



TREATMENT OF SINGULARITIES IN BOUNDARY ELEMENT METHOD AND APPLICATION IN DARCY'S FLOW THROUGH POROUS MEDIA

Tran Anh Tuan^{1,3*}, Nguyen Dinh Hai^{2,3}

¹Section of Bridge and Tunnel Engineering, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

²Section of Materials of Construction, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

³Research and Application Center for Technology in Civil Engineering (RACE), University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 12/12/2019

Revised: 24/3/2020

Accepted: 29/3/2020

Published online: 24/4/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.3.7>

* *Corresponding author*

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Abstract. The potential equation such as Poisson and Laplace, describes the behavior of many varied physical situations. The boundary element method has been used successfully to determinate accurate solutions of this potential problem. The basic of this method is the expression of the solution in terms of the boundary values by applying Green's identity and its fundamental solution. However, one difficulty that arises in the boundary element method is the treatment of kernel singularities appear in integrals. This work presents an improved technique for the evaluation of singular values that appear in the solution of two-dimensional Darcy's flow through porous media using the boundary element method. In this case study, the singularities are removed by employing a finite difference scheme and an analytical integration scheme. The comparative results of the velocity and pressure fields of Darcy's flow determined by the present method and the finite element method showed the accuracy as well as efficiency of the proposal approach.

Keywords: singularity, boundary element method, potential equation, Darcy's flow.

© 2020 University of Transport and Communications



XỬ LÝ TÍNH SUY BIẾN TRONG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ BIÊN VÀ ỨNG DỤNG CHO DÒNG CHẢY DARCY QUA MÔI TRƯỜNG VẬT LIỆU RỖNG

Trần Anh Tuấn^{1,3*}, Nguyễn Đình Hải^{2,3}

¹Bộ môn Cầu hầm, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

²Bộ môn Vật liệu xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

³Trung tâm nghiên cứu và ứng dụng công nghệ xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 12/12/2019

Ngày nhận bài sửa: 24/3/2020

Ngày chấp nhận đăng: 29/3/2020

Ngày xuất bản Online: 24/4/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.3.7>

* *Tác giả liên hệ*

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Tóm tắt. Phương trình thế năng như phương trình Poisson và Laplace miêu tả ứng xử của một vài hiện tượng vật lý khác nhau. Phương pháp phần tử biên đã được sử dụng thành công để xác định nghiệm chính xác của bài toán thế năng. Cơ sở của phương pháp này là biểu diễn nghiệm dưới dạng hàm của các giá trị biên bằng cách áp dụng đồng nhất thức Green và nghiệm số cơ bản của nó. Tuy nhiên khó khăn nảy sinh trong phương pháp phần tử biên là việc xử lý các nhân suy biến xuất hiện trong các biểu thức tích phân. Nghiên cứu này giới thiệu kỹ thuật cải tiến để xác định các giá trị suy biến xuất hiện trong trường nghiệm của dòng chảy Darcy hai chiều qua môi trường vật liệu rỗng. Trong bài toán này, sự suy biến được loại bỏ bằng cách ứng dụng sơ đồ sai phân hữu hạn và giải tích tích phân. Kết quả so sánh cho trường vận tốc và áp suất của dòng chảy Darcy xác định bằng phương pháp này và bằng phương pháp phần tử hữu hạn cho thấy sự chính xác và hiệu quả của phương pháp đề xuất.

Từ khóa: suy biến, phương pháp phần tử biên, phương trình thế năng, dòng chảy Darcy.

© 2020 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Những vật liệu như đất, cát, đá, bê tông, bê tông nhựa và các vật liệu tổng hợp khác được sử dụng trong lĩnh vực xây dựng nói chung và ngành kỹ thuật xây dựng công trình giao thông nói riêng được xác định là loại vật liệu rỗng. Trong đó đặc tính thấm là một trong những tính chất quan trọng cần được phân tích một cách chi tiết khi nghiên cứu, ứng dụng loại vật liệu này. Để phân tích, nắm bắt được tính chất đó, các nhà nghiên cứu sử dụng nhiều phương pháp như thực nghiệm, giải tích và mô phỏng số. Bản chất của việc phân tích bài toán thấm là tìm lời giải cho trường vận tốc và áp suất thỏa mãn phương trình Darcy biểu diễn dưới đây

$$\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{K}{\mu} \nabla \hat{p}(\hat{\mathbf{x}}) \quad \hat{\mathbf{x}}(\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega, \quad (1)$$

trong đó $\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}$ là trường vận tốc và áp suất tại điểm $\hat{\mathbf{x}}(\hat{x}, \hat{y})$ thuộc miền vật liệu rỗng đang xem xét Ω . K, μ lần lượt là độ thấm của vật liệu rỗng và hệ số nhớt động lực học của chất lỏng chảy trong lỗ rỗng. ∇ là toán tử gradient.

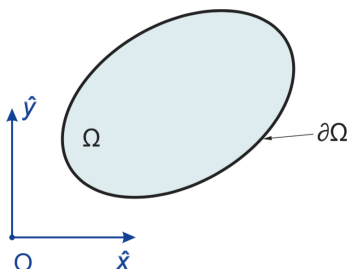
Những năm gần đây, sự phát triển bùng nổ của khoa học máy tính đã hỗ trợ mạnh mẽ cho các phương pháp mô phỏng số. Một trong những phương pháp mô phỏng số tỏ ra hữu hiệu cho bài toán thấm của vật liệu rỗng là phương pháp phần tử biên. Có thể kể ra sau đây một số nghiên cứu về đặc tính thấm có sử dụng phương pháp phần tử biên như nghiên cứu của Arcila và cộng sự năm 2016, 2018 [1,2], của Teimoori và cộng sự năm 2005 [3], của Onyejekwe năm 1998 [4]. Trong phương pháp phần tử biên dành cho bài toán Darcy, trường nghiệm gồm áp suất và vận tốc được biểu diễn dưới dạng hàm tích phân của các giá trị trên biên chưa biết, bao gồm áp suất và đạo hàm của nó theo phương pháp tuyến với biên. Các giá trị biên này phải được xác định bằng cách giải một hệ phương trình tuyến tính được xây dựng trên cơ sở các điều kiện biên của bài toán Darcy. Sau khi có được các giá trị biên, áp suất và vận tốc của dòng chảy Darcy tại mọi nơi trên miền tính toán được xác định thông qua các hàm tích phân tương ứng.

Phương pháp phần tử biên tỏ ra hiệu quả trong việc giải ra kết quả số (numerical results) cho các phương trình vi phân mô tả ứng xử của các hiện tượng vật lý, cụ thể trong nghiên cứu này là cột nước thấm của vật liệu rỗng. Tuy nhiên phương pháp này cũng tồn tại những nhược điểm, một trong số đó là tính suy biến của nghiệm tại một số vị trí đặc biệt trên miền tính toán, đây cũng chính là tồn tại lớn nhất mà những người nghiên cứu, sử dụng phương pháp phần tử biên quan tâm song song với sự hình thành và phát triển của phương pháp số này. Tính suy biến xuất hiện do sự tồn tại của các biểu thức suy biến (hay còn gọi là nhân suy biến) dưới dấu tích phân của phương trình tích phân biên, biểu thức suy biến tồn tại chủ yếu dưới hai dạng là suy biến yếu (weak singularity) và suy biến mạnh (strong singularity). Việc loại bỏ tính suy biến được nói đến trong nhiều sách hướng dẫn cũng như công bố trên thế giới, người đọc có thể tìm hiểu kỹ hơn về vấn đề này trong các tài liệu của Katsikadelis năm 2002 [5], của Gaul, Kogl và Wagner năm 2003 [6], Brebbia, Telles và Wrobel năm 1984 [7], của Dehghan và Hosseinzadeh năm 2012 [8], của Marin và cộng sự năm 2004 [9], của Huang và Cruse năm 1993 [10], và của Sladek và Sladek năm 1998 [11]. Trong nghiên cứu này nhóm tác giả hướng đến việc loại bỏ tính suy biến của trường nghiệm bài toán Darcy bằng cách kết hợp phương pháp tích phân trực tiếp và phương pháp sai phân hữu hạn. Trong đó phương pháp tích phân trực tiếp được dùng để loại bỏ suy biến cho trường áp suất, còn đối với trường vận tốc thì các giá trị suy biến được loại bỏ bởi sơ đồ sai phân hữu hạn trên biên.

Đây cũng chính là nội dung trung tâm mà nhóm nghiên cứu muốn giới thiệu trong bài báo này.

2. THIẾT LẬP CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Xem xét miền vật liệu rỗng bất kỳ Ω có biên là $\partial\Omega$ nằm trong không gian 2 chiều có hệ quy chiếu $O - \hat{x}\hat{y}$ như mô tả trên hình 1



Hình 1. Miền vật liệu rỗng xem xét.

Trước khi thiết lập các phương trình cơ bản chúng ta tiến hành chuyển đổi các đại lượng về dạng không thứ nguyên. Để thực hiện được việc đó trước tiên chúng ta gọi σ, L lần lượt là độ lớn tham chiếu nào đó của gradient áp suất và chiều dài lấy làm giá trị đơn vị. Tiếp đó các đại lượng như vận tốc, áp suất và độ thấm có độ lớn đơn vị lần lượt được lựa chọn là $\frac{\sigma L^2}{\mu}, \sigma L, L^2$, tức là

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\sigma L^2}{\mu} \times \mathbf{u}, \quad \hat{p} = \sigma L \times p, \quad K = L^2 \times k, \quad (2)$$

trong đó $\mathbf{u}(u, v), p, k$ là vận tốc, áp suất và độ thấm không đơn vị. Trên cơ sở các quy ước nêu trên, phương trình Darcy (1) được biểu diễn lại dưới dạng không thứ nguyên như sau

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -k \nabla p(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}(x, y) \in \Omega. \quad (3)$$

Giả thiết chất lỏng chảy trong lỗ rỗng là chất lỏng không nén được và thỏa mãn phương trình bảo toàn khối lượng có dạng như sau

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad (4)$$

trong đó $\nabla \cdot$ là toán tử divergence. Thay phương trình (3) vào phương trình (4) chúng ta thu được phương trình đạo hàm riêng đối với áp suất như sau

$$\nabla \cdot (-k \nabla p(\mathbf{x})) = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 p(\mathbf{x}) = 0, \quad (5)$$

ở đây phương trình (5) được biết đến là phương trình Laplace với ∇^2 là toán tử Laplace.

Nghiệm của phương trình Laplace (5) thỏa mãn phương trình tích phân được biểu diễn dưới dạng sau

$$\varepsilon(\mathbf{x}_0) p(\mathbf{x}_0) = - \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ds(\mathbf{x}) - \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \cdot Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ds(\mathbf{x}), \quad (6)$$

trong đó ε là một hàm vô hướng phụ thuộc vào biến vector vị trí \mathbf{x}_0 , nhận các giá trị sau

$$\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} 1 & \text{khi } \mathbf{x}_0 \in \Omega \text{ \& } \mathbf{x}_0 \notin \partial\Omega, \\ 1/2 & \text{khi } \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega \text{ \& } \mathbf{x}_0 \notin \Omega, \\ 0 & \text{khi } \mathbf{x}_0 \notin \partial\Omega \text{ \& } \mathbf{x}_0 \notin \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ là nghiệm số cơ bản hay còn gọi là hàm Green trong không gian vô hạn, $Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ là đạo hàm theo hướng pháp tuyến với biên của hàm Green. Biểu thức của hai hàm này được biểu diễn như sau

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln r, \quad (8)$$

$$Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{r_i \cdot n_i}{r^2}, \quad (9)$$

ở đây $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ là vector pháp tuyến với biên $\partial\Omega$ tại điểm \mathbf{x} . $p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})$ lần lượt là áp suất và đạo hàm theo phương pháp tuyến của áp suất trên biên, $q(\mathbf{x})$ cũng có thể được hiểu là giá trị vận tốc của dòng chảy vuông góc với biên.

Thay phương trình (6) vào phương trình (3) chúng ta thu được trường nghiệm vận tốc biểu diễn dưới dạng hàm tích phân như hai biểu thức dưới đây

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{x}_0)u(\mathbf{x}_0) &= k \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{x}) \cdot G_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ds(\mathbf{x}) + k \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \cdot Q_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ds(\mathbf{x}), \\ \varepsilon(\mathbf{x}_0)v(\mathbf{x}_0) &= k \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{x}) \cdot G_y(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ds(\mathbf{x}) + k \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}) \cdot Q_y(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ds(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (10)$$

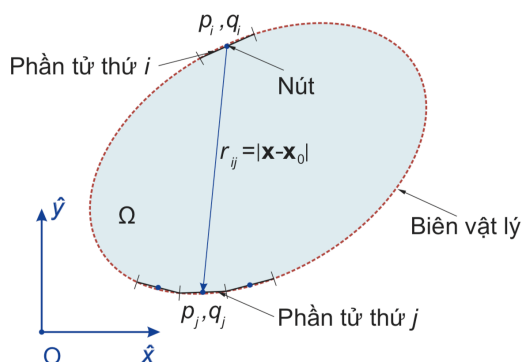
với G_x, G_y, Q_x, Q_y là đạo hàm của các hàm G, Q tại điểm \mathbf{x}_0 và được diễn giải như sau

$$G_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{\partial G}{\partial x_0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x - x_0)}{r^2}, \quad (11)$$

$$Q_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{\partial Q}{\partial x_0} = -\frac{n_x}{\pi r^4} (x - x_0)^2 - \frac{n_y}{\pi r^4} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{n_x}{2\pi r^2}, \quad (12)$$

$$G_y(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{\partial G}{\partial y_0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(y - y_0)}{r^2}, \quad (13)$$

$$Q_y(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{\partial Q}{\partial y_0} = -\frac{n_x}{\pi r^4} (x - x_0)(y - y_0) - \frac{n_y}{\pi r^4} (y - y_0)^2 + \frac{n_y}{2\pi r^2}. \quad (14)$$



Hình 2. Sơ đồ rời rạc hoá biên miền tính toán.

Để xác định các giá trị $p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})$ trên biên chúng ta tiến hành rời rạc hoá biên $\partial\Omega$ thành N phần tử hằng số ký hiệu là Γ_j (xem hình 2), đối với phần tử hằng số hình dạng của biên được xấp xỉ bằng hàm tuyến tính còn giá trị biên được xấp xỉ bằng hằng số trên mỗi phần tử, được ký hiệu lần lượt là p_j, q_j , ($j = 1, 2, \dots, N$). Tiến hành dịch chuyển điểm \mathbf{x}_0 về biên và đặt lần lượt tại các điểm nút \mathbf{x}_{0i} ($i = 1, 2, \dots, N$), chúng ta thu được N phương trình với $2 \times N$ ẩn số biểu diễn dạng tổng quát như sau

$$\frac{1}{2} p_i = - \sum_{j=1}^N q_j \int_{\Gamma_j} G(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) ds - \sum_{j=1}^N p_j \int_{\Gamma_j} Q(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) ds. \quad (15)$$

Phương trình (15) ở trên thể hiện mối quan hệ giữa áp suất tại nút của phần tử biên thứ "i" với tất cả các giá trị áp suất và đạo hàm theo phương pháp tuyến của nó tại các nút của tất cả các phần tử thứ "j", trong đó bao gồm cả "i \equiv j" tức là chính nó.

Mặt khác miền tính toán Ω phải được xem xét trong một điều kiện biên nào đó, đối với bài toán thẩm điều kiện biên chủ yếu gồm hai dạng gọi tên là Dirichlet và Neumann. Dirichlet tương ứng với điều kiện áp vào là áp suất còn Neumann tương ứng với điều kiện áp vào là đạo hàm theo phương pháp tuyến của áp suất hay nói cách khác là thành phần vuông góc với biên của vận tốc. Đề cụ thể hoá, chúng ta biểu diễn điều kiện biên theo hai biểu thức sau đây

$$p(\mathbf{x}) = \bar{p} \quad \& \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^D, \quad (16)$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n} = \bar{q} \quad \& \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^N, \quad (17)$$

trong đó $\partial\Omega^D \cup \partial\Omega^N = \partial\Omega$. Sau khi rời rạc hoá biên, phương trình (16) và (17) cho phép chúng ta xây dựng một hệ gồm N phương trình biểu diễn dưới đây

$$p_j = \bar{p}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (18)$$

$$q_j = \bar{q}_j, \quad j = m+1, m+2, \dots, N. \quad (19)$$

Kết hợp (15), (18) và (19) chúng ta có thể giải được ra các giá trị trên biên chưa biết p_j, q_j tương ứng với từng phần tử. Thay các giá trị này trở lại biểu thức (6) và (10) chúng ta thu được áp suất và vận tốc tại bất cứ điểm nào trên miền Ω .

Khi thực hiện giải hệ cũng như khi tính toán trường nghiệm áp suất và vận tốc chúng ta phải thực hiện tính các tích phân sau đây

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \int_{\Gamma_j} G(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) ds, & Q_{ij} &= \int_{\Gamma_j} Q(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) ds, & G_{ij}^x &= \int_{\Gamma_j} G_x(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) ds, \\ G_{ij}^y &= \int_{\Gamma_j} G_y(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) ds, & Q_{ij}^x &= \int_{\Gamma_j} Q_x(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) ds, & Q_{ij}^y &= \int_{\Gamma_j} Q_y(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Khi $\mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}_{0i}$, các biểu thức kể trên được xác định bằng phương pháp tích phân số Gauss. Ngược lại, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng khi $\mathbf{x}_j \equiv \mathbf{x}_{0i}$ thì các biểu thức G_{ij} , Q_{ij} , G_{ij}^x , G_{ij}^y , Q_{ij}^x , Q_{ij}^y trở thành suy biến, nói cách khác hiện tượng suy biến xảy ra khi điểm cần tính toán trùng với nút của phần tử cần lấy tích phân.

Đặc điểm suy biến xuất hiện trong hai biểu thức tích phân G_{jj} và Q_{jj} gây ra sai số trong quá trình giải hệ, trong nghiên cứu này chúng được loại bỏ bằng cách tính tích phân trực tiếp và thu được kết quả sau

$$G_{jj} = \frac{l_j}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{l_j}{2}\right) - 1 \right], \quad Q_{jj} = 0, \quad (21)$$

trong đó l_j là chiều dài của phần tử.

Bốn biểu thức tích phân G_{ij}^x , G_{ij}^y , Q_{ij}^x , Q_{ij}^y xuất hiện trong công thức trường nghiệm vận tốc gây ra suy biến khi điểm cần xác định vận tốc nằm trên biên. Đối với vấn đề này thay vì tính toán vận tốc theo công thức (10) chúng ta sử dụng phương trình Darcy kết hợp với sơ đồ sai phân hữu hạn trên biên để xác định giá trị vận tốc trên biên theo nguyên tắc sau

$$u_i = -k(p_{,n}^i \cdot n_x^i - p_{,t}^i \cdot n_y^i) \quad \& \quad v_i = -k(p_{,n}^i \cdot n_y^i + p_{,t}^i \cdot n_x^i), \quad (22)$$

trong đó (u_i, v_i) là hai thành phần vận tốc tại vị trí nút "i", (n_x^i, n_y^i) là vector pháp tuyến với biên tại vị trí nút "i", $p_{,n}^i = \frac{\partial p_i}{\partial n} = q_i$ và $p_{,t}^i = \frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial \xi} = p_{,\xi}^i$, với ξ là biến tọa độ cong theo chiều dài biên. Tùy thuộc vào vị trí của nút "i" mà giá trị $p_{,\xi}^i$ được xác định theo một trong ba sơ đồ sau

- Sai phân đúng tâm

$$s_1 = \frac{l_{i-1} + l_i}{2}, \quad s_2 = \frac{l_i + l_{i+1}}{2}, \quad \alpha_1 = -\frac{s_2}{s_1(s_1 + s_2)}, \quad \alpha_2 = -\frac{s_1 - s_2}{s_1 s_2}, \quad \alpha_3 = \frac{s_1}{s_2(s_1 + s_2)}, \quad (23)$$

$$p_{,\xi}^i = \alpha_1 p_{i-1} + \alpha_2 p_i + \alpha_3 p_{i+1}. \quad (24)$$

- Sai phân tiến

$$s_1 = \frac{l_i + l_{i+1}}{2}, \quad s_2 = \frac{l_{i+1} + l_{i+2}}{2}, \quad \alpha_1 = -\frac{2s_1 + s_2}{s_1(s_1 + s_2)}, \quad \alpha_2 = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2}, \quad \alpha_3 = -\frac{s_1}{s_2(s_1 + s_2)}, \quad (25)$$

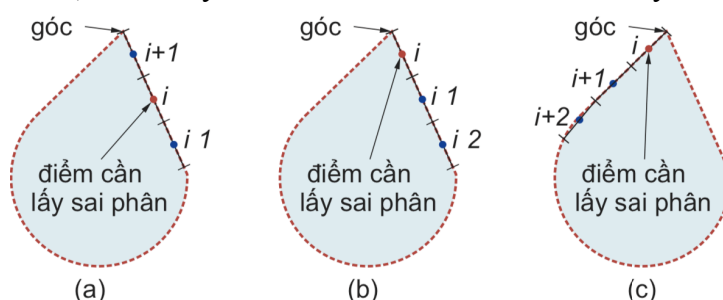
$$p_{,\xi}^i = \alpha_1 p_i + \alpha_2 p_{i+1} + \alpha_3 p_{i+2}. \quad (26)$$

• Sai phân lùi

$$s_1 = \frac{l_{i-1} + l_{i-2}}{2}, \quad s_2 = \frac{l_{i-1} + l_i}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{2s_1 + s_2}{s_1(s_1 + s_2)}, \quad \alpha_2 = -\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2}, \quad \alpha_3 = \frac{s_1}{s_2(s_1 + s_2)}, \quad (27)$$

$$p_{,\xi}^i = \alpha_1 p_i + \alpha_2 p_{i-1} + \alpha_3 p_{i-2}. \quad (28)$$

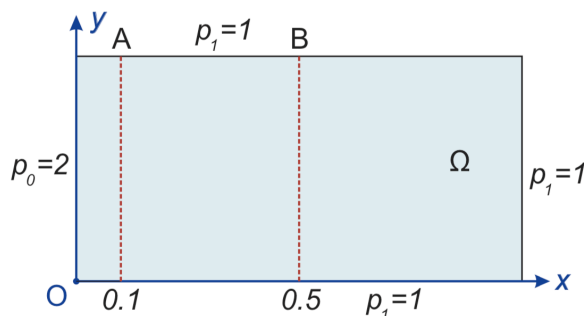
Trong ba sơ đồ sai phân nói trên thì sơ đồ sai phân đúng tâm dành cho phần tử tại vị trí biên tròn, sơ đồ sai phân lùi và tiến lần lượt dành cho phần tử ở vị trí liền trước và liền sau của điểm gãy khúc trên biên, mô tả này được thể hiện trên hình 3 dưới đây.



Hình 3. Các sơ đồ sai phân hữu hạn trên biên, (a) đúng tâm, (b) lùi, (c) tiến.

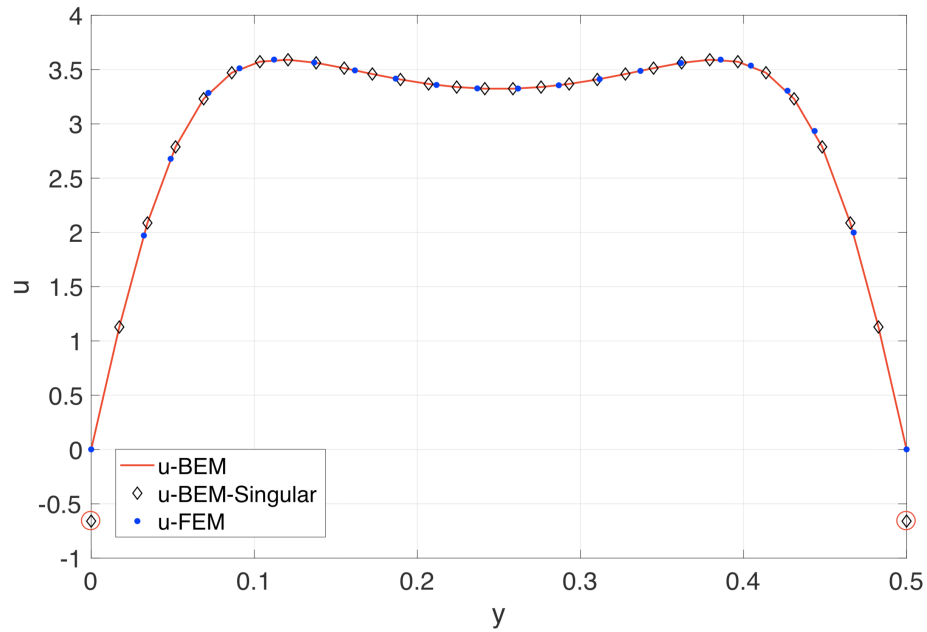
3. ỨNG DỤNG SỐ VÀ PHÂN TÍCH

Để kiểm chứng tính đúng đắn của phương pháp đề xuất trong nghiên cứu này, chúng ta xem xét ví dụ cụ thể sau đây. Miền vật liệu rỗng Ω hình chữ nhật, với kích thước và điều kiện biên như thể hiện trên hình 4. Trong ví dụ này nhóm nghiên cứu sẽ thực hiện phân tích trường nghiệm áp suất và vận tốc tại hai vị trí $x = 0.1$ và $x = 0.5$.

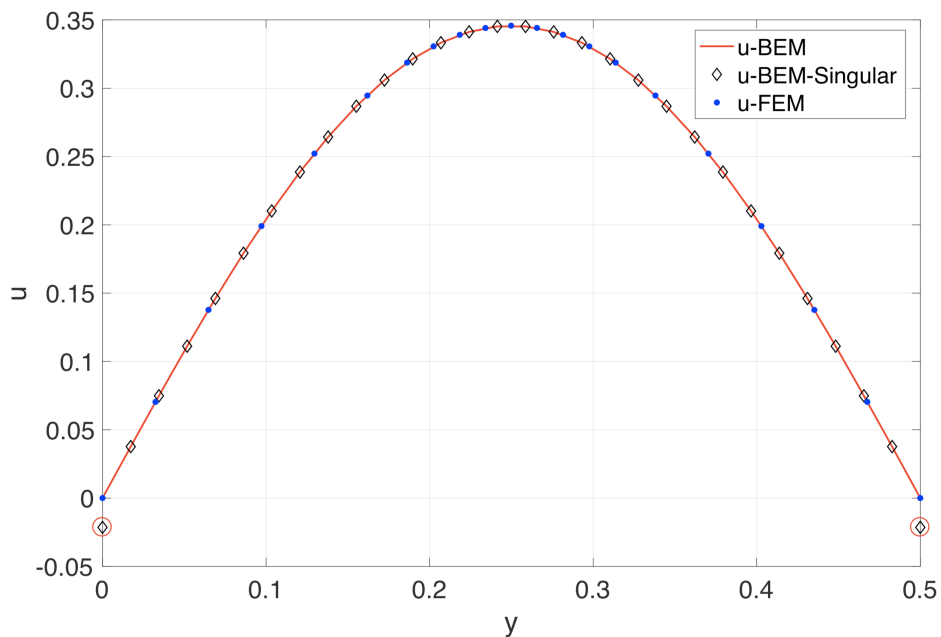


Hình 4. Miền vật liệu rỗng hình chữ nhật và điều kiện biên xem xét.

Hình 5, 6 biểu diễn sự biến thiên của trường vận tốc tại hai vị trí $x = 0.1$ và $x = 0.5$ theo sự thay đổi của giá trị tọa độ $y = 0 \div 0.5$, trong đó đường liền (màu đỏ) là kết quả từ phương pháp phần tử biên đã được xử lý tính suy biến (u-BEM), biểu tượng hình thoi (màu đen) là kết quả khi tính toán bằng phương pháp phần tử biên chưa được xử lý điểm suy biến (u-BEM-Singular), biểu tượng chấm (màu xanh) kết quả đối chứng tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn (u-FEM). Chúng ta nhận thấy rằng kết quả thu được từ phương pháp phần tử biên cơ bản là chính xác, tuy nhiên nhận thấy hai điểm được khoanh tròn trên biểu đồ chính là hai giá trị suy biến khi chưa xử lý, điều này đã được khắc phục bằng phương pháp sai phân hữu hạn biên mà nhóm tác giả đã trình bày ở mục 3.

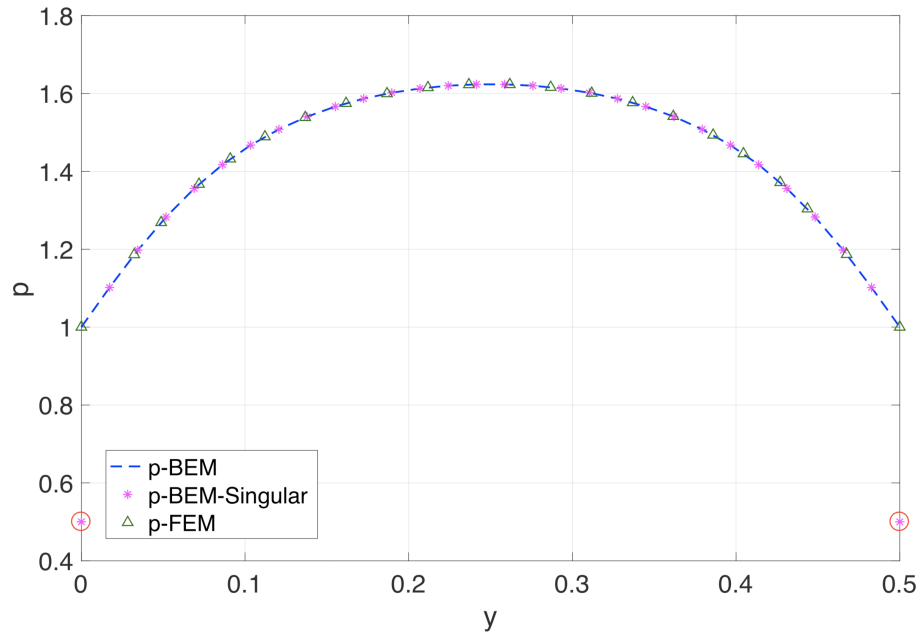


Hình 5. Biến thiên vận tốc (u) theo phương y tại vị trí $x=0.1$.

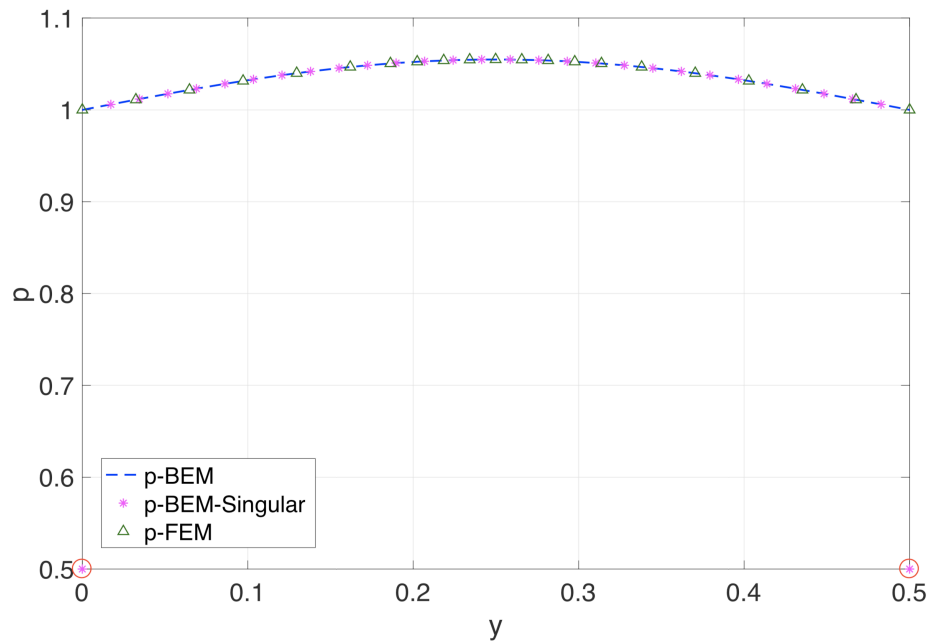


Hình 6. Biến thiên vận tốc (u) theo phương y tại vị trí $x=0.5$.

Nhận xét tương tự cũng được rút ra khi quan sát sự biến thiên của trường áp suất tại hai vị trí $x=0.1$ và $x=0.5$ thể hiện trên hình 7 và 8, ở đây đường nét đứt (màu xanh) là kết quả thu được từ phương pháp phần tử biên đã xử lý tính suy biến (p-BEM), biểu tượng hình sao (màu tím) là kết quả của phương pháp phần tử biên khi chưa xử lý điểm suy biến (p-BEM-Singular) và cuối cùng biểu tượng hình tam giác (màu xanh lá) là kết quả để so sánh với phương pháp phần tử hữu hạn (p-BEM). Hai điểm suy biến cũng được khoanh tròn trên hai biểu đồ này, chúng được xử lý bằng phép tính tích phân trực tiếp.



Hình 7. Biến thiên áp suất p theo phương y tại vị trí $x=0.1$.



Hình 8. Biến thiên áp suất p theo phương y tại vị trí $x=0.5$.

4. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này bài toán thấm Darcy trong môi trường vật liệu rỗng tổng quát đã được phân tích chi tiết bằng phương pháp phần tử biên, trong đó tính suy biến gặp phải khi áp dụng phương pháp này đã được giải quyết bằng một giải pháp mới đó là tính vi phân số trên biên của miền tính toán. Bài toán thấm chỉ là một ví dụ cụ thể, để kiểm chứng tính hiệu quả của giải pháp này cần có thêm các kết quả dành cho các bài toán khác ngoài thấm, đây cũng là các hướng cần giải quyết trong thời gian sắp tới của nhóm nghiên cứu.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2017.310.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. I. D. P. Arcila, H. Power, C. N. Londono, W. F. F. Escobar, Boundary element simulation of void formation in fibrous reinforcements based on the Stokes-Darcy formulation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 304 (2016) 265–293. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2016.02.010>
- [2]. I. D. P. Arcila, H. Power, C. N. Londono, W. F. F. Escobar, Boundary Element Method for the dynamic evolution of intra-tow voids in dual-scale fibrous reinforcements using a Stokes–Darcy formulation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 87 (2018) 133–152. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2017.11.014>
- [3]. A. Teimoori, Z. Chen, S. S. Rahman, T. Tran, Effective Permeability Calculation Using Boundary Element Method in Naturally Fractured Reservoirs, *Petroleum Science and Technology*, 23 (2005) 693–709. <https://doi.org/10.1081/LFT-200033029>
- [4]. O. O. Onyejekwe, A Boundary Element-Finite Element Equation Solutions to Flow in Heterogeneous Porous Media, *Transport in Porous Media*, 31 (1998) 293–312. <https://doi.org/10.1023/A:1006529122626>.
- [5]. J. T. Katsikadelis, *Boundary Elements : Theory and Application*, First ed., Elsevier Science Ltd, Oxford, 2002.
- [6]. L. Gaul, M. Kogl, M. Wagner, *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*, First ed., Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- [7]. C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques : Theory and Application in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [8]. M. Dehghan, H. Hosseinzadeh, Calculation of 2D singular and near singular integrals of boundary elements method based on the complex space C, *Applied Mathematical Modelling*, 36 (2012) 545–560. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.07.036>
- [9]. L. Marin, D. Lesnic, V. Mantic, Treatment of singularities in Helmholtz-type equations using the boundary element method, *Journal of Sound and Vibration*, 278 (2004) 39–62. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.09.059>
- [10]. Q. Huang, T. A. Cruse, Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis, *International journal for numerical methods in engineering*, 36 (1993) 2643–2659. <https://doi.org/10.1002/nme.1620361509>.
- [11]. V. Sladek, J. Sladek, Singular integrals and boundary elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157 (1998) 251 – 266. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00239-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00239-9)