Transport and Communications Science Journal, Vol 71, Issue 05 (06/2020), 615-625

Transport and Communications Science Journal

EFFECTIVE ELASTIC PROPERTIES OF FIBER REINFORCED COMPOSITE WITH UNIDIRECTIONAL CYLINDRICAL FIBERS PERIODICALLY DISTRIBUTED

Hai Nguyen Dinh[1,3,*], Tuan Tran Anh[2,3]

[1]Section of Building Materials, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

[2]Section of Bridge and Tunnel Engineering Departement, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

[3]Research and application center for technology in civil engineering (RACE) - University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article
Received: 26/2/2020
Revised: 19/5/2020
Accepted: 21/5/2020
Published online: 28/6/2020
https://doi.org/10.25073/tcsj.71.5.13
[*] *Corresponding author*
Email: nguyendinhhai.1986@utc.edu.vn

Abstract. The purpose of this work is to determine the effective elastic properties of fiber reinforced composite with unidirectional cylindrical fibers periodically distributed accounting the perfection of the interfaces between fibers and matrix in case of squared fiber distribution. The local solution of the periodic elasticity problem is found in Fourier space by using the Green operators and closed form expressions of factor depending on the fiber volume fraction – method based on the fast Fourier transform (FFT) of the solution. The numerical results obtained by FFT method are finally compared with an analytical solution derived from the generalized self – consistent approximations and Voigt – Reuss bounds.

Keywords: Fast Fourier transform, fiber reinforced composite, effective elastic properties, periodic distribution.

© 2020 University of Transport and Communications

Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải

XÁC ĐỊNH TÍNH CHẤT ĐÀN HỒI CÓ HIỆU CỦA COMPOSITE GIA CƯỜNG CỐT SỢI HÌNH TRỤ PHÂN BỐ TUẦN HOÀN THEO MỘT PHƯƠNG

Nguyễn Đình Hải[1,3,*], Trần Anh Tuấn[2,3]

[1]Bộ môn Vật liệu xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

[2]Bộ môn Cầu hầm, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

[3]Trung tâm nghiên cứu và ứng dụng công nghệ trong xây dựng (RACE), Trường Đại học Giao thông Vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học
Ngày nhận bài: 26/2/2020
Ngày nhận bài sửa: 19/5/2020
Ngày chấp nhận đăng: 21/5/2020
Ngày xuất bản Online: 28/6/2020
https://doi.org/10.25073/tcsj.71.5.13

** Tác giả liên hệ*
Email: nguyendinhhai.1986@utc.edu.vn

Tóm tắt. Nghiên cứu này được thực hiện nhằm xác định tính chất đàn hồi có hiệu của vật liệu tổng hợp có chứa cốt sợi được phân bố tuần hoàn vuông và chạy dọc theo một phương trong trường hợp liên kết giữa cốt sợi và pha nền là hoàn hảo. Nghiệm ứng suất, biến dạng cục bộ của bài toán đàn hồi tuần hoàn sẽ được xác định trong không gian Fourier thông qua việc sử dụng các toán tử Green và các biểu thức chính xác của yếu tố phụ thuộc vào tỷ lệ thể tích của cốt sợi – đây chính là phương pháp dựa trên biến đổi nhanh Fourier (FFT). Các kết quả số nhận được bằng phương pháp FFT sẽ được so sánh với các nghiệm giải tích tính theo phương pháp Tự tương hợp tổng quát và các biên Voigt – Reus.

Từ khóa: Biến đổi nhanh Fourier, Composite gia cường cốt sợi, tính chất đàn hồi có hiệu, phân bố tuần hoàn.

© 2020 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ngày nay vật liệu composite gia cường cốt sợi (Fiber reinforced composite - FRC) được nghiên cứu và áp dụng ngày càng phổ biến rộng rãi trong tất cả các lĩnh vực của đời sống nhờ các ưu điểm mà nó mang lại. Do vậy việc nghiên cứu tính chất vĩ mô (tính chất có hiệu) của composite được nhiều nhà khoa học quan tâm và đã cho ra đời nhiều mô hình xấp xỉ khác nhau

[1 - 5] dựa trên nghiệm của bài toán Eshelby [6] hoặc phương pháp số [5] dựa trên phần tử hữu hạn để dự báo ứng xử tổng thể của vật liệu composite nhằm mục đích tối ưu hoá trong việc chế tạo vật liệu mới. Các mô hình xấp xỉ kể trên thu được chủ yếu thông qua các biến đổi giải tích toán học dựa trên các thông số đầu vào của vật liệu như hình dạng, phân bố, mật độ và liên kết giữa các pha trong vật liệu. Đối với các vật liệu FRC với cấu trúc phân bố tuần hoàn cấu thành từ các phần tử giống hệt nhau (các nhân tuần hoàn) chứa đầy đủ các thông tin cơ lý và hình học của các pha thành phần, thì thay vì phải nghiên cứu cả cấu trúc với khối lượng tính toán lớn thì ta chỉ cần nghiên cứu một nhân tuần toàn qua đó giảm được khối lượng tính toán. Trong trường hợp này mỗi nhân tuần hoàn được coi là một phần tử đại diện đặc trưng – REV.

Để nghiên cứu ứng xử của vật liệu có cấu trúc tuần hoàn thì ngoài các phương pháp giải tích xấp xỉ kể trên và phương pháp phần tử hữu hạn với khối lượng tính toán lớn, phức tạp thì chúng ta có thể áp dụng phương pháp số dựa trên biến đổi nhanh Fourier (FFT) được đề xuất bởi [7] và sau đó đã được phát triển phổ biến [5, 8 - 10] với các ưu điểm như: giải quyết bài toán trên một nhân tuần hoàn thay vì trên toàn miền vật liệu, thực hiện các tính toán số ít phức tạp, độ chính xác cao.

Trong nghiên cứu này, phương pháp FFT sẽ được áp dụng để xác định tính chất đàn hồi có hiệu của FRC hai pha với pha sợi được xếp song song và tuần hoàn theo phương vuông góc với sợi. Bài báo này được bố cục thành 5 phần: phần 2 sẽ giới thiệu các phương trình cơ bản của bài toán, phương pháp biến đổi nhanh Fourier được trình bày ở phần 3, trong phần 4 sẽ đưa ra các ví dụ số áp dụng phương pháp FFT đồng thời so sánh các kết quả thu được với mô hình Christensen and Lo [5, 11] và các biên Voigt-Reuss [11, 12], kết luận và kiến nghị của nghiên cứu sẽ được trình bày trong phần 5.

2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN

Vật liệu composite gia cường cốt sợi (FRC) được xem xét ở nghiên cứu này bao gồm một pha nền được gia cường bằng các sợi phân bố dọc theo một phương và sắp xếp một cách tuần hoàn (Hình 1.). Gọi Ω là một phần tử thể tích đại diện (Representative elementary volume - RVE) bao gồm một pha nền $\Omega^{(2)}$ trong đó pha sợi $\Omega^{(1)}$ được phân bố tuần hoàn. Các vật liệu cấu thành nên FRC đều được giả sử là đàn hồi tuyến tính và đồng nhất. Trong hệ tọa độ Descarte (x_1, x_2, x_3) liên kết với một cơ sở trực giao ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) với vec tơ đơn vị $\mathbf{e}_3$ là hướng của các sợi, ứng xử đàn hồi của pha nền và sợi tuân theo định luật Hook:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{x}) = \mathbb{L}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

trong đó $\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{x})$ với i = 1, 2 lần lượt là ten xơ ứng suất và biến dạng trong vật liệu i tại toạ độ $\mathbf{x}$ và được xác định thông qua vec tơ chuyển vị $\mathbf{u}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{x})$ theo công thức sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left[\nabla \mathbf{u}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{x}) + \nabla^T \mathbf{u}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{x})\right] \tag{2}$$

Ten xơ đàn hồi cục bộ được biểu diễn dưới dạng

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \chi^{(i)}(\mathbf{x}) \mathbb{L}^{(1)} + \left[1 - \sum_{i=1}^{N} \chi^{(i)}(\mathbf{x})\right] \mathbb{L}^{(2)} \tag{3}$$

trong đó $\mathbb{L}^{(\alpha)}$ với $\alpha = 1, 2$ là ten xơ đàn hồi bậc bốn của pha nền và pha cốt. Ten xơ này được viết theo qui ước Kelvin dưới dạng ma trận 6X6 như sau [11, 12]

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & L_{1133} & \sqrt{2}L_{3323} & \sqrt{2}L_{3313} & \sqrt{2}L_{3312} \\ L_{2211} & L_{2222} & L_{2233} & \sqrt{2}L_{2223} & \sqrt{2}L_{2213} & \sqrt{2}L_{2212} \\ L_{3311} & L_{3322} & L_{3333} & \sqrt{2}L_{3323} & \sqrt{2}L_{3313} & \sqrt{2}L_{3312} \\ \sqrt{2}L_{2311} & \sqrt{2}L_{2322} & \sqrt{2}L_{2333} & 2L_{2323} & 2L_{2313} & 2L_{2312} \\ \sqrt{2}L_{1311} & \sqrt{2}L_{1311} & \sqrt{2}L_{1333} & 2L_{1323} & 2L_{1313} & 2L_{1312} \\ \sqrt{2}L_{1211} & \sqrt{2}L_{1222} & \sqrt{2}L_{1233} & 2L_{1223} & 2L_{1213} & 2L_{1212} \end{bmatrix}$$

trong trường hợp đơn giản khi vật liệu là đàn hồi và đẳng hướng thì

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\upsilon)E}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)} & \frac{\upsilon E}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)} & \frac{\upsilon E}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\upsilon E}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)} & \frac{(1-\upsilon)E}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)} & \frac{\upsilon E}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\upsilon E}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)} & \frac{\upsilon E}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)} & \frac{(1-\upsilon)E}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{(1+\upsilon)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{(1+\upsilon)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{(1+\upsilon)} \end{bmatrix}$$

với E, υ lần lượt là mô đun đàn hồi và hệ số poisson của vật liệu. $\chi^{(i)}(\mathbf{x})$ là hàm đặc trưng của pha cốt sợi ($1 \leq i \leq$N cho trường hợp tổng quát ở đây i = 1) đặc trưng bởi miền $\Omega^{(i)}$, hàm này có đặc điểm sau:

$$\chi^{(i)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \, nếu \;\; \mathbf{x} \in \; \Omega^{(i)} \\ 0 \, nếu \; x \;\; \notin \Omega^{(i)} \end{cases} \tag{4}$$

Ten xơ ứng suất $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ phải thoả mãn phương trình cân bằng:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 0 \tag{5}$$

Ở cấp độ vĩ mô, vật liệu FRC được coi là đồng nhất. Ứng xử đàn hồi có hiệu của nó được viết như sau:

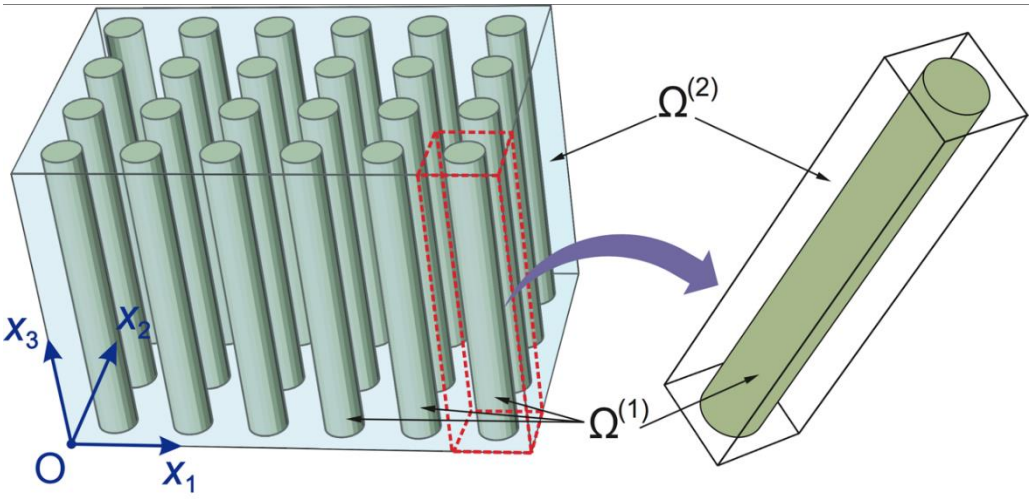
$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{L}^{eff} : \mathbf{E} \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{L}^{eff}$ là ten xơ đàn hồi có hiệu của FRC, $\boldsymbol{\Sigma}$ và $\mathbf{E}$ lần lượt là ten xơ ứng suất và biến dạng vĩ mô của vật liệu tổng hợp được định nghĩa như sau

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2|\Omega|}\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \otimes^{s} \mathbf{x} d\mathbf{x}, \;\; \mathbf{E} = \frac{1}{2|\Omega|}\int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \otimes^{s} \mathbf{x} d\mathbf{x} \tag{7}$$

Trong đó $\mathbf{n}$ là vec tơ pháp tuyến đơn vị của mặt biên $\partial\Omega$, $|\Omega|$ là thể tích của vật liệu FRC và

phép $\otimes^s$ là tích ten xơ đối xứng của hai vec tơ $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ như sau $\mathbf{a}\otimes^s\mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} + \mathbf{b}\otimes\mathbf{a})$.



Hình 1. Vật liệu FRC và một nhân tuần hoàn.

3. XÁC ĐỊNH TÍNH ĐÀN HỒI CÓ HIỆU BẰNG PHƯƠNG PHÁP FFT

Áp một chuyển vị đồng nhất lên mặt giới hạn $\partial\Omega$ của vật liệu Ω:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E^0}\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in\ \partial\Omega \tag{8}$$

Trong đó $\mathbf{E^0}$ là ten xơ biến dạng không đổi đặt tại biên. Quan sát điều kiện biên phương trình (8) và phương trình biến dạng vĩ mô (7) có thể thấy rằng ten xơ biến dạng vĩ mô $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0$. Do vật liệu FRC nghiên cứu ở đây có tính tuần hoàn trong mặt cắt vuông góc với các sợi nên ta chỉ cần nghiên cứu một nhân tuần hoàn $\mathcal{U}$ thay vì nghiên cứu toàn bộ vật liệu Ω, nhân tuần hoàn $\mathcal{U}$ được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{U} = \left\{\mathbf{x} \in\ \Omega | -\lambda_\alpha \le x_\alpha \le \lambda_\alpha, -\frac{h}{2} \le x_3 \le \frac{h}{2}\right\} \tag{9}$$

với $\alpha = 1,2; 2\lambda_1$ và $2\lambda_2$ là kích thước của nhân tuần hoàn trong mặt phẳng vuông góc với phương dọc trục sợi và h là chiều dài sợi, chiều này này phải đủ lớn so với λ_α. Khi vật liệu có phân bố vuông ta chọn $2\lambda_1 = 2\lambda_2 = 1$, bán kính sợi sẽ thay đổi từ 0 đến giá trị λ_1 ứng với tỷ lệ phần trăm thể tích sợi khác nhau.

Ở đây ta đưa ra khái nhiệm "môi trường đối chứng" với ten xơ đàn hồi $\mathbb{L}^{(0)}$, đồng thời đặt $\Delta\mathbb{L} = \mathbb{L} - \mathbb{L}^{(0)}$, phương trình (5) viết lại như sau:

$$\nabla \cdot \left[\left(\Delta\mathbb{L} + \mathbb{L}^{(0)}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}\right] = 0 \tag{10}$$

Ten xơ biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ có thể được tách thành hai phần như sau

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{E^0} + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) \tag{11}$$

trong đó $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x})$ là trường ten xơ biến dạng nhiễu tuần hoàn, vec tơ chuyển vị liên hệ với trường ten xơ biến dạng nhiễu tuần hoàn được ký hiệu là $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ theo phương trình (2). Thay phương

trình (11) vào (10) ta được:

$$\nabla \cdot \left[\mathbb{L}^{(0)}: \left(\mathbf{E^0} + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x})\right)\right] + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla \cdot \left[\mathbb{L}^{(0)}: \left(\nabla \mathbf{u}^*(\mathbf{x})\right)\right] + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \tag{12}$$

với

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) &= \Delta\mathbb{L}: [\mathbf{E^0} + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x})] = \left[\mathbb{L} - \mathbb{L}^{(0)}\right]: \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \\ &= \left[\mathbb{L}^{(2)} - \mathbb{L}^{(0)}\right]: \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N} \left[\mathbb{L}^{(\mathrm{i})} - \quad \mathbb{L}^{(2)}\right] \chi^{(i)}: \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{13}$$

là trường ten xơ phân cực. Áp dụng biến đổi nhanh Fourier (FFT), các trường chuyển vị $\mathbf{u}$, biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$ và ten xơ phân cực $\boldsymbol{\tau}$ được viết lại dưới dạng như sau

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \sum_{\xi}^{N_k} \hat{\mathbf{u}}^*(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}, \qquad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \sum_{\xi}^{N_k} \hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{\xi}^{N_k} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} \tag{14}$$

trong phương trình (14) $i = \sqrt{-1}$ là số ảo, và các vec tơ $\hat{\mathbf{u}}^*(\boldsymbol{\xi})$, ten xơ $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi})$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi})$ lần lượt là các biến đổi Fourier rời rạc của $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$; $\boldsymbol{\xi}$=$(\xi_1, \xi_2, 0) = \left(\frac{n_1\pi}{\lambda_1}, \frac{n_2\pi}{\lambda_2}, 0\right)$ với n_1 và n_2 = -N_{k+1}, - N_{k+2}, …,0,1, …, N_k là một vec tơ sóng rời rạc 2D, tổng của nó chính là tất cả các vec tơ sóng rời rạc và bằng $2N_kX2N_k$. Đưa biểu thức (14) vào phương trình (12) ta có

$$-\sum_{\xi} L^{(0)}_{pqkl} \xi_l \, \xi_q \hat{u}^*_k(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} + \sum_{\xi} \hat{\tau}_{pq}\,(\boldsymbol{\xi}) \xi_q e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} = 0 \tag{15}$$

Tương tự, trường ứng suất phân cực được viết trong không gian Fourier như sau:

$$\tau_{pq} = \sum_{\xi} \left(L^{(2)}_{pqkl} - L^{(0)}_{pqkl}\right) \hat{\varepsilon}_{\boldsymbol{kl}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\xi} \left(L^{(i)}_{pqkl} - L^{(2)}_{pqkl}\right) \chi^{(i)} e^{i\boldsymbol{\xi}'\cdot\mathbf{x}} \hat{\varepsilon}_{kl}(\boldsymbol{\xi}') \tag{16}$$

Ở đây, vec tơ sóng rời rạc $\boldsymbol{\xi}'$ được định nghĩa bởi $\boldsymbol{\xi}'$=$(\xi'_1, \xi'_2, 0) = \left(\frac{n'_1\pi}{\lambda_1}, \frac{n'_2\pi}{\lambda_2}, 0\right)$ với n'_1 và n'_2 = -N_{k+1}, - N_{k+2}, …,0,1, …, N_k và biến đổi Fourier của hàm đặc trưng $\chi^{(i)} e^{i\boldsymbol{\xi}'\cdot\mathbf{x}}$ được biểu diễn như sau:

$$\chi^{(i)} e^{i\boldsymbol{\xi}'\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\xi} \mathrm{F}\left[\chi^{(i)} e^{i\boldsymbol{\xi}'\cdot\mathbf{x}}\right] e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\xi} \hat{\chi}^{(i)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} \tag{17}$$

với

$$\mathrm{F}\left[\chi^{(i)} e^{i\boldsymbol{\xi}'\cdot\mathbf{x}}\right] = \frac{1}{|\mathcal{U}|} \int_{U^{(i)}} e^{-i(\xi-\xi')\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \hat{\chi}^{(i)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') \tag{18}$$

thay phương trình (17) vào (16) ta nhận được biểu thức của trường ứng suất phân cực

$$\hat{\tau}_{\boldsymbol{pq}}(\boldsymbol{\xi}) = \left(L^{(2)}_{pqkl} - L^{(0)}_{pqkl}\right)\hat{\varepsilon}_{\boldsymbol{kl}}(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}}\left(L^{(i)}_{pqkl} - L^{(2)}_{pqkl}\right)\left[\hat{\chi}^{(i)} * \hat{\varepsilon}_{\boldsymbol{kl}}(\boldsymbol{\xi})\right] \tag{19}$$

với ký hiệu * là tích "convolution" [7, 10] trong không gian Fourier. Biến đổi Fourier $\hat{\chi}^{(i)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')$ của $\chi^{(i)}(\mathbf{x})$ được gọi là hệ số hình dạng và kích thước của pha hạt được tính như sau

$$\hat{\chi}^{(i)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') = \frac{e^{-i(\xi-\xi')\cdot\mathbf{x}^{(i)}}}{|U|}\int_{\Omega^{(i)}} e^{-i(\xi-\xi')\cdot\tilde{\mathbf{x}}}\, d\tilde{\mathbf{x}} \tag{20}$$

cũng lưu ý rằng hệ số này phụ thuộc cả vào kích thước và hình dạng của pha cốt [7].

Từ phương trình (15) và (19) ta có thể xác định phần nhiễu của vec tơ chuyển vị trong không gian Fourier như sau:

$$\hat{u}^*_k = \left[L^{(0)}_{pqkl}\xi_q\xi_l\right]^{-1}\hat{\tau}_{\boldsymbol{pq}}\boldsymbol{i}\xi_p \tag{21}$$

Áp dụng biến đổi nhanh Fourier và kết hợp với phương trình (2) cho vec tơ chuyển vị nhiễu ta có

$$\hat{\varepsilon}^*_{kt} = \frac{1}{2}\left[\hat{u}^*_k i\xi_t + \hat{u}^*_t i\xi_k\right] \tag{22}$$

Thay (21) vào (22) ta được

$$\hat{\varepsilon}^*_{kt} = -\frac{1}{2}\left(\left[L^{(0)}_{pqkl}\xi_q\xi_l\right]^{-1}\xi_q\xi_t + \left[L^{(0)}_{tqlp}\xi_q\xi_l\right]^{-1}\xi_q\xi_k\right)\hat{\tau}_{\boldsymbol{pq}} \tag{23}$$

Kết hợp phương trình (19) và (23) đồng thời xét đến tính chất $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{\mathbf{E}}^{\mathbf{0}}(\boldsymbol{\xi}) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\boldsymbol{\xi})$ với

$\hat{\mathbf{E}}^{\mathbf{0}}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases}\mathbf{E^0} \text{ nếu } \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}\\ \mathbf{0} \text{ nếu } \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}\end{cases}$ dẫn tới

$$\hat{\mathrm{E}}^0_{kt} = \hat{\varepsilon}_{kt} + \hat{\Gamma}_{ktpq}\left\{\left(L^{(2)}_{pqvl} - L^{(0)}_{pqvl}\right)\hat{\varepsilon}_{vl} + \sum_{i=1}^{N}\left(L^{(i)}_{pqvl} - L^{(2)}_{pqvl}\right)\hat{\chi}^{(i)} * \hat{\varepsilon}_{\boldsymbol{vl}}\right\} \tag{24}$$

phương trình (24) viết lại dưới dạng ten xơ

$$\hat{\mathbf{E}}^{\mathbf{0}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \hat{\boldsymbol{\Gamma}}\left\{\left(\mathbb{L}^{(2)} - \mathbb{L}^{(0)}\right)\vdots\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left[\mathbb{L}^{(1)} - \mathbb{L}^{(0)}\right]\sum_{i=1}^{N}\hat{\chi}^{(i)} * \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\} \tag{25}$$

Trong đó $\hat{\Gamma}_{ktpq}(\boldsymbol{\xi})$ ten xơ toán tử Green trong không gian Fourier được biểu diễn như sau:

$$\hat{\Gamma}_{ktpq} = \frac{1}{4}\left\{\left[L^{(0)}_{pqkl}\xi_q\xi_l\right]^{-1}\xi_q\xi_t + \left[L^{(0)}_{tqlp}\xi_q\xi_l\right]^{-1}\xi_q\xi_k + \left[L^{(0)}_{pkql}\xi_p\xi_l\right]^{-1}\xi_p\xi_t + \left[L^{(0)}_{tplq}\xi_p\xi_l\right]^{-1}\xi_p\xi_k\right\} \quad (26)$$

hay dưới dạng ten xơ như sau: $\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \frac{\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}}{\boldsymbol{\xi}.\mathbb{L}^{(0)}.\boldsymbol{\xi}}$

Trong không gian Fourier ten xơ ứng suất được tính thông qua ten xơ biến dạng như sau

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{L}^{(2)}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{L}^{(1)} - \mathbb{L}^{(2)}\right)\sum_{i=1}^{N}\left[\hat{\chi}^{(i)} * \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\right](\boldsymbol{\xi}) \quad (27)$$

Để xác định trường nghiệm vec tơ chuyển vị u, ta sẽ giải phương trình (25) trong không gian Fourier theo thuật toán số sau:

- Vòng lặp thứ 1:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1(y_1, y_2) = \mathbf{E}, \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^1(y_1, y_2) = \mathbb{L}(y_1, y_2)\boldsymbol{\varepsilon}^1(y_1, y_2), \quad (29)$$

- Vòng lặp i > 1:

  Giả sử rằng các giá trị $\boldsymbol{\varepsilon}^i(y_1, y_2), \boldsymbol{\sigma}^i(y_1, y_2)$ là đã biết,

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{i}}(\xi_1, \xi_2) = F\left(\boldsymbol{\sigma}^i(y_1, y_2)\right), \quad (30)$$

  Kiểm tra độ hội tụ

  - Vòng lặp sẽ dừng lại khi

$$\frac{\left\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{i}}(\xi_1, \xi_2) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{i-1}}(\xi_1, \xi_2)\right\|}{\left\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{i}}(\xi_1, \xi_2)\right\|} < \delta \quad (31)$$

  - Với

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{i+1}}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{i}}(\xi_1, \xi_2) - \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^{\boldsymbol{0}}(\xi_1, \xi_2)\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{i+1}}(\xi_1, \xi_2), \quad (32)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{i+1}}(y_1, y_2) = \boldsymbol{F^{-1}}\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{i+1}}(\xi_1, \xi_2)\right), \quad (33)$$

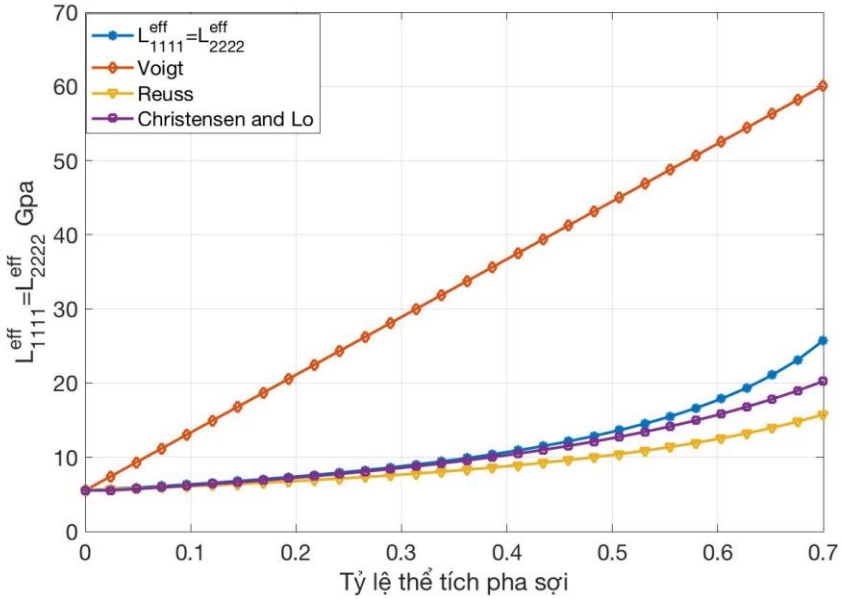
$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1}(y_1, y_2) = \mathbb{L}(y_1, y_2)\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(y_1, y_2). \quad (34)$$

4. VÍ DỤ SỐ

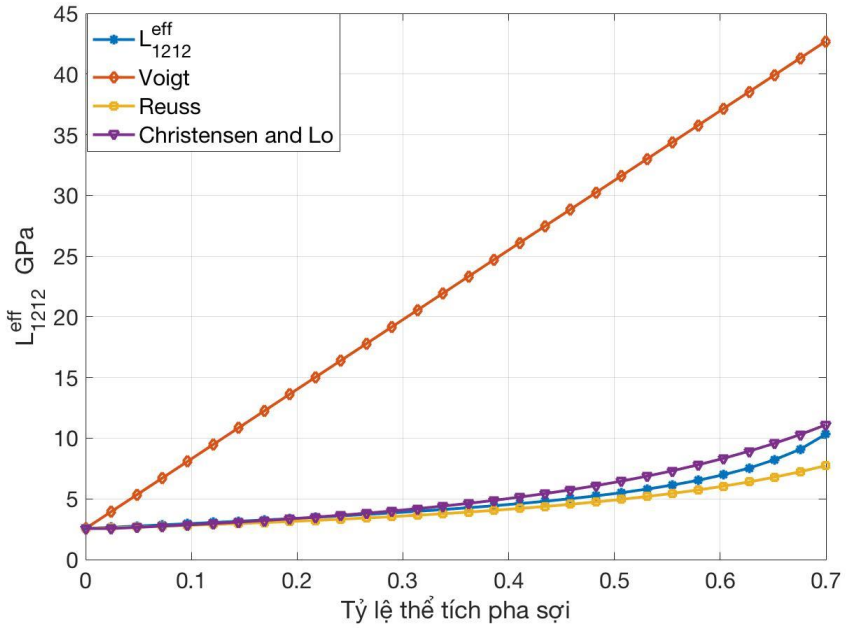
Để biểu diễn các kết quả số nhận được từ phương pháp biến đổi nhanh Fourier, ở đây ta chọn vật liệu FRC được cấu thành từ pha nền và pha cốt đều là đàn hồi, đẳng hướng với mô đun đàn hồi lần lượt là E_M = 3.45Gpa, E_F = 73.1Gpa. Hệ số Poisson của hai pha này lần lượt

nhận giá trị $\nu_M = 0.35$ và $\nu_F = 0.22$. Tỷ lệ thể tích của cốt sợi so với pha nền biến đổi từ 0 đến 70%, khi cạnh của nhân tuần hoàn là 1 thì tương ứng với nó bán kính sợi thay đổi từ 0 cho đến 0.4721. Độ hội tụ của tính toán sẽ đạt được khi $\delta = 0.0001$. Số bước sóng trong mặt phẳng vuông góc với x_3 theo mỗi phương là $2N_k$ với $N_k = 32$ trong tính toán này.

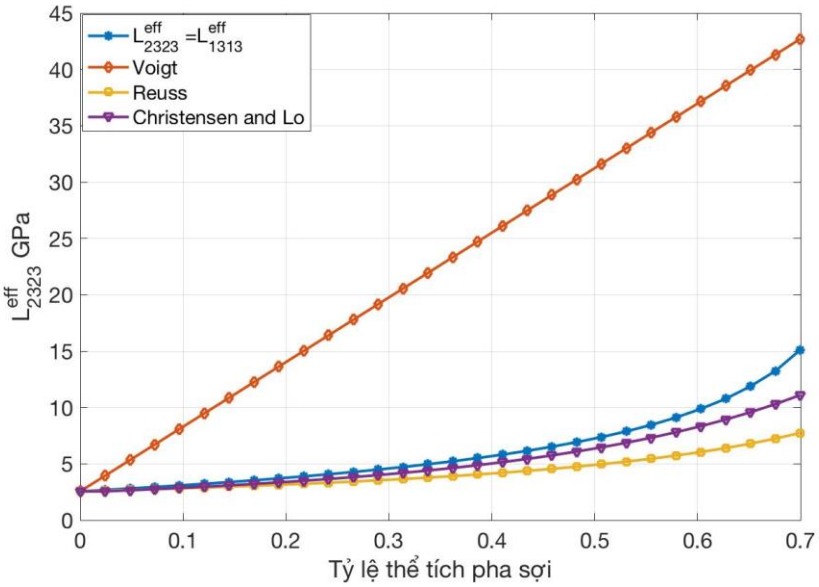
Các kết quả thu được bằng phương pháp biến đổi nhanh Fourier sẽ được so với với các biên Voigt – Reuss và phương pháp giải tích được phát triển bởi Christensen and Lo [5, 11] ở các biểu đồ từ hình 2 đến hình 5.



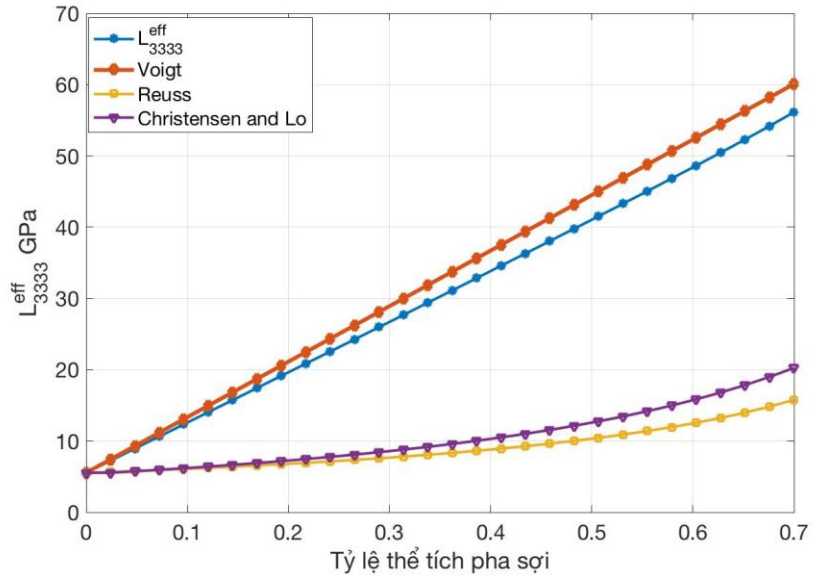
Hình 2. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha sợi và thành phần L^{eff}_{1111} của ten xơ đàn hồi có hiệu của FRC.



Hình 3. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha sợi và thành phần L^{eff}_{1212} của ten xơ đàn hồi có hiệu của FRC.



Hình 4. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha sợi và thành phần L^{eff}_{2323} của ten xơ đàn hồi có hiệu của FRC.



Hình 5. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha sợi và thành phần L^{eff}_{3333} của ten xơ đàn hồi có hiệu của FRC.

Quan sát kết quả số các thành phần của ten xơ hệ số đàn hồi có hiệu của vật liệu FRC nhận được bằng các phương pháp khác nhau ta thấy các kết quả đưa ra bởi phương pháp FFT và phương pháp Christensen and Lo rất gần nhau đối với các thành phần $L^{eff}_{1111}, L^{eff}_{2222}, L^{eff}_{1212}, L^{eff}_{2323}$ *v*à L^{eff}_{1313} ở mọi giá trị tỷ lệ thể tích của cốt sợi, với thành phần L^{eff}_{3333} kết quả thu được bằng phương pháp số FFT và Christensen and Lo tiến gần nhau khi tỷ lệ thể tích pha sợi nhỏ. Tuy nhiên kết quả thu được bằng phương pháp số FFT và phương pháp Christensen and Lo đều nằm trong phạm vi của giới hạn Voigt – Reuss chứng tỏ tính đúng của cả hai phương pháp tính.

5. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này đã trình bày phương pháp biến đổi nhanh Fourier để xác định tính chất có hiệu của vật liệu FRC có cấu trúc tuần hoàn. Phương pháp này cho phép giảm khối lượng tính toán khi chỉ cần thực hiện các tính toán trên một nhân tuần hoàn thay vì toàn thể cấu trúc vật liệu, các kết quả của phương pháp FFT đã được so sánh với các biên Voigt – Reuss và phương pháp giải tích đưa ra bởi Christensen and Lo cho thấy tính đúng của phương pháp. Các tính toán trong nghiên cứu này này cũng có thể được áp dụng đối các tính chất khác của vật liệu như tính dẫn điện, dẫn nhiệt, áp điện… khi vật liệu đó có cấu trúc tuần hoàn.

Dựa trên nền tảng là phương pháp biến đổi nhanh Fourier đã được trình bày trong báo cáo, nghiên cứu này hoàn toàn có thể được tiếp tục phát triển để giải quyết bài toán vật liệu với cấu trúc có phân bố ngẫu nhiên với việc giải quyết thêm hai bài toán phụ trợ là thuật toán gieo ngẫu nhiên và thiết lập thêm một biến định vị trong không gian Fourier, và đây cũng là định hướng trong các nghiên cứu tiếp theo của nhóm tác giả.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Z. Hashin, S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, J. Mech. Phys. Solids, 11 (1963) 127-140. https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7
[2]. T. Mori, K. Tanaka, Averages tress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, ActaMetall, 21 (1973) 571-574. https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3
[3]. S. Nemat-Nasser, M. Hori, Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials, Elsevier, New York, 1998.
[4]. D.C. Pham, Essential solid mechanics, Institute of Mechanics, Hanoi, 2013.
[5]. D.H. Nguyen, H.T. Le, H. LeQuang, Q.C. He, Determination of the effective conductive properties of composites with curved oscillating interfaces by a two-scale homogenization procedure, Computational Materials Science, 94 (2014) 150 - 162. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.03.014
[6]. J. Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, Proceedings of the royal society A. 241 (1957) 376–386. https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133
[7]. J.C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet, Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 172 (1999) 109–143. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00227-8
[8]. V.L. Nguyen, T. K. Nguyen, FFT-simulations and multi-coated inclusion model for macroscopic conductivity of 2D suspensions of compound inclusions, Vietnam Journal of Mechanics, 37 (2015) 169-176. https://doi.org/10.15625/0866-7136/37/3/5096
[9]. D.C. Pham, L.D Vu, V.L Nguyen, Bounds on the ranges of the conductive and elastic properties of randomly inhomogeneous materials, Philosophical Magazine, 93 (2013), 2229-2249. https://doi.org/10.1080/14786435.2013.765992
[10]. G. Bonnet, Effective properties of elastic periodic composite media with fibers, Journal of the Mechanics and Physicsof Solids 55 (2007) 881-899. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.11.007
[11]. A. Zaoui, Matériaux hétérogènes et composites, Palaiseau: Presses de L'Ecole polytechnique, Paris, 2000.
[12]. BV. Trần, TK. Nguyễn, AT. Trần, ĐH. Nguyễn, Đồng nhất vật liệu nhiều thành phần - Ứng xử tuyến tính, Xuất bản lần 1, Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội, 2019.