



## DETERMINATION OF NATURAL FREQUENCY DOMAIN OF FREE VIBRATION OF A BEAM WITH AN ANISOTROPIC RESTRAINT THROUGH EXPERIMENT

Do Xuan Quy\*, Luong Xuan Binh,  
Hoang Van Tuan, Ta Thi Hien, Vu Thi Nga

University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

### ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 15/4/2020

Revised: 3/5/2020

Accepted: 12/5/2020

Published online: 28/6/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.5.5>

\* *Corresponding author*

Email: quysbv1@utc.edu.vn; Tel: 0989556088

**Abstract.** Structures with anisotropic restraints are quite commonly used in civil engineering, for instance, beams or plates resting on elastic foundations, tunnel shells and cable structures. A dominant feature of these structures is that the reaction force of the restraint is changed depending on the value and direction of the displacement at the restraint point. This feature leads to the changes in the analytical model, replying virtually on the value of time-varying loads at a specific moment acting on the structures during serviceability. Therefore, the natural period of a beam with the anisotropic restraints is not a constant in comparison with the conventional one without the isotropic restraints. The natural period varies according to the working states of the beam. This paper presents some results of the experimental work to determine a natural frequency domain of the beam with an anisotropic restraint.

**Keywords:** Nonlinear restraints, anisotropic restraints, experiment, finite element, dynamic response, natural frequency.



## XÁC ĐỊNH MIỀN TẦN SỐ DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA DÀM CỐ LIÊN KẾT DỊ HƯỚNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP THỰC NGHIỆM

Đỗ Xuân Quý\*, Lương Xuân Bình,  
Hoàng Văn Tuấn, Tạ Thị Hiền, Vũ Thị Nga

Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

### THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 15/4/2020

Ngày nhận bài sửa: 3/5/2020

Ngày chấp nhận đăng: 12/5/2020

Ngày xuất bản Online: 28/6/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.5.5>

\* Tác giả liên hệ

Email: quysbv1@utc.edu.vn; Tel: 0989556088

**Tóm tắt.** Trong các kết cấu kỹ thuật công trình, kết cấu có liên kết dị hướng được sử dụng khá phổ biến như: kết cấu dầm hoặc tấm trên nền đàn hồi, kết cấu vỏ hầm tựa vào nền, kết cấu dầm, ... Đặc điểm làm việc của loại kết cấu này là phản lực liên kết thay đổi theo độ lớn cũng như chiều của chuyển vị của điểm tựa gối liên kết. Điều này dẫn đến sơ đồ tính của hệ thay đổi theo độ lớn của tải trọng tại từng thời điểm trong quá trình chịu tải. Do đó thời gian để dầm có liên kết dị hướng thực hiện một dao động tự do sẽ không còn là đại lượng bất biến như đối với dầm có liên kết thông thường mà nó thay đổi theo trạng thái làm việc của dầm. Trong bài báo này, tác giả trình bày một số kết quả nghiên cứu thực nghiệm xác định miền tần số dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng.

**Từ khóa:** Liên kết phi tuyến, liên kết dị hướng, thực nghiệm, phần tử hữu hạn, ứng xử động, tần số dao động.

© 2020 Trường Đại học Giao thông vận tải

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các nghiên cứu về dầm có liên kết dị hướng chịu tác dụng của tải trọng động còn ít và chưa được đa dạng. Gần đây có: Nguyễn Xuân Đại [1], phân tích ứng xử động lực học kết cấu đường sắt không Ballast qua mô hình một và hai bậc tự do, trong đó các thành phần đế cao su, đệm tà vẹt, đệm ray đều được mô hình giống như các lò xo hai chiều có thêm thành phần cản nhớt

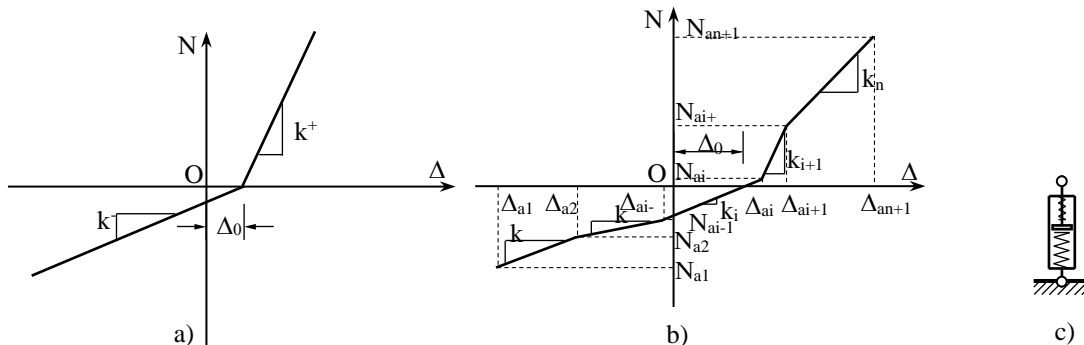
tham gia vào; Z. Celep và các cộng sự [2], tính tác dụng động của dầm dài hữu hạn trên nền di hướng một chiều; Lin Lin và cộng sự [3], tính dầm trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng di động bằng phương pháp giải tích có kể đến sự tách đáy dầm khỏi nền đàn hồi; Diego Froio và các cộng sự [4], phân tích dầm trên nền phi tuyến, dưới tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian di động; P. Castro Jorge và các cộng sự [5], tính tác dụng của dầm hai đầu liên kết khớp trên nền đàn hồi, chịu tác dụng của tải trọng không đổi di động với mô hình nền Winkler, nền một chiều và nền phi tuyến bậc 3; Cristiano Viei Rodrigues [6], phân tích dầm trên nền phi tuyến, chịu tác dụng của bộ dao động di động bằng phương pháp phân tử hữu hạn; D. Froio và các cộng sự [7], phương pháp số tính dầm giản đơn trên nền phi tuyến bậc 3, dưới tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian di động; S.M. Abdelghany và các cộng sự [8], ứng xử của dầm trên nền phi tuyến, chịu tác dụng của tải trọng di động bằng phương pháp Galerkin và Runge-Kutta; Salih N Akour [9], Phân tích động dầm trên nền phi tuyến chịu tác dụng của tải trọng điều hòa phân bố trên bề mặt dầm, sử dụng phương pháp Runge-Kutta để giải toán; Đỗ Xuân Quý và các cộng sự [10], nghiên cứu ứng xử cơ học của thanh có liên kết di hướng chịu tác dụng của tải trọng động; Đỗ Xuân Quý và các cộng sự [11], nghiên cứu thực nghiệm ứng xử của có liên kết di hướng chịu tác dụng của tải trọng động. Các nghiên cứu chủ yếu tập trung vào phân tích lý thuyết từng trường hợp chịu lực cụ thể của dầm có liên kết di hướng.

Đối với kết cấu có liên kết thông thường, trong một mode dao động, tần số dao động riêng của kết cấu có giá trị không đổi. Nhưng đối với kết cấu dầm có liên kết di hướng do tính chất thay đổi sơ đồ làm việc theo trạng thái chuyển vị [10] nên trong một mode dao động, tần số dao động tự do của dầm thay đổi theo trạng thái chuyển vị của dầm. Trong quá trình nghiên cứu về loại kết cấu này, nhóm tác giả phát hiện ra tần số dao động tự do của dầm có liên kết di hướng trong một mode dao động có giá trị thay đổi nhưng các giá trị đó chỉ nằm trong một khoảng giới hạn, tập hợp các giá trị này được gọi là miền tần số dao động tự do của dầm có liên kết di hướng.

Trong bài báo này, nhóm tác giả giới thiệu một thí nghiệm và kết quả xác định miền tần số dao động tự do của dầm có liên kết di hướng trong mode dao động thứ nhất.

## 2. LIÊN KẾT DI HƯỚNG [12]

Trong bài toán cơ học, một liên kết nào đó có thể phân tích thành tổ hợp của một hay nhiều liên kết đơn theo các phương khác nhau. Ở đây, khái niệm liên kết di hướng được mô tả cho một liên kết đơn như vậy.



Hình 1. Mô hình liên kết di hướng.

Liên kết di hướng là loại liên kết mà theo một phương chịu lực, tính chất cơ học của liên kết khác nhau theo hai chiều của chuyển vị điểm liên kết. Quan hệ giữa phản lực liên kết và

chuyển vị của điểm liên kết được thể hiện trên hình 1 và công thức (1), công thức (2).

Hình 1a làm mô hình liên kết dị hướng có độ cứng thay đổi khi đổi chiều của chuyển vị điểm liên kết. Hình 1b là mô hình liên kết dị hướng nhiều lần tuyến tính. Hình 1c là ký hiệu liên kết dị hướng.

Quan hệ toán học giữa phản lực liên kết và chuyển vị của điểm liên kết được mô tả:

- Liên kết dị hướng (tương ứng với hình 1a):

$$N = \frac{k^+ + k^-}{2} (\Delta - \Delta_0) - \frac{k^+ - k^-}{2} |\Delta - \Delta_0|. \quad (1)$$

- Liên kết dị hướng nhiều lần tuyến tính (tương ứng với hình 1b):

$$N = N_{ai} + k_i (\Delta - \Delta_{ai}) \quad \text{với} \quad \Delta_{ai} \leq \Delta \leq \Delta_{ai+1}. \quad (2)$$

Trong đó:

$N$  là phản lực liên kết;

$\Delta$  là chuyển vị của điểm liên kết;

$\Delta_0$  là độ lệch ban đầu của liên kết;

$k^+, k^-$  là độ cứng của liên kết ứng với chuyển vị dương và chuyển vị âm của điểm liên kết;

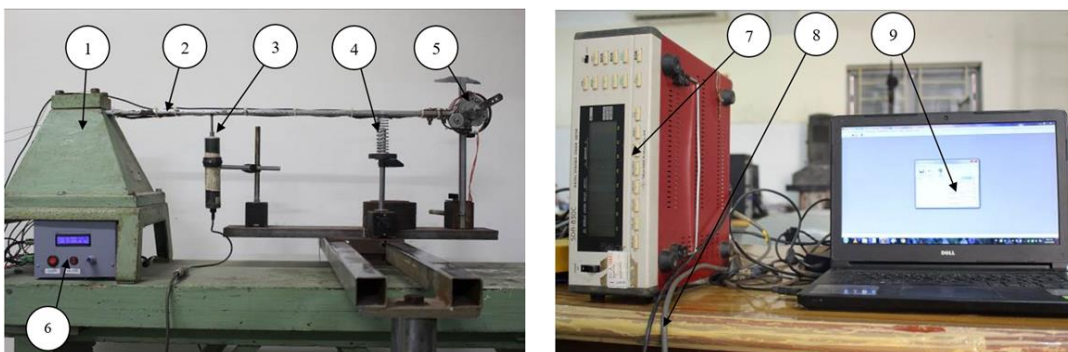
$\Delta_{ai}$  là các độ lệch (so với gốc tọa độ) của điểm đầu đoạn tuyến tính thứ  $i$ ;

$k_i$  là độ cứng của liên kết ứng với đoạn tuyến tính thứ  $i$ ;

$N_{ai}$  là phản lực liên kết ứng với chuyển vị điểm liên kết  $\Delta_{ai}$ .

### 3. MÔ HÌNH THÍ NGHIỆM

Hình 2 là hình ảnh của mô hình thí nghiệm ứng xử động của dầm có liên kết dị hướng. Dầm làm bằng thép có mô đun đàn hồi  $E = 2.10^{11} \text{ N/m}^2$ , có khối lượng riêng  $\rho = 7830 \text{ kg/m}^3$ , có chiều dài  $L = 0,778 \text{ m}$ , có mặt cắt ngang dạng chữ nhật với chiều rộng  $b = 39,650.10^{-3} \text{ m}$  và chiều cao  $h = 8,300.10^{-3} \text{ m}$ . Tại mặt cắt cách ngàm 0,230 m bố trí thiết bị đo chuyển vị động của dầm theo thời gian. Tại mặt cắt cách ngàm 0,590 m được đặt một lò xo có độ cứng bằng 3094,395 N/m, khe hở giữa đáy dầm và đỉnh lò xo là 0,004 m, mặt cắt đầu tự do được đặt một động cơ có trọng lượng  $Q = 13,734 \text{ N}$  và khối lượng lệch tâm  $m = 13,350.10^{-3} \text{ kg}$  với bán kính lệch tâm  $r = 0,045 \text{ m}$ .



Hình 2. Mô hình thí nghiệm dầm có liên kết dị hướng.

Trong đó: 1 - Bộ đỡ dầm, 2 - Dầm, 3 - Đầu đo chuyển vị động, 4 - Lò xo, 5 - Động cơ,

6 – Bộ điều chỉnh tốc độ động cơ, 7 – Máy động SDA 830C, 8 – Cáp chuyển tín hiệu từ đầu đo chuyển vị vào máy SDA 830C, 9 – Máy tính kết nối với máy động SDA 830C để lấy dữ liệu đo được.

Kích thích cho dầm dao động, đỉnh lò xo và đáy dầm sẽ tiếp xúc với nhau khi dầm chuyển vị xuống dưới quá 0,004m và tách xa nhau khi dầm chuyển vị ngược lại. Lò xo lúc đó làm việc như một liên kết dị hướng có quan hệ giữa phản lực liên kết và chuyển vị điểm liên kết như công thức (1) với các thông số: độ cứng chuyển vị dương  $k^+ = 3094,395$  N/m, độ cứng chuyển vị âm  $k^- = 0$ , độ lệch ban đầu  $\Delta_0 = -0,004$  m.

Theo [10], dầm có liên kết dị hướng sẽ dao động (trong môi trường không có lực cản) với các tần số khác nhau ứng với chuyển vị ban đầu khác nhau. Để xác định được tần số dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng bằng thực nghiệm, tác giả thực hiện kích thích cho dầm dao động, dùng thiết bị đo dao động để đo được dao động của dầm theo thời gian. Sau đó sử dụng hàm FFT được cung cấp trong Matlab để chuyển đổi dao động từ miền thời gian sang miền tần số. Từ biểu đồ dao động biểu diễn trong miền tần số, tác giả xác định được tần số dao động tự do của dầm.

Và cũng theo [10], chu kỳ dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng thay đổi trong một miền xác định, cũng có nghĩa là tần số dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng là một miền xác định. Để xác định được tần số dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng, tác giả kích thích cho dầm dao động ở các chuyển vị ban đầu khác nhau (trường hợp môi trường không có lực cản), thu được tập hợp các giá trị tần số dao động tự do, gọi là miền tần số dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng. Do công tác thực nghiệm được thực hiện trên dầm thực, dao động trong không khí nên dao động của hệ bị cản trở do ma sát với không khí, do tính nhớt của vật liệu làm dầm. Năng lượng dao động của hệ nói chung, chuyển vị của hệ nói riêng bị giảm dần theo thời gian dẫn đến tần số dao động tự do của dầm thí nghiệm bị thay đổi. Theo đó, khi kích thích cho dầm thí nghiệm một chuyển vị ban đầu thật lớn, sau một khoảng thời gian đủ lớn dao động của hệ cũng sẽ bị tắt, thiết bị sẽ đo được dao động của hệ ở tất cả các chuyển vị khác nhau, chuyển biểu diễn sang miền tần số sẽ ghi nhận được miền tần số dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng.

Tuy nhiên do việc đo dao động của hệ là ghi nhận các số liệu rời rạc ở các thời điểm khác nhau, kết hợp với việc xử lý số khi chuyển biểu diễn dao động từ miền thời gian sang miền tần số dẫn đến sau mỗi lần thí nghiệm chỉ có thể xác định được một số tần số dao động tự do đặc trưng của dầm. Vì vậy, để tìm được miền tần số dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng, tác giả thực hiện một số thí nghiệm với các kích thích ban đầu khác nhau, miền tần số dao động tự do của hệ được coi là miền liên tục chứa tất cả các giá trị tần số dao động tự do thu được ở tất cả các lần thí nghiệm.

#### 4. KẾT QUẢ THÍ NGHIỆM

Các kịch bản thí nghiệm được thực hiện:

- Xác định tần số dao động tự do của dầm không có liên kết dị hướng;
- Xác định miền tần số dao động tự do của dầm bằng cách cho dầm dao động với các kích thích khác nhau ở đầu tự do của dầm;
- Thí nghiệm ứng xử động của dầm có liên kết dị hướng khi chịu kích thích của lực có tần số nằm trong, nằm ngoài miền tần số dao động tự do.

#### 4.1. Xác định tần số dao động tự do của dầm thí nghiệm khi không có liên kết dị hướng

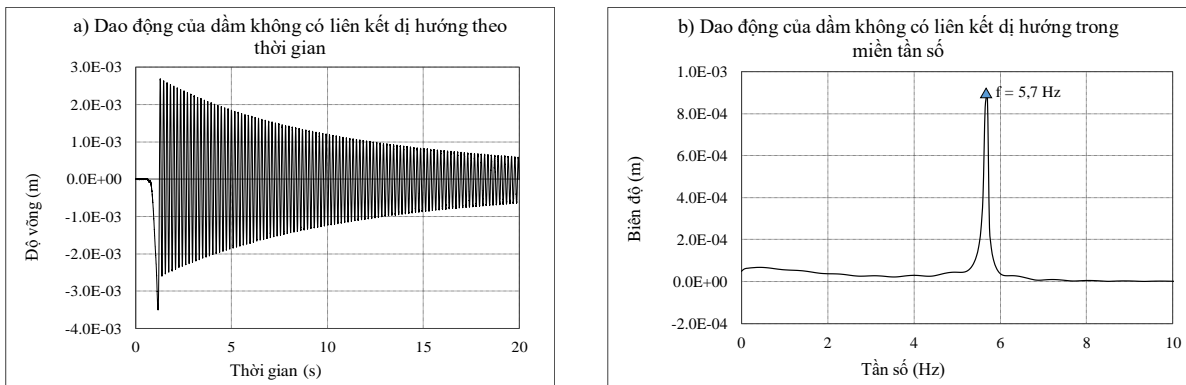
- Để chứng tỏ phương pháp xác định tần số dao động tự do của dầm bằng thực nghiệm là đáng tin cậy, tác giả thực hiện xác định tần số dao động tự do của dầm thí nghiệm như trên hình 2 trong trường hợp không có lò xo 4. Khi không có lò xo 4 ở phía dưới, dầm thí nghiệm 2 làm việc như một dầm có liên kết thông thường. Tần số dao động tự do xác định được từ thí nghiệm sẽ được so sánh với kết quả phân tích số để thấy được độ tin cậy của phương pháp xác định tần số dao động tự do của dầm mà tác giả kiến nghị.

- Xác định tần số dao động tự do của dầm thí nghiệm khi không có lò xo 4 bằng thực nghiệm:

Trình tự xác định tần số dao động tự do của dầm được tác giả thực hiện như sau:

- + Đo dao động của dầm khi cho một kích thích bất kỳ như hình 3.a;
- + Dùng hàm FFT trong Matlab chuyển dao động đo được sang miền tần số như hình 3.b;
- + Xác định tần số dao động tự do của dầm.

Kết quả xác định tần số dao động tự do của dầm bằng phương pháp thực nghiệm được thể hiện trong hình 3. Hình 3.a là biểu đồ dao động của hệ theo thời gian, cho thấy biên độ dao động của dầm giảm dần theo thời gian do hệ dao động trong môi trường có lực cản. Tuy vậy, dầm thí nghiệm là một hệ đàn hồi tuyến tính nên tần số dao động tự do của hệ không đổi sau mỗi chu kỳ dao động. Hình 3.b là biểu đồ dao động của hệ trong miền tần số, cho thấy tần số dao động tự do của dầm thí nghiệm là  $f^{TN} = 5,7 \text{ Hz}$ .



Hình 3. Kết quả đo dao động tự do của dầm có liên kết thông thường.

- Xác định tần số dao động dầm thí nghiệm bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Theo [13], tần số dao động tự do của dầm thí nghiệm được xác định bằng cách giải phương trình trị riêng (3).

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0. \quad (3)$$

Trong đó:  $[K]$  – ma trận độ cứng tổng thể rút gọn của hệ;  $[M]$  – ma trận khối lượng tổng thể rút gọn của hệ;  $\omega$  – tần số góc của hệ.

Dầm thí nghiệm được chia thành 1 phần tử, các thông số của dầm thí nghiệm được đưa vào phương trình (3), và biến đổi được phương trình (4).

$$18,264 \cdot 10^{-3} \omega^4 - 3691,566 \omega^2 + 4676439,228 = 0. \quad (4)$$

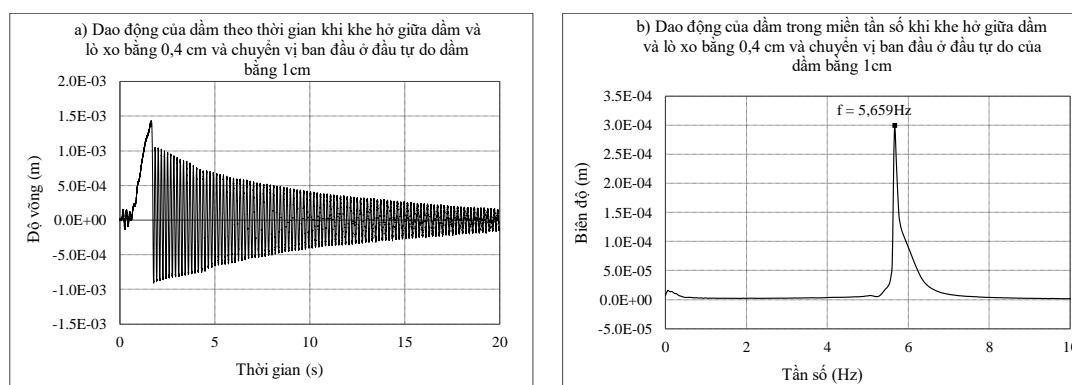
Phương trình (4) có bốn nghiệm:  $\omega_{1,2} = \pm 35,705 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{3,4} = \pm 448,157 \text{ rad/s}$ . Nghiệm  $\omega_1 = 35,705 \text{ rad/s}$  tương ứng với mode dao động đầu tiên của dầm thí nghiệm. Tần số dao động tự do ở mode dao động thứ nhất của dầm thí nghiệm là  $f^{PTS} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{35,705}{2\pi} = 5,683 \text{ Hz}$ .

- Kết quả xác định tần số dao động tự do của dầm thí nghiệm không có liên kết dị hướng bằng phương pháp thí nghiệm và phương pháp phần tử hữu hạn rất gần nhau, cụ thể  $f^{TN} = 5,7 \text{ Hz}$ ,  $f^{PTS} = 5,683 \text{ Hz}$ , sai số  $\varepsilon = 0,299\%$ . Điều này chứng tỏ mô hình thí nghiệm, phương pháp xác định tần số dao động tự do của hệ là hợp lý, có thể tin tưởng để thực hiện các thí nghiệm phức tạp hơn.

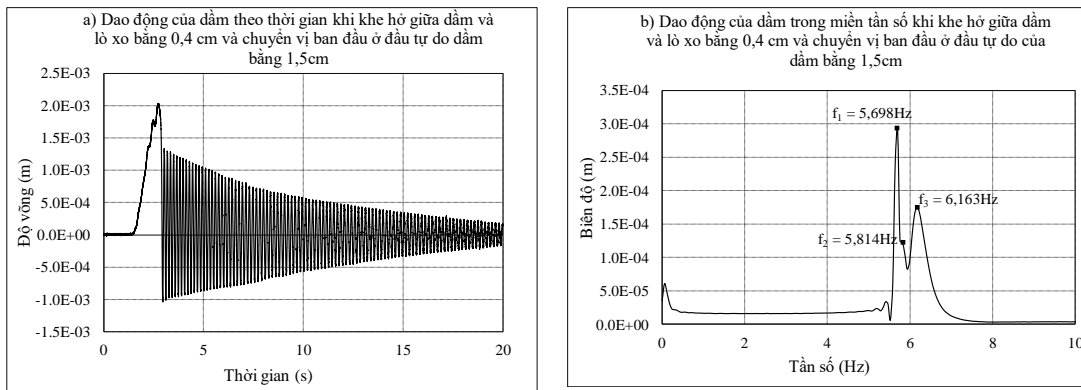
#### 4.2. Xác định miền tần số dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng

Sử dụng phương pháp xác định tần số như phần 4.1 với kết cấu dầm có liên kết dị hướng như mô hình thí nghiệm trên hình 2. Tác giả thực hiện với các kích thích ban đầu với độ võng tại đầu tự do của dầm lần lượt là 1cm, 1,5cm, 2cm, 2,5cm, 3cm, và 3,5cm. Kết quả thí nghiệm được thể hiện trên các hình 4, 5, 6, 7, 8, 9 và bảng 1.

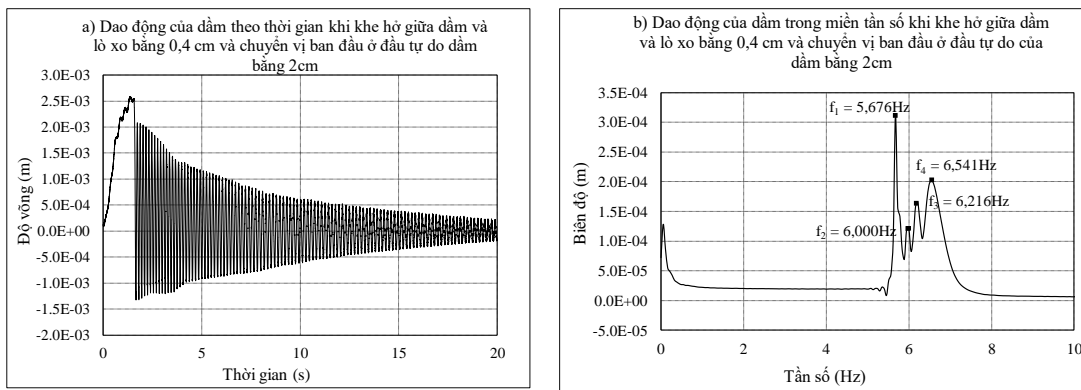
Kết quả thí nghiệm cho thấy, ở các trường hợp cho chuyển vị ban đầu ở đầu tự do nhỏ cho phép xác định được số lượng tần số dao động tự do là ít hơn, miền tần số dao động tự do cũng hẹp hơn. Khi tăng dần chuyển vị ban đầu của đầu tự do dầm thì miền tần số dao động tự do được mở rộng hơn (bảng 1). Nguyên nhân là do khi chuyển vị ban đầu của đầu tự do dầm nhỏ, dẫn đến sự thay đổi chuyển vị của dầm là nhỏ trong cả quá trình dao động, kéo theo sự thay đổi về tần số dao động tự do của hệ nhỏ. Kết quả là chỉ tìm được một tần số dao động tự do như trường hợp hình 4, miền tần số dao động tự do nhỏ như trường hợp hình 5. Ngược lại, khi chuyển vị ban đầu của đầu tự do dầm lớn như hình 9, miền tần số dao động tự do lớn hơn rất nhiều.



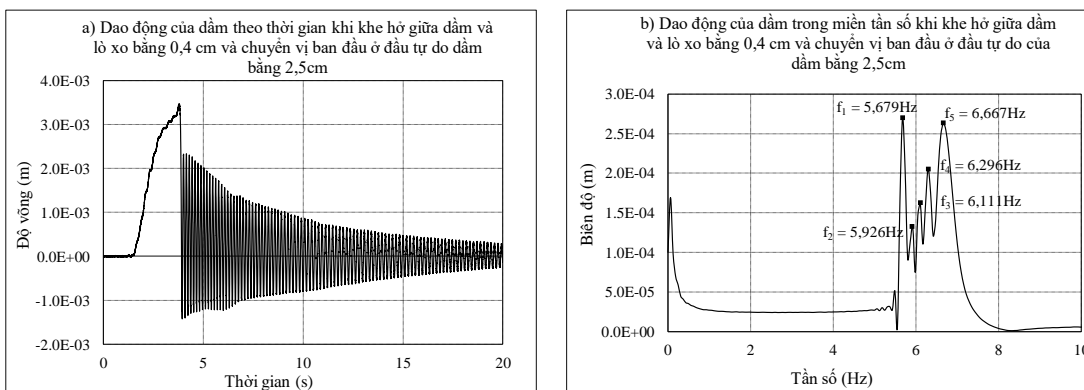
Hình 4. Kết quả đo dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng với chuyển vị ban đầu ở đầu tự do dầm bằng 1cm.



Hình 5. Kết quả đo dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng với chuyển vị ban đầu ở đầu tự do dầm bằng 1,5cm.

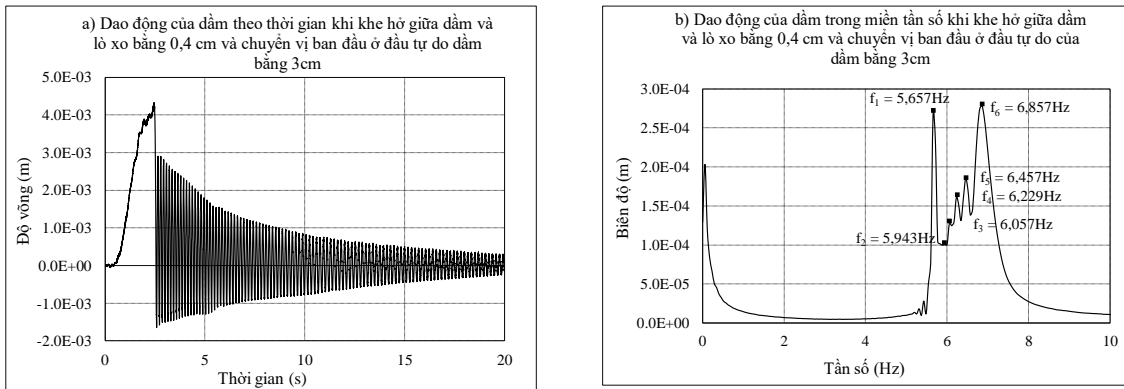


Hình 6. Kết quả đo dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng với chuyển vị ban đầu ở đầu tự do dầm bằng 2 cm.

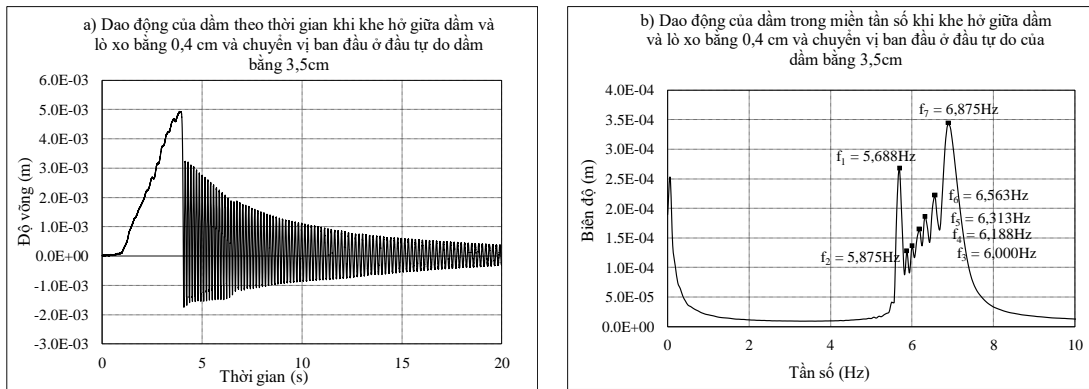


Hình 7. Kết quả đo dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng với chuyển vị ban đầu ở đầu tự do dầm bằng 2,5cm.

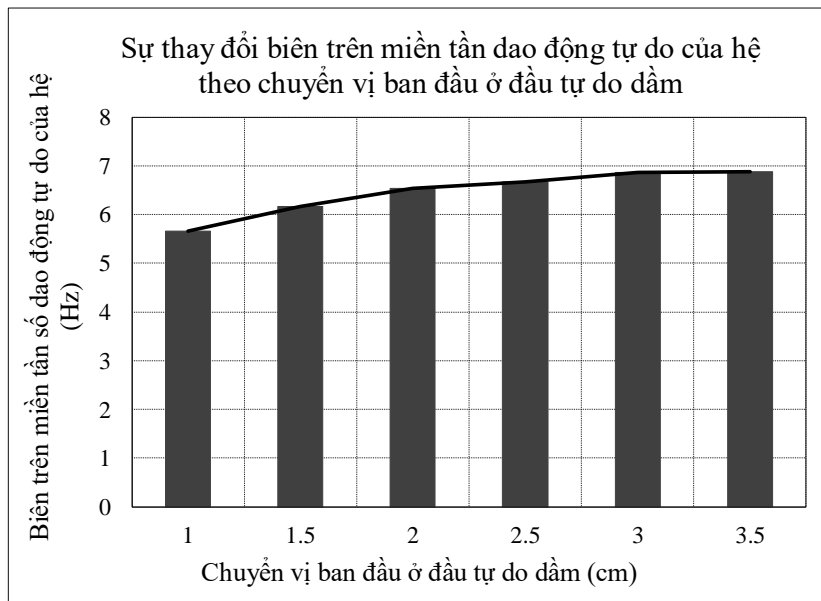




Hình 8. Kết quả đo dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng với chuyển vị ban đầu ở đầu tự do dầm bằng 3cm.



Hình 9. Kết quả đo dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng với chuyển vị ban đầu ở đầu tự do dầm bằng 3,5cm.



Hình 10. Biểu đồ biểu diễn sự thay đổi của biên trên miền tần số dao động tự do của hệ theo độ lớn của chuyển vị ban đầu ở đầu tự do dầm.

Bảng 1. Kết quả xác định miền tần số dao động tự do của hệ bằng thực nghiệm.

| Miền tần số |                   | Các trường hợp thí nghiệm có chuyển vị ban đầu ở đầu dầm tự do dầm khác nhau (cm) |       |       |       |       |       |
|-------------|-------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
|             |                   | 1   | 1,5   | 2     | 2,5   | 3     | 3,5   |
| Biên trên   | Trị số (Hz)       | 5,659   | 6,163 | 6,541 | 6,667 | 6,857 | 6,875 |
|             | $\varepsilon$ (%) |   | 8,906 | 6,133 | 1,926 | 2,85  | 0,263 |
| Biên dưới   | Trị số (Hz)       | 5,659   | 5,698 | 5,676 | 5,679 | 5,657 | 5,688 |
|             | $\varepsilon$ (%) |   | 0,689 | 0,386 | 0,053 | 0,387 | 0,548 |

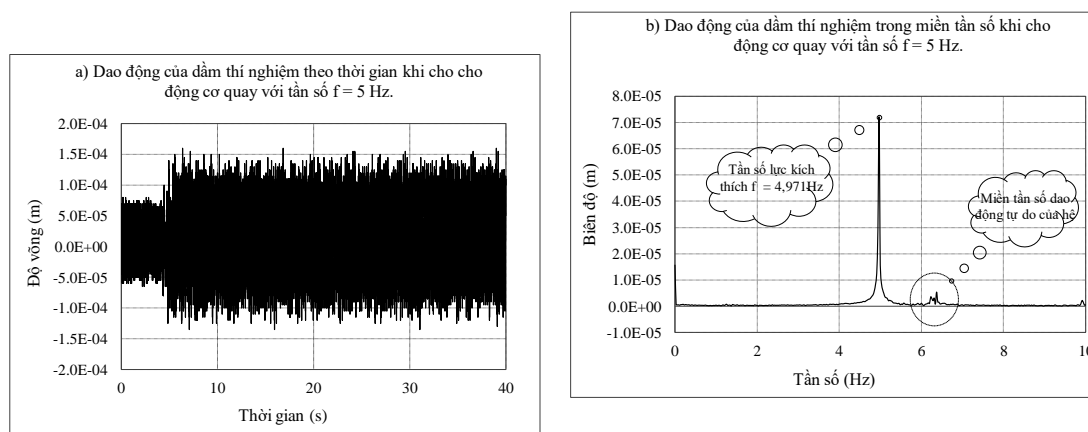
Độ rộng của miền tần số dao động tự do của dầm tăng theo chiều tăng của chuyển vị ban đầu của đầu tự do dầm nhưng nó cũng có giới hạn. Biên dưới của miền tần số dao động tự do gần như không đổi giữa các lần thí nghiệm, sai số lớn nhất chỉ là 0,689% (bảng 1). Biên trên của nó có tốc độ tăng giảm dần, có xu thế tiệm cận với một giá trị không đổi (hình 10). Khi biên trên của miền tần số dao động tự do đạt đến trị số không đổi, miền giá trị thu được là miền tần số dao động tự do của hệ. Trên hình 10 và bảng 1 cho thấy ở hai lần thí nghiệm với chuyển vị ban đầu của đầu tự do dầm là 3 cm và 3,5 cm, biên trên của miền tần số dao động tự do xác định được có chênh lệch chỉ còn 0,263%.

Như vậy, miền tần số dao động tự do của hệ tìm được là từ 5,688 Hz đến 6,875 Hz.

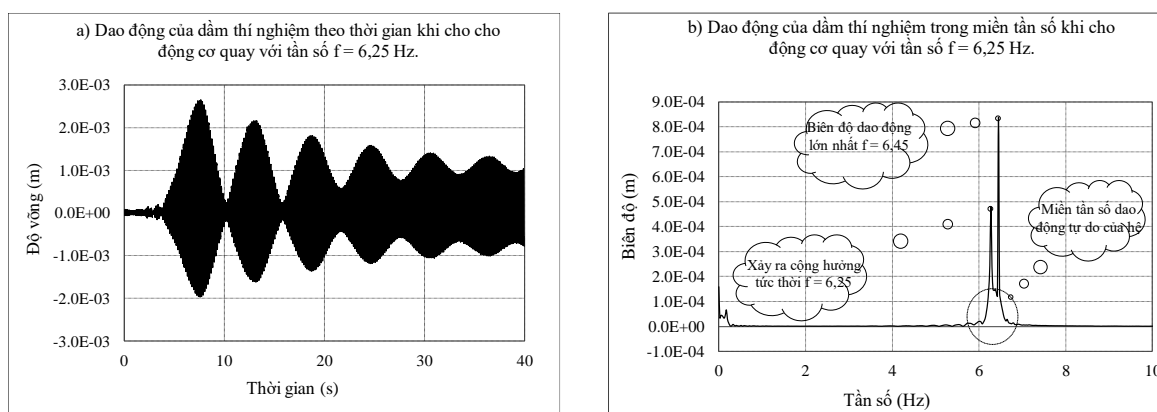
### 4.3. Ứng xử của dầm có liên kết dị hướng khi chịu tác dụng của lực kích có tần số nằm trong, ngoài miền tần số dao động tự do

Từ kết quả nghiên cứu ở trên, tác giả thu được miền tần số dao động tự do của dầm thí nghiệm là từ 5,688 Hz đến 6,875 Hz. Để kiểm nghiệm ứng xử của dầm thí nghiệm dưới tác dụng của tải trọng kích thích có tần số nằm trong và ngoài miền tần số dao động riêng của hệ, tác giả cho động cơ được gắn ở đầu tự do của dầm quay với các tần số  $f = 5$  Hz và 6,25 Hz. Kết quả thực nghiệm được thể hiện trong hình 11 và hình 12.

Hình 11 cho thấy, khi tần số của lực kích thích (tốc độ của động cơ) nằm ngoài miền tần số dao động tự do của dầm, không xảy ra hiện tượng cộng hưởng. Biên độ dao động của dầm không có sự tăng lên sau mỗi chu kỳ dao động. Hình 11.b cho thấy độ lớn của biên độ dao động có được chủ yếu là do lực kích thích.



Hình 11. Dao động của dầm thí nghiệm khi chịu tác dụng của lực kích thích có tần số nằm ngoài miền tần số dao động tự do của nó.



Hình 12. Dao động của dầm thí nghiệm khi chịu tác dụng của lực kích thích có tần số nằm trong miền tần số dao động tự do của nó.

Hình 12 là trường hợp động cơ được quay với tần số  $f = 6,25$  Hz, nằm trong miền tần số dao động tự do của dầm thí nghiệm. Trên hình cho thấy dao động của dầm thí nghiệm đã xảy ra hiện tượng cộng hưởng. Tuy nhiên so với kết cấu thông thường có sự khác biệt lớn, đối với dầm có liên kết thông thường chỉ xảy ra hiện tượng cộng hưởng khi tần số lực kích thích bằng tần số dao động riêng của hệ, khi chuyển sang miền tần số thì biên độ dao động lớn nhất sẽ ứng với dao động có tần số bằng tần số của lực kích thích, biên độ của của dao động cũng liên tục tăng cho đến khi tác dụng tăng biên độ của lực kích thích bằng tiêu hao do lực cản của hệ. Ngược lại với kết cấu dầm có liên kết dị hướng, ngay khi xảy ra cộng hưởng biên độ dao động của hệ bị tăng lên, ngay khi đó tần số dao động tự do của hệ bị thay đổi, mất hiện tượng cộng hưởng, tác dụng tăng biên độ do lực kích thích bị giảm, dẫn đến biên độ dao động của dầm tăng giảm lặp đi lặp lại như hình 12.a và khi chuyển sang miền tần số thì dao động có biên độ lớn nhất có tần số không bằng tần số lực kích thích.

Như vậy, một lần nữa có thể khẳng định rằng dầm có liên kết dị hướng có tần số dao động tự do thay đổi nằm trong một miền giá trị gọi là miền tần số dao động tự do của hệ. Và hệ xảy ra hiện tượng cộng hưởng khi tần số lực kích thích bằng tần số dao động tự do của hệ. Sự cộng hưởng tự mất đi sau một khoảng thời gian ngắn do kết cấu tự thay đổi tần số dao động tự do của nó.

## 5. KẾT LUẬN

- Tác giả đã xây dựng được mô hình thí nghiệm ứng xử động của dầm có liên kết dị hướng.
- Tác giả đã giới thiệu phương pháp cũng như kết quả xác định miền tần số dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng.
- Thông qua thí nghiệm tác giả đã chứng tỏ tính hợp lý của một kết luận mà tác giả đã nghiên cứu ở phương diện lý thuyết được công bố trong [14]:
  - + Tần số dao động tự do của dầm có liên kết dị hướng phụ thuộc vào chuyển vị ban đầu gây ra cho dầm dao động trong môi trường không có cản (cũng đồng nghĩa với biên độ hay năng lượng dao động);
  - + Tập hợp các giá trị tần số dao động tự do của dầm trong một mode dao động là một miền giá trị được gọi là miền tần số dao động tự do của hệ;

+ Dầm có liên kết dị hướng chỉ bị cộng hưởng khi chịu tác dụng của lực kích thích có tần số bằng tần số dao động tự do của hệ và sự cộng hưởng tự mất đi sau một khoảng thời gian ngắn do kết cấu tự thay đổi tần số dao động tự do của nó.

## LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường đại học Giao thông vận tải trong đề tài mã số T2019-CT-019. Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô Bộ môn Sức bền vật liệu đã tư vấn về mặt khoa học và hỗ trợ công tác thí nghiệm trong quá trình thực hiện đề tài.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Nguyễn Xuân Đại, Phân tích ứng xử động lực học kết cấu đường sắt không Ballast qua mô hình 1 và 2 bậc tự do, Tạp chí KHCN Xây dựng, 2 (2014) 10-18.
- [2]. Z. Celep, K. Güler, F. Demir, Response of a completely free beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to dynamic load, Structural Engineering and Mechanics, 37 (2011) 61-77. <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2011.37.1.061>
- [3]. Lin Lin, G.G Adams, Beam on Tensionless Elastic Foundation, Journal of Engineering Mechanics 113 (1987) 542-553. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1987\)113:4\(542\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:4(542))
- [4]. Diego Froio, Egidio Rizzi, Fernando M.F. Simões, A. Pinto da Costa, Critical velocities of a beam on nonlinear elastic foundation under harmonic moving load, Procedia Engineering, 199 (2017) 2585-2590. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.348>
- [5]. P. Castro Jorge, F.M.F. Simões, A. Pinto da Costa, Finite element dynamic analysis of beams on non-uniform nonlinear viscoelastic foundations under moving loads, Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURO DYN 2014, Portugal, 2014, pp.841-845.
- [6]. C. Rodrigues, F.M.F. Simões, A. Pinto da Costa, D. Froio, E. Rizzi, Finite element dynamic analysis of beams on nonlinear elastic foundations under a moving oscillator, European Journal of Mechanics - A/Solids, 68 (2018) 9-24. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.10.005>
- [7]. D. Froio, R. Moiola, E. Rizzi, Numerical dynamic analysis of beams on nonlinear elastic foundation under harmonic moving load, ECCOMAS Congress 2016, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Greece, 2016, pp. 4794-4809. <https://doi.org/10.7712/100016.2149.7515>
- [8]. S. M. Abdelghany, K.M. Ewis, A.A. Mahmoud, M.M. Nassar, Dynamic response of non-uniform beam subjected to moving load and resting on non-linear viscoelastic foundation, Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Sciences, 4 (2015) 192-199. <https://doi.org/10.1016/j.bjbas.2015.05.007>
- [9]. Salih N Akour, Dynamics of Nonlinear Beam on Elastic Foundation, Proceedings of the World Congress on Engineering 2010, London, U.K, 2010.
- [10]. Đỗ Xuân Quý, Lương Xuân Bình, Hà Văn Quân, Hoàng Văn Tuấn, Nghiên cứu ứng xử cơ học của thanh có liên kết dị hướng chịu tác dụng của tải trọng động, Tuyển tập công trình khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn lần thứ XIV, TP. HCM, 2018, 549-556. ISBN: 978-604-913-832-4.
- [11]. Do Xuan Quy, Ta Thi Hien, Luong Xuan Binh, Hoang Van Tuan, Le Thanh Tam, Experimental research on dynamic response of beams with anisotropic restraints, The 5th international Conference on Engineering Mechanics and Automation, Ha Noi, 98-104, 2019.
- [12]. Lương Xuân Bình, Đỗ Xuân Quý, Nguyễn Xuân Lựu, Tính toán kết cấu có liên kết dị hướng bằng phương pháp phần tử hữu hạn, Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 8, NXB Bách Khoa Hà Nội, Hà Nội, 57-68, 2007.
- [13]. Nguyễn Xuân Lựu, Phương pháp phần tử hữu hạn, NXB Giao thông Vận tải, Hà Nội, 2007.
- [14]. Đỗ Xuân Quý, Tính toán kết cấu thanh có liên kết dị hướng chịu tác dụng của tải trọng động, Đề tài nghiên cứu khoa học cấp trường MS: T2018-CT-018, Đại học Giao thông vận tải, 2018.
- [15]. Vũ Đình Lai, Sức Bền Vật Liệu, NXB Giao thông Vận tải, Hà Nội, 2010.