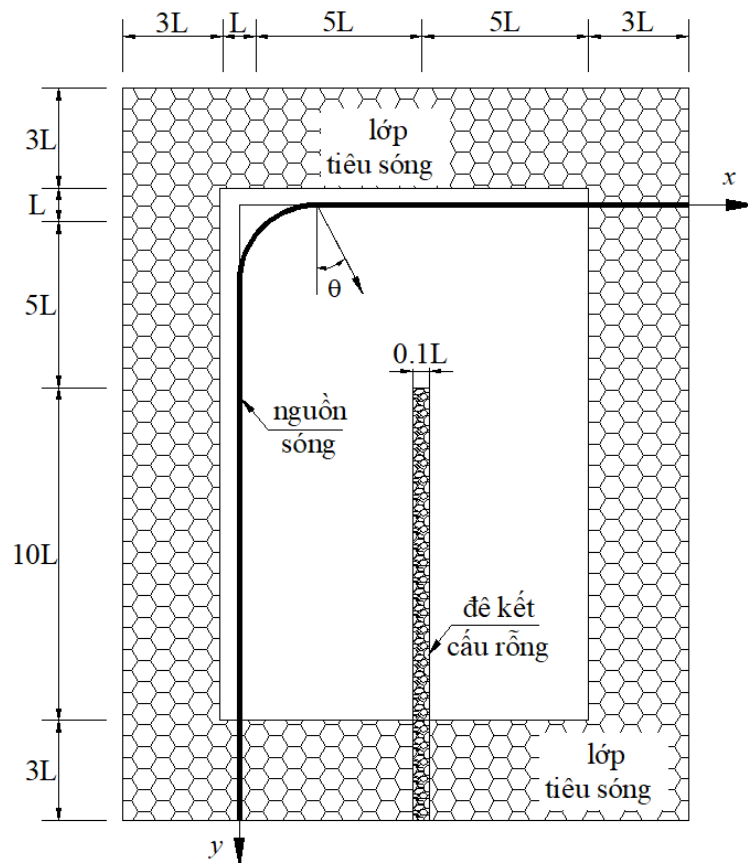




Hình 6. Chiều cao sóng Stem dọc theo đê tường đứng vách kín với 4 kịch bản khác nhau: a) C1, b) C2, c) C3, d) C4. Đường nét đứt: mô hình SWASH, chấm tròn đen: thí nghiệm từ [4], đường nét liền: nghiên cứu hiện tại.

3.3. Sóng Stem trước đê tường đứng kết cấu rỗng

Có thể thấy mô hình số hiện tại dự báo khá tốt sự phát triển của sóng Stem trước tường đứng, đặc biệt chính xác khi tính phi tuyến của sóng nhỏ. Do đó, trong phần này, khi mô phỏng sóng Stem trước đê tường đứng kết cấu rỗng, tác giả sử dụng trường hợp **C1** ($H_0/h = 0.036$) và **C3** ($H_0/h = 0.072$) với góc tới 10° và 30° . Miền tính toán được thể hiện như trên Hình 7. Do phía sau đê rỗng cần có vùng nước để sóng truyền qua nên đê rỗng được đặt vào giữa miền tính toán chứ không đặt vào biên miền tính toán như trường hợp đê tường đứng vách kín. Đê có bề rộng bằng $1/10$ chiều dài sóng, các đặc trưng độ rỗng của đê được sử dụng như sau: độ rỗng $\lambda = 0.44$, kích thước vật liệu $d = 2$ cm, hệ số cản dòng chảy tầng và rối lần lượt là $\alpha_l = 1,150$ và $\alpha_r = 2.7$, hệ số nhớt động học của nước $\nu = 1.004 \times 10^{-6}$ (m^2s^{-1}) và hệ số khối lượng nước kèm $\kappa = 0.4$. Xung quanh miền tính toán được bố trí các lớp tiêu sóng để triệt tiêu sóng phản xạ lại vào miền tính toán.



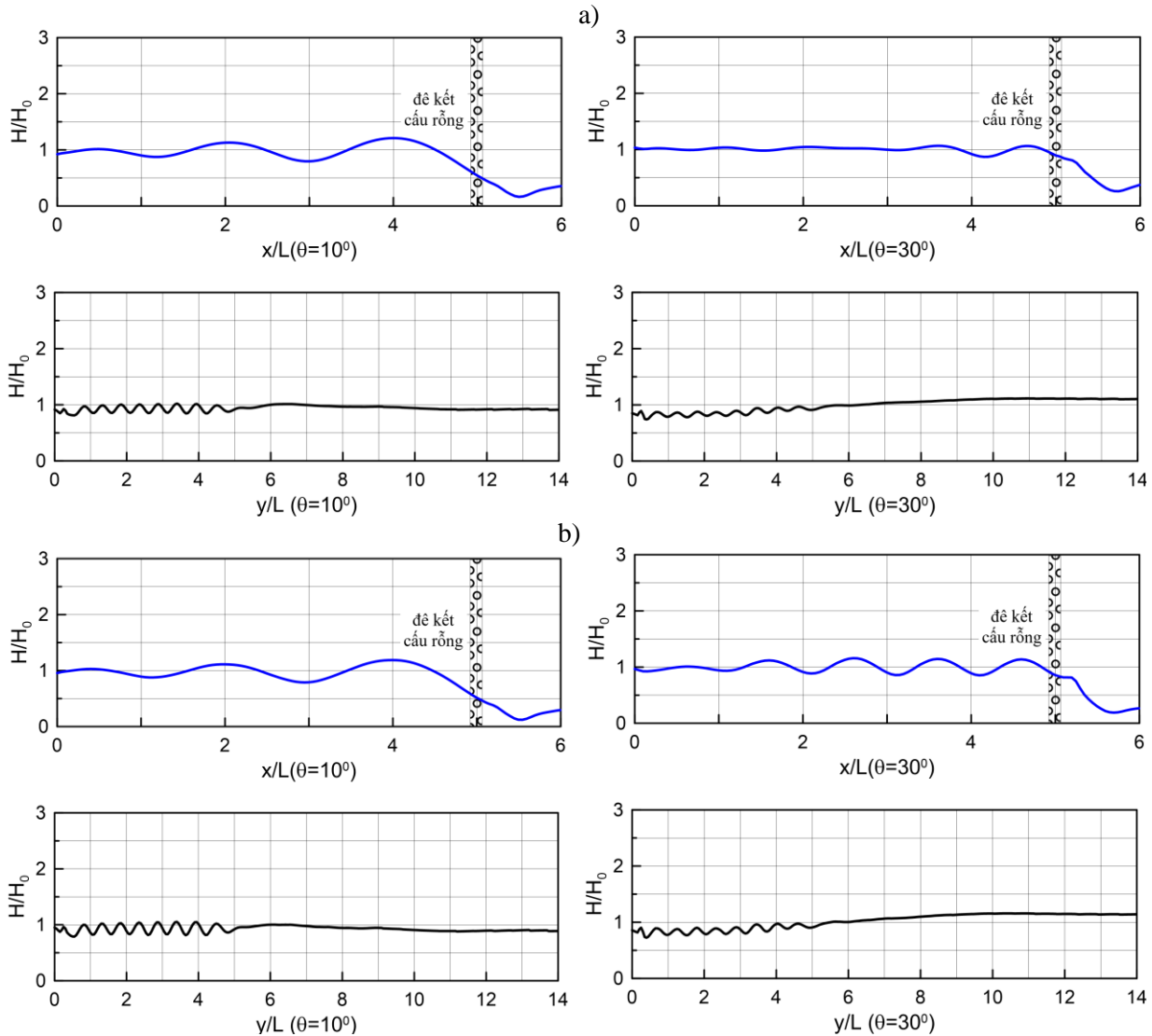
Hình 7. Miền tính toán cho trường hợp đê kết cấu rỗng.

Kết quả mô phỏng được thể hiện trên Hình 8. Do không có các số liệu thí nghiệm cũng như các mô hình khác để so sánh, kết quả từ mô hình hiện tại cho thấy sự phù hợp nhất định. Cũng cần lưu ý trong trường hợp có đê rỗng ($\lambda < 1$), mô hình hiện tại không cần sử dụng điều kiện biên xung quanh đê [10].

Các mặt cắt vuông góc với đê được lấy tại vị trí $y = 10L$. Ngay trước đê, $x = (3 \div 5)L$, chiều cao sóng dao động do sự xuất hiện của sóng Stem. Tuy nhiên chiều cao sóng trước đê không đáng kể do ảnh hưởng bởi sóng truyền qua đê kết cấu rỗng. Phía sau đê, $x = (5 \div 6)L$, chiều cao sóng suy giảm nhiều so với trước đê. Điều này khá hiển nhiên do có đê chắn ngay

phía trước. Tuy nhiên có thể thấy do ảnh hưởng của hiện tượng truyền sóng qua đê kết cấu rỗng mà sóng ngay phía sau đê vẫn xuất hiện.

Đối với các mặt cắt song song với đê (phía trước đê), có thể nhận thấy chiều cao sóng Stem tăng dần từ vị trí đầu đê ($y = 5L$) và phát triển trong khoảng 2 lần chiều dài sóng.



Hình 8. Chiều cao sóng Stem dọc theo đê kết cấu rỗng với 2 kịch bản khác nhau: a) C1, b) C3.

4. KẾT LUẬN

Bài báo này đã nghiên cứu về sự hình thành sóng Stem dọc theo đê chắn sóng tường đứng kết cấu rỗng áp dụng phương trình Boussinesq mở rộng cho sóng trong môi trường rỗng [10]. Khi sóng tới xiên góc gặp đê tường đứng vách kín, các kết quả mô phỏng từ mô hình hiện tại cho thấy sự phù hợp khá tốt với kết quả mô hình SWASH và số liệu thí nghiệm từ mô hình vật lý [4]. Khi sóng tới xiên góc gặp đê tường đứng kết cấu rỗng, các kết quả từ mô hình số hiện tại cho thấy có cùng xu hướng biến đổi chiều cao sóng dọc tường như trường hợp tường đứng vách kín. Như vậy sóng Stem vẫn xuất hiện phía trước đê tường đứng kết cấu rỗng dù chiều cao sóng nhỏ hơn so với trường hợp đê kết cấu tường đứng vách kín. Loại sóng này có thể ảnh hưởng tới vấn đề bồi xói ngay phía trước đê. Chính vì thế khi thiết kế các công trình đê tường

đứng vách kín cũng như đê tường đứng kết cấu rỗng cần lưu ý tới việc xuất hiện loại sóng Stem này trước công trình. Tuy nhiên, cũng cần có thêm các nghiên cứu về ảnh hưởng của góc sóng tới, độ rỗng đê tới sự phát triển của sóng Stem cũng như ảnh hưởng gây bồi tạo xói của loại sóng này phía trước đê chắn sóng tường đứng kết cấu rỗng.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.03-2019.338.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] P. H. Perroud, The solitary wave reflection along a straight vertical wall at oblique incidence, University of California, Berkeley, 1957.
- [2] S.-M. Kwon et al., Analysis of Stem Wave due to Long Breakwaters at the Entrance Channel, *J. Navig. Port Res.*, 41 (2017) 345–352. <https://doi.org/10.5394/KINPR.2017.41.5.345>
- [3] V. N. Vu, C. Lee, Solitary wave interaction with porous structures, in: *Procedia Eng.*, 116 (2015) 834–841. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.08.371>
- [4] S. B. Yoon et al., Laboratory and numerical experiments on stem waves due to monochromatic waves along a vertical wall, *Nonlinear Process. Geophys.*, 25 (2018) 521-535. <https://doi.org/10.5194/npg-25-521-2018>
- [5] C. H. Shin, S. B. Yoon, S. C. Oh, A Comparison of Numerical Models with Experimental Data for Stem Waves along a Vertical Wall due to Monochromatic Waves, in: *J. Coast. Res.*, 85 (2018) 1121-1125. <https://doi.org/10.2112/SI85-225.1>
- [6] T. Q. Tuấn, Thiết kế chức năng cho công trình giảm sóng, gây bồi để trồng rừng ngập mặn ở đồng bằng sông cửu long, in: *Hội Nghị Khoa Học Thường Niên Đại Học Thủy Lợi*, (2020), pp. 1–3.
- [7] T. Dao et al., Wave Damping due to Wooden Fences along Mangrove Coasts, *J. Coast. Res.*, 34 (2018) 1317–1327. <https://doi.org/10.2112/JCOASTRES-D-18-00015.1>
- [8] T. Mai et al., Porosity Effects on Wave Transmission Through a Bamboo Fence, in: *APAC 2019*, (2020) 1413-1418. https://doi.org/10.1007/978-981-15-0291-0_191
- [9] T. Thieu Quang, L. Mai Trong, Monsoon wave transmission at bamboo fences protecting mangroves in the lower mekong delta, *Appl. Ocean Res.*, 101 (2020) 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2020.102259>
- [10] V. N. Vu, C. Lee, T. H. Jung, Extended Boussinesq equations for waves in porous media, *Coast. Eng.*, 139 (2018) 85-97. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2018.04.023>
- [11] J. D. Fenton, A Fifth-Order Stokes Theory for Steady Waves, *J. Waterw. Port, Coastal, Ocean Eng.*, 111 (1985) 216-234. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-950x\(1985\)111:2\(216\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-950x(1985)111:2(216))
- [12] F. Ursell, The long-wave paradox in the theory of gravity waves, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 49 (1953) 658-694. <https://doi.org/10.1017/S0305004100028887>
- [13] C. Lee, S. B. Yoon, Internal generation of waves on an arc in a rectangular grid system, *Coast. Eng.*, 54 (2007) 357-368. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2006.11.004>
- [14] G. Kim, C. Lee, Internal generation of waves on an arced band, *Ocean Eng.*, 67 (2013) 77-88. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2013.03.008>
- [15] V. N. Vu, C. Lee, T. H. Jung, Internal generation of damped waves in linear shallow water equations, *Coast. Eng.*, 104 (2015) 13–25. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2015.07.004>