



MACROSCOPIC THERMAL BEHAVIOR OF LAMINATE COMPOSITES WITH ROUGH INTERFACE BETWEEN LAYERS

Tran Anh Tuan^{1,3*}, Nguyen Dinh Hai^{2,3}

¹Section of Bridge and Tunnel Engineering, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

²Section of Materials of Construction, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

³Research and Application Center for Technology in Civil Engineering (RACE), University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 24/03/2020

Revised: 27/5/2020

Accepted: 30/6/2020

Published online: 28/8/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.6.2>

* *Corresponding author*

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Abstract. The present work aims to determine the macroscopic thermal behavior of layered composites in which the interface between two neighboring layers undulates periodically along two directions in the plane normal to the layering direction. To overcome the difficulties arising from the presence of interfacial roughness, a two – scale homogenization method is proposed in the present work. First, at the mesoscopic scale the rough interface zone is homogenized as an equivalent interphase by using a numerical method based on the fast Fourier transform. Then, at the macroscopic scale, the effective thermal conductivity of the two-layered composite is estimated with the help of the classical homogenization theory of laminate composite. Finally, results obtained by this method are compared with corresponding numerical result given by finite element method.

Keywords: macroscopic thermal behavior, fast Fourier transform, laminate composite, two – scale homogenization method, rough interface.



ỨNG XỬ NHIỆT VĨ MÔ CỦA VẬT LIỆU TỔNG HỢP XÉP LỚP CÓ KÊ ĐẾN MẶT PHÂN GIỚI GỖ GHỀ GIỮA CÁC LỚP

Trần Anh Tuấn^{1,3*}, Nguyễn Đình Hải^{2,3}

¹Bộ môn Cầu hầm, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

²Bộ môn Vật liệu xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

³Trung tâm nghiên cứu và ứng dụng công nghệ xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 24/03/2020

Ngày nhận bài sửa: 27/5/2020

Ngày chấp nhận đăng: 30/6/2020

Ngày xuất bản Online: 28/8/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.6.2>

* Tác giả liên hệ

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Tóm tắt. Nghiên cứu này được thực hiện với mục đích xác định ứng xử nhiệt ở cấp độ vĩ mô của vật liệu xếp lớp trong đó mặt phân giới giữa hai lớp vật liệu là gợn sóng theo chu kỳ theo hai phương trong mặt phẳng vuông góc với phương xếp lớp. Để đồng nhất hoá được vật liệu xếp lớp có kể đến tính nhám của mặt phân giới, phương pháp đồng nhất hoá hai cấp độ được đề xuất trong nghiên cứu này. Đầu tiên ở cấp độ meso miền phân giới tuần hoàn sẽ được đồng nhất thành một lớp tương đương bằng cách sử dụng phương pháp số dựa trên biến đổi nhanh Fourier. Sau đó ở cấp độ vĩ mô, tính truyền nhiệt có hiệu của vật liệu tổng hợp hai lớp sẽ được xác nhận bằng cách sử dụng các lý thuyết cổ điển về vật liệu xếp lớp. Cuối cùng các kết quả nhận được bằng phương pháp này sẽ được so sánh với các kết quả thu được bởi phương pháp phần tử hữu hạn.

Từ khóa: ứng xử nhiệt vĩ mô, biến đổi nhanh Fourier, vật liệu tổng hợp xếp lớp, phương pháp đồng nhất hoá hai giai đoạn, mặt phân giới nhám.

© 2020 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Khi nghiên cứu các vật liệu tổng hợp nhiều thành phần, thông thường mặt phân giới giữa

các pha cấu thành nên vật liệu tổng hợp thường được giả sử là tron [1 - 4]. Tuy nhiên khi xem xét ở cấp độ vi mô giả thuyết này không còn đúng nữa, mà mặt phân giới giữa các pha sẽ trở nên gồ ghề [5, 6]. Do vậy để xác định tính truyền nhiệt có hiệu quả của vật liệu tổng hợp thì tính gồ ghề của mặt phân giới giữa các pha cấu thành cần phải được xem xét.

Trong ngành xây dựng công trình nói chung và xây dựng công trình giao thông nói riêng vật liệu xếp lớp là một loại vật liệu được sử dụng tương đối phổ biến. Khi được áp dụng vào các công trình thực tế, người ta xem vật liệu xếp lớp là đồng nhất và chỉ quan tâm đến ứng xử vĩ mô của nó. Ứng xử này phụ thuộc vào nhiều yếu tố như các tính chất, tỷ lệ thể tích và phân bố của các vật liệu thành phần. Ứng xử vĩ mô của vật liệu xếp lớp khi mặt phân giới giữa hai lớp là tron nhẵn có thể được xác định bằng nhiều phương pháp như giải tích, phương pháp phần tử hữu hạn [1- 4, 7, 8] ... Tuy nhiên khi mặt phân giới giữa các lớp là gồ ghề thì các phương pháp cổ điển nêu trên không còn hữu dụng nữa. Trong nghiên cứu này ta sẽ quan tâm đến việc xác định tính chất truyền nhiệt vĩ mô của vật liệu xếp lớp có xét tới mặt phân giới giữa hai lớp vật liệu là gồ ghề (gai): cấu trúc gồ ghề có dạng trụ được bố trí tuần hoàn. Để đồng nhất hoá được vật liệu này một mô hình đồng nhất hoá hai cấp độ (Two scale homogenization method - TSHM) [5, 6] sẽ được triển khai, ở cấp độ meso (trung bình) một mô hình bán giải tích dựa trên biến đổi nhanh Fourier [8 - 10] sẽ được thực hiện để đồng nhất hoá miền phân giới gồ ghề, sau khi miền phân giới gồ ghề đã được đồng nhất hoá ta coi nó là một lớp tương đương, lúc này vật liệu tổng hợp được coi là ba lớp xếp chồng lên nhau. Ở cấp độ vĩ mô ta sẽ áp dụng các mô hình giải tích cổ điển [1, 3, 4] để xác định tính truyền nhiệt có hiệu quả của vật liệu xếp lớp.

2. MÔ TẢ BÀI TOÁN

Vật liệu tổng hợp dẫn nhiệt Ω được xem xét ở nghiên cứu này bao gồm hai vật liệu $\Omega^{(1)}$ và $\Omega^{(2)}$ xếp chồng, miền phân giới gồ ghề giữa hai lớp vật liệu được kí hiệu là $\omega^{(c)}$ với cấu trúc gồ ghề dạng trụ được bố trí tuần hoàn như Hình 1. Cả hai vật liệu cấu thành nên vật liệu tổng hợp đều được coi là truyền nhiệt đẳng hướng $\mathbf{K}^{(i)} = k_i I$. Phương trình truyền nhiệt trong mỗi pha thành phần của vật liệu tổng hợp được miêu tả bởi định luật Fourier [5, 6]:

$$\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} \nabla \theta^{(i)} \quad (1)$$

Trong đó $\mathbf{q}^{(i)}$, $\mathbf{K}^{(i)}$ và $\theta^{(i)}$ lần lượt là vector dòng nhiệt, tensor hệ số dẫn nhiệt và nhiệt độ trong tâm i với $i = 1, 2, 3$. Vector mật độ nhiệt được định nghĩa bởi công thức:

$$\mathbf{e}^{(i)} = -\nabla \theta^{(i)} \quad (2)$$

Ở trạng thái ổn định (nhiệt độ không đổi theo thời gian) và không có nguồn phát nhiệt, vector dòng nhiệt $\mathbf{q}^{(i)}$ phải thoả mãn phương trình cân bằng năng lượng:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^{(i)} = 0 \quad (3)$$

với $\rho_c^{(i)}$ là nhiệt dung riêng của vật liệu i có đơn vị là J.K-1.m-3 và P là nguồn nhiệt có đơn vị W.m-3. Hệ số dẫn nhiệt của các vật liệu trong miền phân giới $\omega^{(c)}$ được biểu diễn như sau

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \chi^{(i)}(\mathbf{x}) \mathbf{K}^{(1)} + \left[1 - \sum_{i=1}^N \chi^{(i)}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{K}^{(2)} \quad (4)$$

trong đó $\mathbf{K}^{(\alpha)}$ với $\alpha = 1, 2$ là tensor hệ số dẫn nhiệt của hai vật liệu cấu thành nên vật liệu tổng hợp. $\chi^{(i)}(\mathbf{x})$ là hàm đặc trưng của mỗi pha $1(1 \leq i \leq N)$ đặc trưng bởi miền $\Omega^{(i)}$, hàm này có đặc điểm sau:

với nhân tuần hoàn \mathcal{U} được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega \mid -\lambda_\alpha \leq x_\alpha \leq \lambda_\alpha, -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2} \right\} \quad (10)$$

với $\alpha = 1, 2$; $2\lambda_1$ và $2\lambda_2$ là kích thước của nhân tuần hoàn trong mặt phẳng vuông góc với phương dọc trục và h là chiều cao trụ, kích thước này phải đủ lớn so với λ_α .

Ở đây ta đưa ra khái niệm “môi trường đối chứng” với tensor đàn hồi $\mathbf{K}^{(0)}$, đồng thời đặt $\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}^{(0)}$, phương trình (3) viết lại như sau:

$$\nabla \cdot [(\Delta\mathbf{K} + \mathbf{K}^{(0)})\mathbf{e}] = 0 \quad (11)$$

vector mật độ nhiệt $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ có thể được tách thành hai phần như sau

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^0 + \mathbf{e}^*(\mathbf{x}) \quad (12)$$

trong đó $\mathbf{e}^*(\mathbf{x})$ là vector mật độ nhiệt nhiễu tuần hoàn, trường nhiệt độ liên hệ với vector mật độ nhiệt nhiễu tuần hoàn được ký hiệu là $\theta^*(\mathbf{x})$ theo phương trình (12). Thay phương trình (12) vào (11) ta được

$$\nabla \cdot [\mathbf{K}^{(0)}\nabla\theta^*(\mathbf{x})] + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = 0 \quad (13)$$

với

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \Delta\mathbf{K}[\mathbf{E}^0 + \mathbf{e}^*(\mathbf{x})] = [\mathbf{K} - \mathbf{K}^{(0)}] \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

là trường phân cực. Áp dụng biến đổi nhanh Fourier cho các trường nhiệt độ, phân cực và mật độ nhiệt như sau:

$$\theta^*(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{N_k} \hat{\theta}^*(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{N_k} \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{e}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{N_k} \hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \quad (15)$$

trong phương trình (15) ta có $i = \sqrt{-1}$ là số ảo, và $\hat{\theta}^*(\boldsymbol{\xi})$, $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi})$, $\hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi})$ lần lượt là các biến đổi Fourier rời rạc của $\theta^*(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, $\mathbf{e}(\mathbf{x})$; $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, 0) = \left(\frac{n_1\pi}{\lambda_1}, \frac{n_2\pi}{\lambda_2}, 0\right)$ với n_1 và $n_2 = -N_{k+1}, -N_{k+2}, \dots, 0, 1, \dots, N_k$ là một vector sóng rời rạc 2D, tổng của nó chính là tất cả các vector sóng rời rạc và bằng $2N_k \times 2N_k$. Thay biểu thức (15) vào phương trình (13) ta có

$$\sum_{\boldsymbol{\xi}=1}^{N_k} (\xi_m K_{mj}^{(0)} \xi_j) \hat{\theta}^*(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} + \sum_{\boldsymbol{\xi}=1}^{N_k} i \xi_m \hat{\tau}_m(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} = 0 \quad (16)$$

Giải phương trình (16) ta được:

$$\hat{\theta}^*(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{i \boldsymbol{\xi}}{\boldsymbol{\xi} \mathbf{K}^{(0)} \boldsymbol{\xi}} \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}) \quad (17)$$

Mặt khác ta lại có $\hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi}) - \hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{\mathbf{e}}^*(\boldsymbol{\xi}) = -i \boldsymbol{\xi} \hat{\theta}^*(\boldsymbol{\xi})$ với

$$\hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \mathbf{E} & \text{nếu } \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{nếu } \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dẫn tới}$$

$$\hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) + \hat{\Gamma}^{(0)}(\boldsymbol{\xi})\hat{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\xi}) \quad (18)$$

với

$$\hat{\Gamma}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}}{\boldsymbol{\xi} \mathbf{K}^{(0)} \boldsymbol{\xi}} \quad (19)$$

là biến đổi Fourier của toán tử Green cho bài toán nhiệt.

Từ các phương trình (4), (14) và (18) trường phân cực nhiễu trong không gian Fourier được xác định như sau:

$$\hat{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{K}^{(2)} - \mathbf{K}^{(0)})\hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi}) + (\mathbf{K}^{(1)} - \mathbf{K}^{(2)}) \sum_{i=1}^N [\hat{\chi}^{(i)} * \hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi})] \quad (20)$$

với ký hiệu * là tích “convolution” [8] trong không gian Fourier, biến đổi Fourier $\hat{\chi}^{(i)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')$ của hàm $\chi^{(i)}(\mathbf{x})$ hay còn gọi là hàm hình dạng và kích thước của pha i được đưa ra ở biểu thức dưới đây

$$\hat{\chi}^{(i)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') = \frac{e^{-i(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') \cdot \mathbf{x}^{(i)}}}{|U|} \int_{\omega^{(i)}} e^{-i(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') \cdot \bar{\mathbf{x}}} d\bar{\mathbf{x}} \quad (21)$$

Ở đây, vector sóng rời rạc $\boldsymbol{\xi}'$ được định nghĩa bởi $\boldsymbol{\xi}' = (\xi'_1, \xi'_2, 0) = \left(\frac{n'_1 \pi}{\lambda_1}, \frac{n'_2 \pi}{\lambda_2}, 0\right)$ với n'_1 và $n'_2 = -N_{k+1}, -N_{k+2}, \dots, 0, 1, \dots, N_k$

Trong không gian Fourier, vector mật độ nhiệt có dạng

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{E}} + \hat{\Gamma}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ (\mathbf{K}^{(2)} - \mathbf{K}^{(0)})\hat{\mathbf{e}} + [\mathbf{K}^{(1)} - \mathbf{K}^{(2)}] \sum_{i=1}^N \hat{\chi}^{(i)} * \hat{\mathbf{e}} \right\} \quad (22)$$

Tương ứng với đó, vector dòng nhiệt trong không gian Fourier sẽ nhận được thông qua quan hệ (1):

$$\hat{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{K}^{(2)}\hat{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi}) + (\mathbf{K}^{(1)} - \mathbf{K}^{(2)}) \sum_{i=1}^N [\hat{\chi}^{(i)} * \hat{\mathbf{e}}](\boldsymbol{\xi}) \quad (23)$$

Để xác định trường nghiệm của nhiệt độ θ , ta sẽ giải phương trình (22) trong không gian Fourier theo thuật toán sau:

- Tại vòng lặp đầu tiên $i = 1$ ta gán:

$$\hat{\mathbf{e}}^1(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}), \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{q}}^1(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{K}^{(2)}\hat{\mathbf{e}}^1(\boldsymbol{\xi}) + (\mathbf{K}^{(1)} - \mathbf{K}^{(2)}) \sum_{i=1}^N [\hat{\chi}^{(i)} * \hat{\mathbf{e}}^1](\boldsymbol{\xi}) \quad (25)$$

- Vòng lặp $i + 1$:

Với các giá trị $\mathbf{e}^i(\xi), \mathbf{q}^i(\xi)$ là đã biết,

$$\mathbf{e}^{i+1} = \hat{\mathbf{E}} + \hat{\Gamma}^{(0)}(\xi) \left\{ (\mathbf{K}^{(2)} - \mathbf{K}^{(0)}) : \mathbf{e}^i + [\mathbf{K}^{(1)} - \mathbf{K}^{(2)}] \sum_{i=1}^N \hat{\chi}^{(i)} * \mathbf{e}^i \right\} \quad (26)$$

$$\mathbf{q}^{i+1}(\xi) = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{e}^{i+1}(\xi) + (\mathbf{K}^{(1)} - \mathbf{K}^{(2)}) \sum_{i=1}^N [\hat{\chi}^{(i)} * \mathbf{e}^{i+1}](\xi) \quad (27)$$

Kiểm tra độ hội tụ

- Vòng lặp sẽ dừng lại khi

$$\frac{\|\hat{\mathbf{q}}^i(\xi) - \hat{\mathbf{q}}^{i-1}(\xi)\|}{\|\hat{\mathbf{q}}^i(\xi)\|} < \delta \quad (28)$$

Với δ là độ chênh lệch giữa bước tính liên tiếp thứ i và $i - 1$, kết quả thứ i được chấp nhận khi δ đủ nhỏ. Trong nghiên cứu này ta chọn δ có giá trị là 0.0001.

Nhờ việc áp dụng biến đổi nhanh Fourier thì miền phân giới gồ ghề tuần hoàn giữa hai lớp vật liệu đã được đồng nhất hoá thành một lớp tương đương với hệ số dẫn nhiệt là $\mathbf{K}^{(c)}$. Từ đây ta coi vật liệu tổng hợp được cấu thành bởi 3 lớp vật liệu xếp chồng lên nhau theo phương z .

3.2. Cấp độ vĩ mô – Xác định hệ số dẫn nhiệt có hiệu của vật liệu tổng hợp

Vật liệu tổng hợp với ba lớp vật liệu xếp chồng lên nhau có hệ số dẫn nhiệt lần lượt là $\mathbf{K}^{(1)}, \mathbf{K}^{(c)}, \mathbf{K}^{(2)}$ theo chiều từ dưới lên trên. Trong đó $\mathbf{K}^{(c)}$ là hệ số dẫn nhiệt của miền phân giới đã xác định được ở mục 3.1. Áp dụng lý thuyết giải tích đồng nhất hoá cổ điển của vật liệu dẫn nhiệt xếp lớp. Nghiệm giải tích các phần tử của tensor hệ số truyền nhiệt có hiệu bậc hai của vật liệu tổng hợp được đưa ra dưới đây [1, 4, 6]

$$K_{33}^* = \langle K_{33}^{-1} \rangle^{-1} \quad (29)$$

$$K_{22}^* = \langle K_{22} \rangle + \langle K_{23} K_{33}^{-1} \rangle^2 \langle K_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle K_{23}^2 K_{33}^{-1} \rangle \quad (30)$$

$$K_{11}^* = \langle K_{11} \rangle + \langle K_{13} K_{33}^{-1} \rangle^2 \langle K_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle K_{13}^2 K_{33}^{-1} \rangle \quad (31)$$

$$K_{12}^* = \langle K_{12} \rangle + \langle K_{13} K_{33}^{-1} \rangle \langle K_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle K_{33}^{-1} K_{23} \rangle - \langle K_{13} K_{33}^{-1} K_{23} \rangle \quad (32)$$

$$K_{13}^* = \langle K_{13} K_{33}^{-1} \rangle \langle K_{33}^{-1} \rangle^{-1} \quad (33)$$

$$K_{23}^* = \langle K_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle K_{33}^{-1} K_{23} \rangle \quad (34)$$

với ký hiệu $\langle \blacksquare \rangle$ thể hiện trung bình theo thể tích của các pha cấu thành nên vật liệu tổng hợp, cụ thể:

$$\langle \blacksquare \rangle = \frac{1}{\delta_1 + \delta_c + \delta_2} \left(\delta_1 \int_{\hat{\Omega}^{(1)}} \blacksquare d\hat{\Omega}^{(1)} + \delta_c \int_{\omega^{(c)}} \blacksquare d\omega^{(c)} + \delta_2 \int_{\hat{\Omega}^{(2)}} \blacksquare d\hat{\Omega}^{(2)} \right) \quad (35)$$

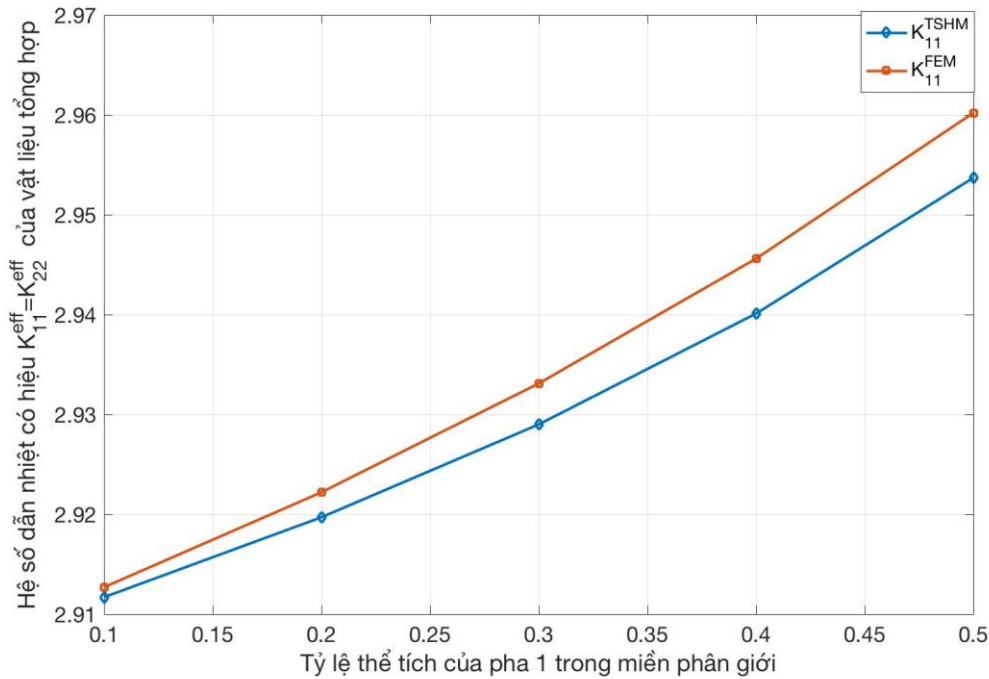
4. VÍ DỤ SỐ

Để minh họa cho các kết quả thu được từ phương pháp đồng nhất hoá hai cấp độ. Ở đây ta nghiên cứu một vật liệu tổng hợp hai pha, các pha này đều có có tính chất dẫn nhiệt đẳng hướng. Ten xơ hệ số dẫn nhiệt của các pha 1 và 2 lần lượt được chọn như sau: $\mathbf{K}^{(1)} = k_1 \mathbf{I}$, $\mathbf{K}^{(2)} = k_2 \mathbf{I}$, trong đó $k_1 = 5$, $k_2 = 1$. Chiều dày vùng chuyển tiếp được cố định $\delta_c = 1$, Chiều cao của hai lớp trên và dưới là như nhau chọn $\delta_1 = \delta_2 = 10$.

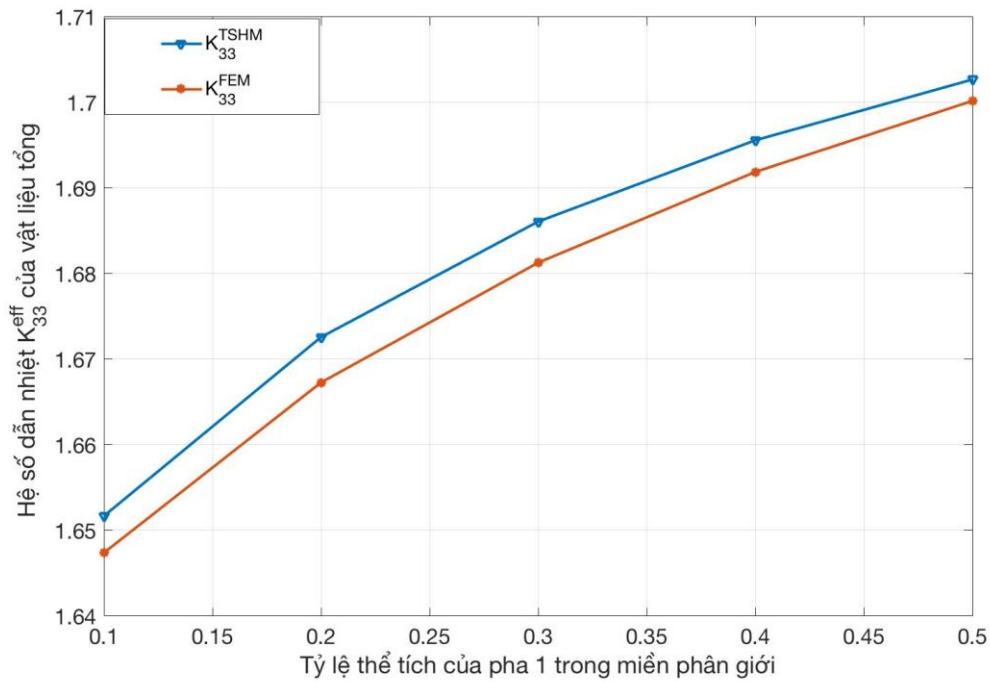
Trong miền phân giới ta cho tỷ lệ thể tích của pha 1 thay đổi lần lượt là 10, 20, 30, 40 và 50% so với thể tích toàn miền. Các kết quả thu được từ phương pháp đồng nhất hoá hai cấp độ (TSHM) được so sánh với các kết quả tính theo phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) được liệt kê ở Bảng 1 đồng thời được thể hiện ở Hình 2 và Hình 3 dưới đây.

Bảng 1. Giá trị kết quả các hệ số dẫn nhiệt vĩ mô của vật liệu tổng hợp theo tỷ lệ thể tích pha 1.

Tỷ lệ thể tích pha 1 (%)	10	20	30	40	50
K_{11}^{TSHM}	2,9127	2,9222	2,9331	2,9456	2,9602
K_{11}^{FEM}	2,9117	2,9197	2,929	2,9401	2,9537
K_{33}^{TSHM}	1,6474	1,6673	1,6813	1,6919	1,7002
K_{33}^{FEM}	1,6517	1,6726	1,6861	1,6956	1,7027



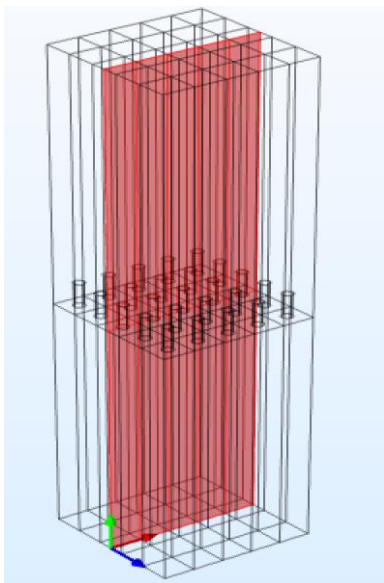
Hình 2. Ảnh hưởng của tỷ lệ pha 1 trong miền phân giới tới $K_{11}^{eff} = K_{22}^{eff}$ của Vật liệu tổng hợp.



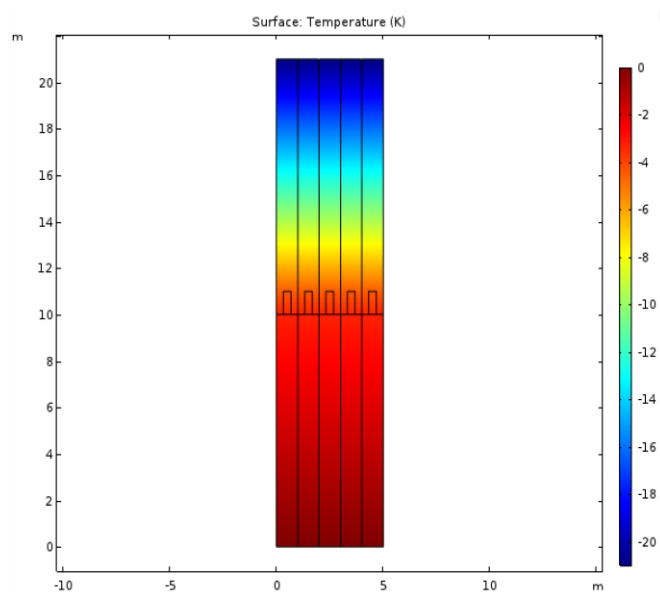
Hình 3. Ảnh hưởng của tỷ lệ pha 1 trong miền phân giới tới K_{33}^{eff} của vật liệu tổng hợp.

Quan sát các kết quả thu được bởi phương pháp đồng nhất hoá hai cấp độ với kết quả thu được từ phương pháp phần tử hữu hạn cho thấy các kết quả gần như trùng khớp cho thấy tính khả dụng của phương pháp TSHM.

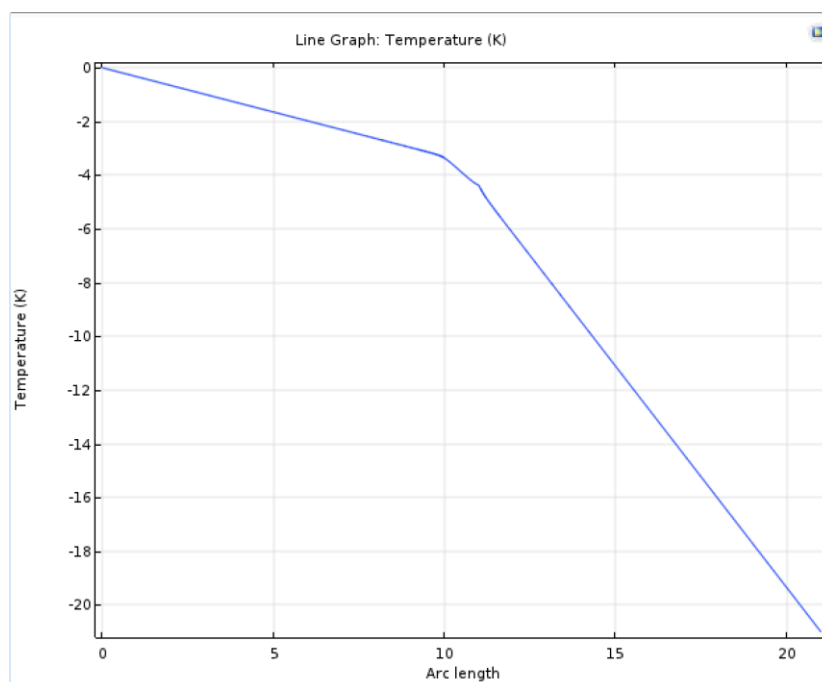
Khi ta áp một gradient nhiệt độ đơn vị theo phương z ($\nabla\theta = 1$). Cắt vật liệu tổng hợp bởi một mặt cắt như Hình 4, dải nhiệt phân bố trên mặt cắt này được trình bày ở hình 5 dưới đây. Biến thiên nhiệt độ theo phương z thể hiện ở Hình 6. Theo phương này sự truyền nhiệt không còn là tuyến tính nữa mà là phi tuyến do có ảnh hưởng của miền phân giới.



Hình 4. Mặt cắt S_1 .

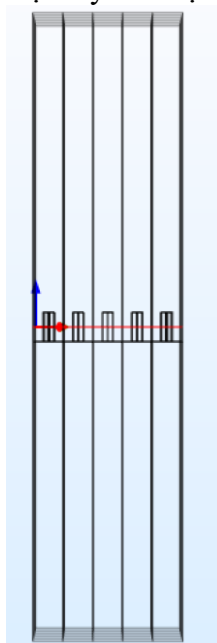


Hình 5. Biểu đồ phân bố trường nhiệt độ của mặt S_1 .

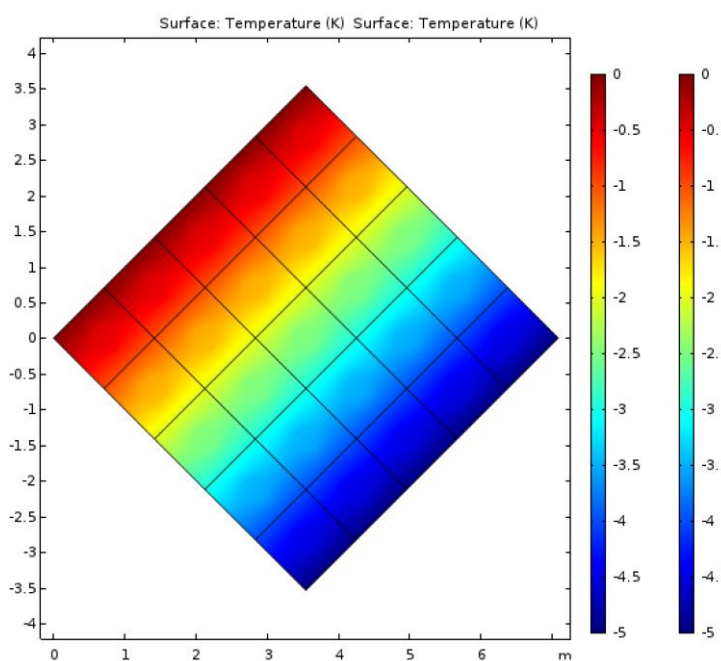


Hình 6. Biến thiên nhiệt độ dọc theo mặt cắt S1.

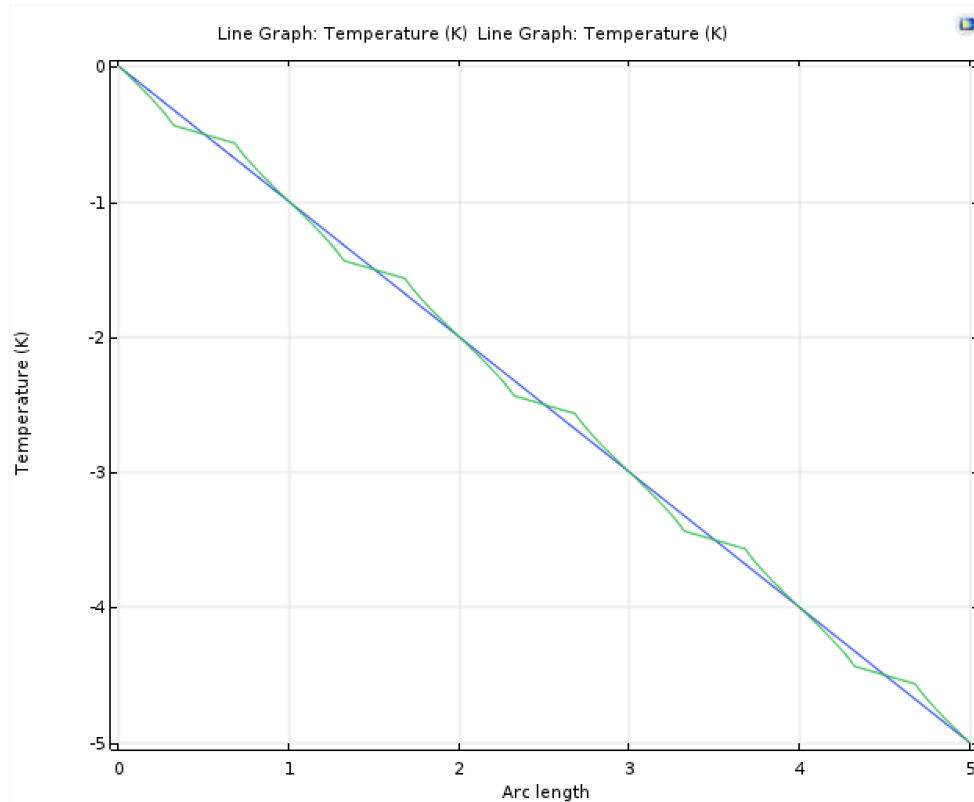
Tương tự ta áp một gradient nhiệt độ đơn vị theo phương x (hoặc y). Cắt vật liệu tổng hợp bởi mặt cắt S2 qua miền phân giới như Hình 7. Biểu đồ trường nhiệt qua mặt cắt S2 được thể hiện ở Hình 8. Biến thiên nhiệt độ khi đi qua đường thuộc S2 cho thấy ảnh hưởng của mặt phân giới tới sự truyền nhiệt được mô tả như Hình 9.



Hình 7. Mặt cắt S2.



Hình 8. Biểu đồ phân bố nhiệt trên mặt S2.



Hình 9. Biến thiên nhiệt độ theo mặt cắt S2.

Quan sát các kết quả thể hiện ở hình 8 và 9 cho thấy nhiệt độ khi chạy qua miền phân giới tại mặt cắt đi qua miền theo phương x hoặc y sẽ bị gây nhiễu do ảnh hưởng của miền phân giới chứ không còn là tuyến tính nữa, sự nhiễu này cũng là tuần hoàn. Khi mặt cắt không đi qua miền phân giới thì nhiệt độ vẫn là tuyến tính do không có ảnh hưởng của miền phân giới.

5. KẾT LUẬN

Ứng xử nhiệt vĩ mô của vật liệu tổng hợp hoàn toàn có thể xác định được bằng phương pháp đồng nhất hoá giải tích hai cấp độ TSHM đã trình bày trong nghiên cứu, Ở cấp độ thứ nhất – cấp độ meso, miền phân giới với cấu trúc gồ ghề tuần hoàn đã được đồng nhất hoá dựa trên các biến đổi nhanh Fourier và miền này được thay thế bằng một miền đồng nhất tương đương. Ở cấp độ vĩ mô, vật liệu tổng hợp khảo sát được coi như trở thành vật liệu xếp lớp thuần túy. Do đó, ta hoàn toàn có thể áp dụng phương pháp đồng nhất hoá vật liệu xếp lớp để xác định tensor hệ số dẫn nhiệt có hiệu của vật liệu xếp lớp. Các kết quả giải tích của phương pháp đồng nhất hoá hai cấp độ đã được so sánh với phương pháp phần tử hữu hạn và đã khẳng định tính phù hợp của phương pháp.

Các kết quả thu được cũng chỉ ra rằng mặt phân giới sẽ ảnh hưởng đến đặc tính tuyến nhiệt của vật liệu, cụ thể theo phương x_3 sự truyền nhiệt không còn là đẳng hướng tại mọi mặt cắt. Trong mặt phẳng x_1Ox_2 vật liệu vẫn là truyền nhiệt đẳng hướng khi nó không đi qua miền phân

giới. Tuy nhiên khi mặt cắt đi qua miền phân giới nó sẽ không còn là đẳng hướng nữa mà sẽ bị nhiễu loạn tuần hoàn theo cách bố trí vật liệu tại miền phân giới.

Các kết quả nghiên cứu này có thể được mở rộng cho các ứng xử khác của vật liệu như đàn hồi, đàn dẻo, đàn nhớt. Miền phân giới có thể có cấu tạo khác như răng cưa, phân bố ngẫu nhiên...

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. W. Milton, The theory of composite, Cambridge Monographs on applied and computational mathematics, Cambridge University Press, UK, 2004.
- [2]. BV. Trần, TK. Nguyễn, AT. Trần, ĐH. Nguyễn, Đồng nhất vật liệu nhiều thành phần - Ứng xử tuyến tính, Xuất bản lần 1, Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội, 2019.
- [3]. P. C. Chou, J. Carleone, C. M. Hsu, Elastic constants of layered media, Journal of computational material, 6 (1972) 80 – 93. <https://doi.org/10.1177/002199837200600107>
- [4]. D.H. Nguyen, A.T. Tran, Tính chất đàn hồi hiệu quả của vật liệu xếp lớp với mặt phân giới hoàn hảo, Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải, 70 (2019) 451 – 459. <https://doi.org/10.25073/tcsj.70.5.9>
- [5]. H. LeQuang, D.H. Nguyen, H.T. Le, Q.C. He, Determination of the effective conductive properties of composites with curved oscillating interfaces by a two-scale homogenization procedure. Computational Materials Science, 94 (2014) 150 – 162. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.03.014>
- [6]. D.H. Nguyen, Analyse asymptotique, modélisation micromécanique et simulation numérique des interfaces courbées rugueuses dans des matériaux hétérogènes, PhD Thesis, Université Paris – Est, France, 2014.
- [7]. W. Pryor, Multiphysics Modeling Using Comsol: A First Principles Approach, John Bartlett publisher, UK, 2011.
- [8] A.T. Tran, LeQuang. H, Q.C. He, Computation of the size-dependent elastic moduli of nano-firous and nano-porous composites by FFT, Composites Science and Technology, 135 (2016) 159 – 171. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2016.09.012>
- [9]. Bonnet. G, Effective properties of elastic periodic composite media with fibers, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 55 (2007) 881-899. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.11.007>
- [10] J. Michel, H.Moulinec, P.Suquet, Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 172 (1999) 109 – 143. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00227-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00227-8)