



MODELLING EFFECT OF ASPECT RATIO AND VOLUME FRACTIONS OF FIBER IN ELASTICITY PROPERTIES OF FIBER REINFORCED COMPOSITE

Tuan Tran Anh^{1,3,*}, Hai Nguyen Dinh^{2,3}

¹Section of Bridge and Tunnel Engineering Department, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

²Section of Building Materials, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

³Research and application center for technology in civil engineering (RACE) - University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 17/1/2020

Revised: 25/4/2020

Accepted: 29/4/2020

Published online: 28/06/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.5.11>

* Corresponding author

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Abstract. In this study, effects of aspect ratio (l/d – length/diameter) and volume fraction (V_f) of steel fiber on the effective elasticity properties of fiber reinforced composite (FRC) were investigated by the homogenization schema proposed by Mori - Tanaka based on Eshelby's solution for elliptical inclusions for a random fiber – orientation distribution. For this purpose, straight fibers (cylindrical fibers) with three different l/d ratio of 1.1; 5, 10, 30, 50, and 100 were used. Seven fiber volume fractions were added to concrete mixes at 1; 5; 10; 20 and 30% by volume of fiber reinforced composite. Analytical results obtained by Mori-Tanaka approach are compared with the Voigt and Reuss Limits to prove the utility of model.

Keywords: Homogenization, Mori – Tanaka Schema, aspect ratio, elasticity tensor, fiber reinforced Composite.

© 2020 University of Transport and Communications



MÔ PHỎNG ẢNH HƯỞNG CỦA ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC VÀ TỶ LỆ THỂ TÍCH CỦA CỐT SỢI TỚI TÍNH CHẤT ĐÀN HỒI CỦA COMPOSITE GIA CƯỜNG CỐT SỢI

Trần Anh Tuấn^{1,3,*}, Nguyễn Đình Hải^{2,3}

¹Bộ môn Cầu hầm, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

²Bộ môn Vật liệu xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

³Trung tâm nghiên cứu và ứng dụng công nghệ trong xây dựng (RACE), Trường Đại học Giao thông Vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 17/1/2020

Ngày nhận bài sửa: 25/4/2020

Ngày chấp nhận đăng: 29/4/2020

Ngày xuất bản Online: 28/06/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.5.11>

* Tác giả liên hệ

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Tóm tắt. Trong nghiên cứu này, ảnh hưởng của tỷ lệ kích thước (l/d – chiều dài/đường kính sợi) và tỷ lệ thể tích (V_f) của cốt sợi phân tán đến tính chất đàn hồi tổng thể của composite gia cường cốt sợi (FRC) sẽ được mô phỏng bằng một mô hình đồng nhất hoá vật liệu được đề xuất bởi Mori - Tanaka dựa trên nghiệm của bài toán Eshelby cho hạt hình elip tròn xoay khi phân bố và hướng của sợi là ngẫu nhiên. Cụ thể sẽ mô hình sẽ được áp dụng để tính cho trường hợp sợi có dạng trụ tròn thẳng với các tỷ lệ l/d lần lượt là 1.1; 5, 10, 30, 50, và 100. Năm hàm lượng sợi tính theo tỷ lệ thể tích khác nhau là 1; 5; 10; 20 và 30% sẽ được đưa vào tính toán. Kết quả giải tích thu được bằng các mô hình đồng nhất hoá sẽ được so sánh với các biên Voigt- Reuss để chứng minh tính khả dụng của mô hình.

Từ khóa: Đồng nhất hoá, Mô hình Mori – Tanaka, tỷ lệ kích thước, tensor đàn hồi, composite gia cường cốt sợi.

© 2020 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vật liệu Composite gia cường cốt sợi (FRC) là một loại vật liệu tiên tiến được áp dụng ngày càng rộng rãi do nó tận dụng được ưu điểm của pha nền và pha cốt sợi đồng thời khắc phục nhược điểm của từng thành phần. Trong ngành xây dựng nói chung và xây dựng công

trình giao thông nói riêng vật liệu Composite gia cường cốt sợi được sử dụng phổ biến nhất là bê tông xi măng gia cường cốt sợi phân tán (cốt sợi thép, sợi thủy tinh, sợi PP...) do nó có nhiều ưu điểm như cường độ chịu kéo uốn cao, cải thiện được các đặc tính cơ học như khả năng chống mài mòn, va chạm... so với bê tông truyền thống [1, 2, 3, 4].

Các nghiên cứu thực nghiệm trên thế giới cũng như tại Việt Nam đã cho nhiều kết quả về ảnh hưởng của thể tích cũng như tỷ lệ kích thước sợi đến cường độ chịu nén, kéo khi uốn cũng như các đặc tính cơ học khác của Composite gia cường cốt sợi nhằm xác định tỷ lệ thể tích cũng như tỷ lệ kích thước sợi phù hợp [1, 3, 4]. Bên cạnh các phương pháp thực nghiệm truyền thống, tensor đàn hồi có hiệu của FRC có thể được dự đoán được thông qua Mô phỏng bằng phương pháp đồng nhất hoá vật liệu dựa trên nghiệm của bài toán Eshelby cho pha hạt có dạng hình elip tròn xoay [5, 8, 10, 11, 13] với cốt sợi được phân bố ngẫu nhiên trong không gian [11, 12]. Phương pháp đồng nhất hoá vật liệu với mô hình Mori – Tanaka [6, 9, 12] sẽ được áp dụng để dự đoán tensor đàn hồi có hiệu của FRC với các hàm lượng sợi lần lượt là 1; 5; 10; 20; và 30 % với các tỷ lệ kích thước lần lượt là 1.1; 5; 10; 30; 50 và 100. Các kết quả giải tích thu được bằng mô hình Mori Tanaka sẽ được so sánh với biên Voigt – Reuss [13, 14, 17, 18].

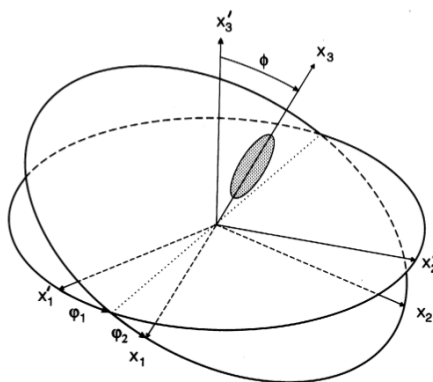
Báo cáo được trình bày thành 4 phần, trong đó phần 2 dùng để miêu tả các thông số đầu vào cũng như điều kiện biên của bài toán. Phần 3 của bài báo trình bày các kết quả số thu được từ phương pháp đồng nhất hoá và các giới hạn Voigt - Reuss. Phần 4 sẽ đưa ra một số kết luận và kiến nghị.

2. CỐT SỢI PHÂN TÁN NGẪU NHIÊN – MÔ HÌNH ĐỒNG NHẤT HOÁ VẬT LIỆU

2.1. Nghiệm của bài toán Eshelby cho hình elip tròn xoay

Cốt sợi được mô phỏng có dạng cầu dẹt (oblate spheroid) với phương trình toán học được mô tả như sau [5, 9, 13]:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a} + \frac{x_3^2}{c} = 1, \quad (1)$$



Hình 1. Phân bố của sợi gia cường trong không gian.

Với c là chiều dài bán trục theo phương x_3 ($c = l/2$), và a là chiều dài bán trục theo phương x_1 và x_2 ($a = d/2$) của hạt elip tròn xoay. Công thức giải tích của tensor Eshelby cho

pha hạt có dạng elip tròn xoay được trình bày như trong công bố của Eshelby. Khi pha hạt có dạng phỏng cầu dài với tỷ lệ kích thước là $p = c/a = l/d$ (trong trường hợp đặc biệt c tiến tới vô hạn thì pha hạt sẽ có dạng trụ hoàn hảo) thì các thành phần khác không của tensor Eshelby [6] (S_{ijkl} với 81 phần tử) như sau:

$$S_{1111}^{esh} = S_{2222}^{esh} = Q\pi + RI_a + \frac{4T}{3} \quad (2)$$

$$S_{1122}^{esh} = S_{2211}^{esh} = \frac{Q\pi}{3} - RI_a + \frac{T}{3} \quad (3)$$

$$S_{1133}^{esh} = S_{2233}^{esh} = -RI_a - p^2T \quad (4)$$

$$S_{3311}^{esh} = S_{3322}^{esh} = -RI_c - T \quad (5)$$

$$S_{3333}^{esh} = \frac{4Q\pi}{3} + RI_c + 2p^2T \quad (6)$$

$$S_{1212}^{esh} = S_{1221}^{esh} = S_{2112}^{esh} = S_{2121}^{esh} = Q\pi + RI_a + \frac{T}{3} \quad (7)$$

$$S_{1313}^{esh} = S_{1331}^{esh} = S_{3131}^{esh} = S_{3113}^{esh} = 2\pi R - I_a \frac{R}{2} - \frac{1+p^2}{2}T \quad (8)$$

$$S_{2323}^{esh} = S_{2332}^{esh} = S_{3232}^{esh} = S_{3223}^{esh} = 2\pi R - I_a \frac{R}{2} - \frac{1+p^2}{2}T \quad (9)$$

Với

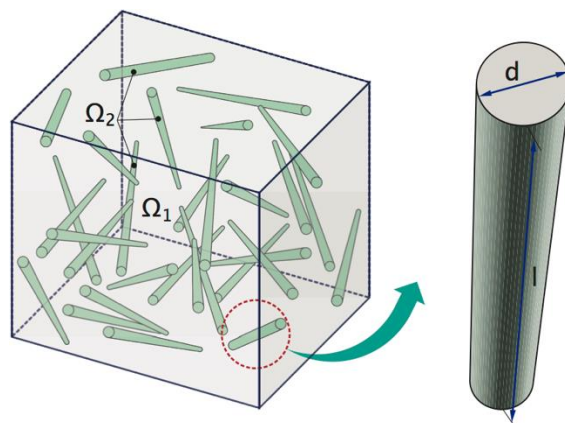
$$Q = \frac{3}{8\pi(1-\nu_1)}; R = \frac{1-2\nu_1}{8\pi(1-\nu_1)}$$

$$I_a = \frac{2\pi p}{(p^2-1)^{3/2}} [p(p^2-1)^{1/2} - \cosh^{-1}p];$$

$$I_c = 4\pi - 2I_a; T = \frac{Q(4\pi - 3I_a)}{3(p^2-1)}$$

Trong trường hợp tổng quát khi cốt sợi bố trí ngẫu nhiên trong không gian, ma trận chuyển toạ độ sẽ có dạng tổng quát [7, 10, 12]

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \phi & \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \phi & \sin \varphi_2 \sin \phi \\ -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \phi & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \phi & \cos \varphi_2 \sin \phi \\ \sin \varphi_1 \sin \phi & \cos \varphi_1 \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (10)$$



Hình 2. Cốt sợi phân bố ngẫu nhiên trong vật liệu composite.

Công thức chuyển cơ sở của tensor bậc 4 trong không gian [13] viết dưới dạng chỉ số tổng quát như sau:

$$L'_{ijkl} = R_{im}R_{jn}R_{ko}R_{lp}L_{mnop} \quad (11)$$

Với \mathbb{L} là tensor đàn hồi bậc 4 trong hệ tọa độ góc, và \mathbb{L}' là tensor đàn hồi bậc 4 trong hệ tọa độ mới, các giá trị $i, j, k, l, m, n, o, p, q$ nhận các giá trị từ 1 đến 3 tương ứng với ba chiều không gian.

2.2. Đồng nhất hoá vật liệu FRC – Mô hình Mori -Tanaka

Xét một vật liệu Composite gia cường cốt sợi với pha nền là $\Omega^{(1)}$, pha sợi là $\Omega^{(2)}$ có dạng hình trụ thẳng với đường kính mặt cắt là d và chiều dài sợi là l xem Hình 2.

Các vật liệu cấu thành FRC được giả sử là đàn hồi tuyến tính và đồng nhất trong từng thành phần. Định luật Hooke tổng quát [7, 10, 11] được viết như sau:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \mathbb{L}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

với $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ lần lượt là tensor biến dạng và tensor ứng suất trong vật liệu α tại tọa độ \mathbf{x} , $\mathbb{L}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ là tensor đàn hồi (tensor độ cứng) bậc 4 của vật liệu α . Khi các vật liệu là đàn hồi đẳng hướng thì tensor đàn hồi chỉ phụ thuộc vào mô đun đàn hồi E và hệ số poisson của vật liệu [15].

Mô hình Mori- Tanaka được thiết lập để xác định các tensor định vị biến dạng cho phép xác định biến dạng tại các điểm trong các pha cấu thành của Composite khi biết biến dạng hoặc ứng suất tại biên của Composite. Giả sử rằng FRC chịu một biến dạng tại biên bằng với biến dạng trung bình trong pha nền [13]:

$$\mathbf{E}_0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1 \quad (13)$$

biến dạng trung bình trong pha cốt được tính như sau

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_2 = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_2 : (\mathbb{L}_2 - \mathbb{L}_1)]^{-1} : \mathbf{E} \quad (14)$$

với \mathbf{E} là biến dạng vĩ mô của composite, \mathbb{P}_2 là tensor Hill bậc 4 [5, 13].

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{S}_2^{esh} : \mathbb{L}_1^{-1} \quad (15)$$

trong đó \mathbb{S}_2^{esh} là tensor Eshelby bậc 4 [5] với nguyên lý chung của Eshelby đó là cho phép xác định một biến dạng (ứng suất) tại mọi điểm trong các pha khi biết biến dạng hoặc/và ứng suất tại biên của vật liệu, tensor Eshelby này phụ thuộc vào hình dạng, hướng của pha hạt và tính chất của pha nền.

Từ các phương trình (13), (14) và (15) ta có

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{f}_1 \mathbb{I} + \mathbf{f}_2 [\mathbb{I} + \mathbb{P}_2 : (\mathbb{L}_2 - \mathbb{L}_1)]^{-1}\} : \mathbf{E}_0 \quad (16)$$

Từ phương trình (16) đối chiếu [13], tensor định vị biến dạng của pha nền sẽ là:

$$\mathbb{A}_1 = \{\mathbf{f}_1 \mathbb{I} + \mathbf{f}_2 [\mathbb{I} + \mathbb{P}_2 : (\mathbb{L}_2 - \mathbb{L}_1)]^{-1}\}^{-1} \quad (17)$$

Mặt khác ta lại có

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_2 = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_2 : (\mathbb{L}_2 - \mathbb{L}_1)]^{-1} : \mathbb{A}_1 : \mathbf{E} \quad (18)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_2 = \mathbb{A}_2 : \mathbf{E} \quad (19)$$

Kết hợp (18) và (19) ta rút ra tensor định vị biến dạng của pha cốt

$$\mathbb{A}_2 = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_2 : (\mathbb{L}_2 - \mathbb{L}_1)]^{-1} : \mathbb{A}_1 \quad (20)$$

Phép đồng nhất hoá vật liệu nhiều pha với pha hạt gia cường pha nền có công thức giải tích như sau [13]

$$\mathbb{L}_{MT}^{hom} = \sum_{i=1}^n f_i \mathbb{L}_i : \mathbb{A}_i \quad (21)$$

ở đây vật liệu composite bao gồm hay pha nền $n = 2$.

Mặt khác do hạt phân bố là ngẫu nhiên nên tensor Eshelby ở công thức (14) sẽ được tính là trung bình của tất cả các tensor Eshelby đó xoay theo mọi hướng trong không gian 3D và nó được chứng minh [9, 11, 12] có giá trị như sau:

$$\overline{\mathbb{S}_2^{esh}} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \mathbb{S}_2^{esh} \sin\phi d\varphi_1 d\phi d\varphi_2 \quad (22)$$

Công thức giải tích (21) đưa ra bởi mô hình Mori-Tanaka cho thấy ảnh hưởng của hàm lượng thể tích pha sợi (f_i) đến tính chất đàn hồi có hiệu của FRC, các công thức giải tích từ (2) đến (9) của các thành phần tensor Eshelby và các công thức (15), (20) và (21) cho thấy ảnh hưởng của tỷ lệ kích thước p của cốt sợi đến tensor đàn hồi có hiệu của FRC.

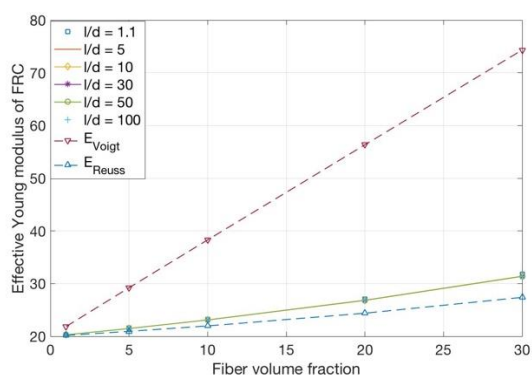
Các kết quả tính toán bởi mô hình sẽ được so sánh với các biên Voigt – Reuss được xây dựng dựa trên các phép toán biến phân sử dụng các nguyên lý về năng lượng cực tiểu và năng lượng bù cực tiểu [17, 18] với tensor đàn hồi được trình bày ở các công thức dưới đây:

$$\mathbb{L}^{Voigt} = f_1 \mathbb{L}_1 + f_2 \mathbb{L}_2 \quad (23)$$

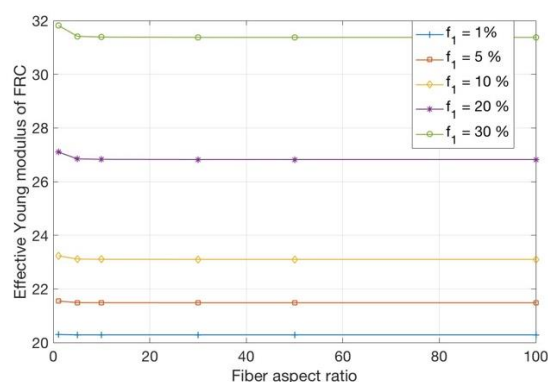
$$\mathbb{L}^{Reuss} = \left(\frac{f_1}{\mathbb{L}_1} + \frac{f_2}{\mathbb{L}_2} \right)^{-1} \quad (24)$$

3. KẾT QUẢ VÀ NHẬN XÉT

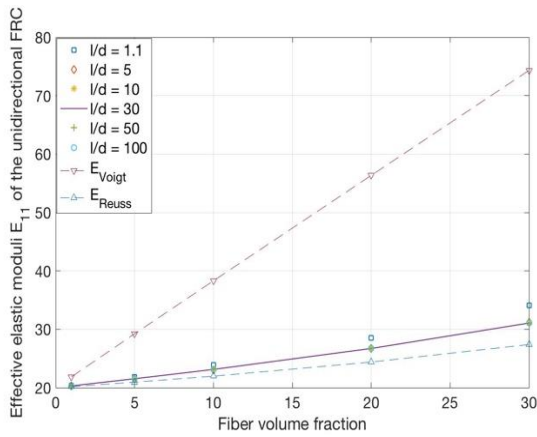
Để minh họa các kết quả giải tích thu được bằng phương pháp đồng nhất hoá sử dụng mô hình Mori-Tanaka ta xét trường hợp vật liệu composite gồm hai pha đàn hồi đẳng hướng với pha nền có mô đun đàn hồi là 20 GPa, hệ số poisson 0.2. Cốt sợi có mô đun đàn hồi 200 GPa và hệ số poisson 0.3. Do tính khả dụng của mô hình Mori – Tanaka khuyến cáo tỷ lệ thể tích sợi là dưới 40% theo [13], trong nghiên cứu này ta chọn tỷ lệ thể tích của cốt sợi lấy các giá trị 1%; 5%; 10%; 20 % và 30%. Hệ số kích thước sợi lần lượt là 1.1; 5; 10; 30; 50; 100. Mô hình Mori – Tanaka sẽ được áp dụng tính cho hai trường hợp cốt sợi phân bố ngẫu nhiên và cốt sợi phân bố theo phương x_3 để nghiên cứu ảnh hưởng của hệ số p và tỷ lệ thể tích đến các đặc trưng đàn hồi của hiệu của FRC. Các kết quả của mô hình được thể hiện từ Hình 3 đến Hình 8 dưới đây.



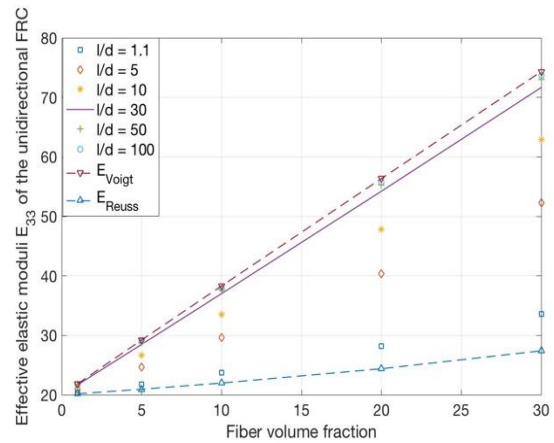
Hình 3. Ảnh hưởng của hàm lượng sợi đến mô đun đàn hồi có hiệu của FRC – Sợi phân bố ngẫu nhiên.



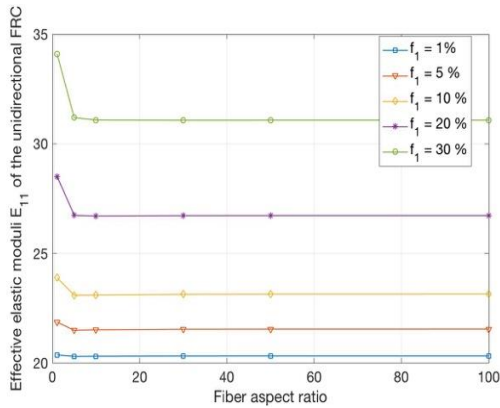
Hình 4. Ảnh hưởng của p đến mô đun đàn hồi có hiệu của FRC – Sợi phân bố ngẫu nhiên.



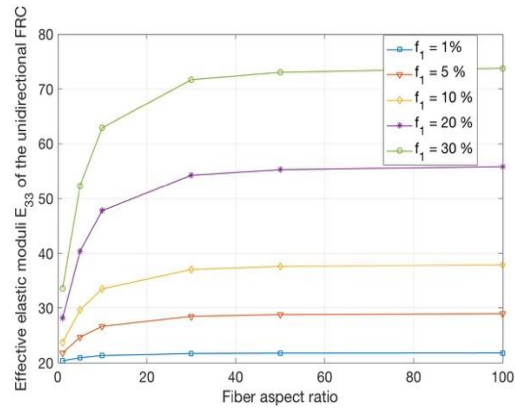
Hình 5. Ảnh hưởng của hàm lượng sợi đến thành phần E_{11} có hiệu của FRC – Sợi phân bố theo hướng x_3 .



Hình 6. Ảnh hưởng của hàm lượng sợi đến thành phần E_{33} có hiệu của FRC – Sợi phân bố theo hướng x_3 .

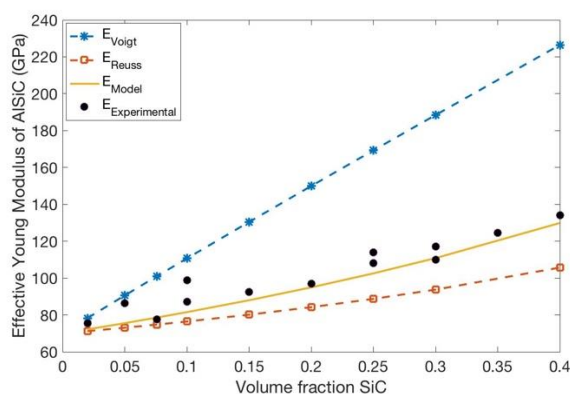


Hình 7. Ảnh hưởng p đến thành phần $E_{11} = E_{22}$ có hiệu của FRC – Sợi phân bố theo hướng x_3 .



Hình 8. Ảnh hưởng p đến thành phần E_{33} có hiệu của FRC – Sợi phân bố theo hướng x_3 .

Kết quả thể hiện ở Hình 3 cho thấy trong trường hợp cốt sợi phân bố ngẫu nhiên không gian nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm đã chỉ ra rằng khi các vật liệu cấu thành nên composite là đẳng hướng thì ứng xử của vật liệu composite cũng là đẳng hướng và nó hoàn toàn không phụ thuộc vào tỷ lệ l/d và cũng là kết luận của [10]. Đối với trường hợp này ta sẽ so sánh các kết quả đưa ra bởi mô hình với các biên Voigt – Reuss và một số kết quả thực nghiệm đối với vật liệu Aluminum ($E_{Al} = 70$ Gpa, $\nu_{Al} = 0.34$) được gia cường bởi SiC ($E_{SiC} = 415$ Gpa, $\nu_{SiC} = 0.16$) [19 - 21] ở hình 9 dưới đây. Các kết quả mô phỏng bởi mô hình khá tương thích với các kết quả thí nghiệm thu được cho thấy tính khả dụng của mô hình khi hàm lượng cốt sợi dưới 40%.



Hình 9. Ảnh hưởng của hàm lượng SiC đến mô đun đàn hồi có hiệu của AlSiC – trường hợp SiC phân bố ngẫu nhiên.

Khi cốt sợi phân bố có định hướng ở nghiên cứu này ta cho cốt sợi chạy dọc theo phương x_3 (trục của sợi trùng với phương x_3 hay nói cách khác trục của sợi vuông góc với phương x_1 và x_2) thì vật liệu tổng hợp có ứng xử đàn hồi đẳng hướng ngang với trục đối xứng là x_3 . Các kết quả mô phỏng được thể hiện ở các Hình 5 và 6 cho thấy khi hàm lượng cốt sợi tăng thì mô đun đàn hồi có hiệu của FRC là có xu hướng tăng, các kết quả giải tích nằm hoàn toàn trong giới hạn Voigt – Reuss [13, 16] cho thấy tính khả dụng của mô hình. Trong trường hợp này khi p càng tăng thì E có hiệu theo phương x_1 và x_2 càng giảm nhưng mức độ giảm không đáng kể và có thể coi như không ảnh hưởng đến E theo các phương này theo Hình 7. Ngược lại giá trị p ảnh hưởng khá lớn đến E có hiệu theo phương x_3 thể hiện ở Hình 8, các kết quả mô phỏng cũng chỉ ra rằng khi p lớn hơn 30 thì việc gia tăng chiều dài sợi gần như không ảnh hưởng gì đến khả năng cải thiện mô đun đàn hồi có hiệu theo phương x_3 của FRC.

Kết quả giải tích biểu thị trên Hình 4 cho thấy trong trường hợp cốt sợi phân bố ngẫu nhiên thì khi p tăng thì mô đun đàn hồi có hiệu càng giảm và đi gần như không đổi khi $p \geq 5$. Tuy nhiên mức độ thay đổi không đáng kể để có thể kết luận trong trường hợp phân bố ngẫu nhiên p không ảnh hưởng tới mô đun đàn hồi có hiệu của FRC.

4. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này đã trình bày phương pháp đồng nhất hoá sử dụng mô hình Mori - Tanaka nhằm xác định tính chất đàn hồi có hiệu của vật liệu composite gia cường cốt sợi có kể đến ảnh hưởng của tỷ lệ kích thước và hàm lượng của cốt sợi cho các trường hợp cốt sợi phân tán ngẫu nhiên và có định hướng.

Trong trường hợp sợi phân tán ngẫu nhiên các kết quả thu được từ mô hình giải tích đã được so sánh với một số kết quả thực nghiệm của vật liệu AlSiC khi nghiên cứu ảnh hưởng của hàm lượng cốt SiC đến tính chất đàn hồi có hiệu của vật liệu tổng hợp. Nghiên cứu đã cho thấy các kết quả thu được từ mô hình khá sát với các kết quả thực nghiệm đồng thời nằm trong biên Voigt – Reuss. Các kết quả giải tích cũng như thực nghiệm đã chứng minh rằng khi các vật liệu cấu thành là đàn hồi đẳng hướng thì vật liệu tổng hợp đó cũng có ứng xử là đàn hồi đẳng hướng với mọi tỷ lệ kích thước.

Mô hình tính toán đã chỉ ra rằng khi sợi được phân tán có định hướng thì ứng xử của

vật liệu tổng hợp sẽ là đẳng hướng ngang, khi tỷ lệ kích thước càng lớn mô đun đàn hồi theo hướng sợi (E_3) sẽ càng tăng. Tuy nhiên khi tỷ lệ kích thước p đạt trên 30 thì E_3 sẽ hầu như không tăng nữa điều này cho phép đưa ra các khuyến cáo khi lựa chọn tỷ lệ kích thước sợi trong nghiên cứu chế tạo FRC nhằm hài hoà giữa mô đun đàn hồi đạt được và thuận lợi trong việc chế tạo FRC.

Trong trường hợp cốt sợi phân bố ngẫu nhiên các kết quả mô phỏng cho thấy tỷ lệ kích thước sợi gần như không ảnh hưởng đến mô đun đàn hồi. Nhận định này cũng tương tự đối với mô đun đàn hồi theo phương vuông góc trong trường hợp cốt sợi được phân bố theo định hướng. Tuy nhiên kết luận này cần được kiểm chứng dựa trên các thí nghiệm thực tế và tính toán lý thuyết bổ sung. Đây cũng chính là điểm hạn chế trong khuôn khổ bài báo. Điều này cũng mở ra một yêu cầu nghiên cứu tiếp theo cho tác giả trong thời gian sắp tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. D. H. Phạm, V. Đ. Đào, D. A. Phạm, T. D. Nguyễn, Đ. H. Nguyễn, Vật liệu mới trong xây dựng công trình giao thông, Xuất bản lần 1, Nhà xuất bản Giao thông Vận tải, Hà Nội, 2018.
- [2]. F. Larrard, T. Sedran, Optimization of ultra high-performance concrete by the use of a packing model, Cement and Concrete Research, 24 (1994) 997 - 1009. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(94\)90022-1](https://doi.org/10.1016/0008-8846(94)90022-1)
- [3]. P. Shtivan, N. Shakor, S. Pimplikar, Glass Fiber Reinforced Concrete Use in Construction, International Journal of Technology and Engineering System, 2 (2011) 2 - 6. https://www.academia.edu/38603404/Glass_Fibre_Reinforced_Concrete_Use_in_Construction
- [4]. J. P. J. G. Ferreira; F. A. B. Branco, The Use of Glass Fiber-Reinforced Concrete as a Structural Material. Experimental Techniques, Society for Experimental Mechanics, 31 (2007) 64 – 73. <https://doi.org/10.1111/j.1747-1567.2007.00153.x>
- [5]. J. Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, Proceedings of the royal society A, 241(1957) 376–386. <https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133>
- [6]. L. M. Brown, D.R. Clarke, The work hardening of fibrous composites with particular reference to the copper – tungsten system, Acta metallurgica, 25 (1976) 563 – 570. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(77\)90196-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(77)90196-1)
- [7]. H. J. Bunge, Texture Analysis in Materials Science, Institut fur Metallkunde und Metallphysik, Technische Universität Clausthal, Germany, 1969.
- [8]. E.C. David, R.W. Zimmerman, Compressibility and shear compliance of spheroidal pores: Exact derivation via the Eshelby tensor, and asymptotic expressions in limiting cases, International Journal of Solids and Structures, 48 (2011) 680 – 686. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.11.001>
- [9]. B. Johannesson, O. B. Pedersen, Analytical determination of the average Eshelby tensor for transversely isotropic fiber orientation distribution, Acta Metallurgica Inc, 46 (1998) 3165 – 3173. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(98\)00003-2](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(98)00003-2)
- [10]. F. Mauro, C. Johnson, Effective elasticities of short – fiber composites with arbitrary orientation distribution, Mechanics of Materials, 8 (1989) 67 – 73. [https://doi.org/10.1016/0167-6636\(89\)90006-9](https://doi.org/10.1016/0167-6636(89)90006-9)
- [11]. K.P. Babu, P.M. Mohite, C.S. Upadhyay, Development of an RVE and its stiffness predictions based on mathematical homogenization theory for short fibre composites, International Journal of Solids and Structures, 130 (2018) 80 – 104. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.10.011>
- [12]. T. Zhao, L. Zhang, M. Huang, Effective elasticity tensors of fiber-reinforced composite materials with 2D or 3D fiber distribution coefficients, Acta Mech, 230 (2019) 4175-4195. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02485-w>
- [13]. BV. Trần, TK. Nguyễn, AT. Trần, ĐH. Nguyễn, Đồng nhất vật liệu nhiều thành phần - Ứng xử tuyến tính, Xuất bản lần 1, Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội, 2019.
- [14]. L. V. Gibiansky, Bounds on the effective moduli of Composite Materials, School on

homogenization ICTP, 1 (1993) 6 – 17.

[15]. H. Sadd, Elasticity - Theory, Application and Numerics, Elsevier, USA, 2005.

[16]. D.H. Nguyen, Analyse asymptotique, modélisation micromécanique et simulation numérique des interfaces courbées rugueuses dans des matériaux hétérogènes, PhD Thesis, Université Paris – Est, France, 2014. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01127312>

[17]. A. Reuss, Berechnung Der Fließgrenze von Mischkristallen Auf Grund Der Plastizitätsbedingung Für Einkristalle, ZAMM - Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik, 9 (1929) 49 – 58. <https://doi.org/10.1002/zamm.19290090104>

[18]. W. Voigt, Ueber Die Beziehung Zwischen Den Beiden Elasticitätsconstanten Isotroper Körper, Annalen Der Physik, 274 (1889) 573 – 87. <https://doi.org/10.1002/andp.18892741206>

[19]. M. K. Premkumar, W. H. Hunt, R. R. Sawtell, Aluminum Composite Materials for Multichip Modules, JOM, 44 (1992) 24 – 28. <https://doi.org/10.1007/BF03222271>

[20]. P. K. Liaw, R.E. Shannon, W.G. Clark, W.C. Harrigan, H. Jeong, D.K. Hsu, Nondestructive Characterization of Material Properties of Metal-Matrix Composites, Materials Chemistry and Physics 39 (1995) 220 – 228. [https://doi.org/10.1016/0254-0584\(94\)01431-F](https://doi.org/10.1016/0254-0584(94)01431-F)

[21]. S.G. Qu, H. S Lou, X. Q. Li, Influence of Particle Size Distribution on Properties of SiC Particles Reinforced Aluminum Matrix Composites with High SiC Particle Content, Journal of Composite Materials 50 (2016) 1049 – 1058. <https://doi.org/10.1177/0021998315586864>