



RADIAL BASIS FUNCTION METAMODEL FOR LINEAR BUCKLING ANALYSIS OF STRUCTURE IN THE NUMERICAL SIMULATION

Doan Van Tu^{1,*}

¹University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 8/2/2020

Revised: 14/3/2020

Accepted: 14/3/2020

Published online: 24/04/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.3.1>

* *Corresponding author*

Email: doantugtvt189@utc.edu.vn; Tel: 0961912989

Abstract. The application and development new methods to replace reference methods in the mechanical structure analysis to reduce computer resources while still ensuring the required accuracy are the purpose of this study. This paper focuses on the uncertain critical buckling load in the geometric and material variability for structures in linear buckling simulations. Radial Basis Function metamodels are applied to reduce computational time in the linear buckling analysis by the finite element method. The efficiency of metamodel is compared with the reference method in the calculation cases. The research results are used to predict the instable structure and reduce experimental cost.

Keywords: buckling, uncertainty, metamodels, Radial Basis Function, additive manufacturing.



MÔ HÌNH HÀM CƠ SỞ BÁN KÍNH CHO PHÂN TÍCH UỐN DỌC TUYẾN TÍNH CỦA KẾT CẤU TRONG MÔ PHÒNG SỐ

Đoàn Văn Tú^{1*}

¹Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 8/2/2020

Ngày nhận bài sửa: 14/3/2020

Ngày chấp nhận đăng: 14/3/2020

Ngày xuất bản Online: 24/04/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.3.1>

* Tác giả liên hệ

Email: doantugtvt189@utc.edu.vn; Tel: 0961912989

Tóm tắt. Áp dụng và phát triển các phương pháp mới thay thế các phương pháp tiêu chuẩn trong phân tích kết cấu cơ khí nhằm giảm tải nguyên máy tính nhưng vẫn đảm bảo độ chính xác cần thiết là mục đích của nghiên cứu này. Bài báo tập trung nghiên cứu sai số lực tới hạn uốn dọc dưới sự biến đổi hình học và vật liệu cho kết cấu trong mô phỏng uốn dọc tuyến tính. Mô hình hàm cơ sở bán kính được áp dụng để giảm thời gian tính toán trong phân tích uốn dọc tuyến tính bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Hiệu quả của mô hình thay thế được so sánh với phương pháp tiêu chuẩn trong các trường hợp tính toán. Kết quả nghiên cứu được sử dụng để dự đoán kết cấu mất ổn định và giảm chi phí thực nghiệm.

Từ khóa: uốn dọc, sai số, mô hình thay thế, hàm cơ sở bán kính, sản xuất đắp dần

© 2020 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong quá trình thiết kế cơ khí, mô phỏng số là cần thiết để đưa ra các thiết kế có độ tin cậy, bền vững hơn và giảm chi phí thí nghiệm. Các phần mềm thương mại hiện nay ngày càng nhiều công cụ, tính năng và có khả năng phân tích, mô phỏng kết cấu mạnh tuy nhiên vẫn còn có những vấn đề khó khăn như phân tích kết cấu lớn, đòi hỏi tài nguyên của máy tính rất cao khi muốn độ chính xác lớn [8]. Với sự phát triển không ngừng của các lĩnh vực công nghiệp cơ khí, các sản phẩm có xu hướng thiết kế bền vững, tiết kiệm vật liệu nên các mô hình số ngày càng phức tạp. Để phân tích khả năng làm việc của kết cấu với kết quả có độ chính xác cao đòi hỏi thời gian tính toán lớn và đây vẫn là một hướng nghiên cứu cần thiết cho các nhà khoa học. Ngoài ra, trong các phương pháp gia công cơ khí, sai số của sản phẩm sẽ ảnh hưởng

lớn đến chất lượng làm việc của chi tiết ngay cả các phương pháp gia công hiện đại như công nghệ sản xuất đắp dần hay in 3D (Additive Manufacturing - AM) [10,11]. Trong công nghệ chế tạo này, các sản phẩm bằng kim loại, composite vẫn còn có những hạn chế như chất lượng bề mặt của sản phẩm chưa cao, còn có sự biến đổi hình học và vật liệu, tức là trên cùng sản phẩm thì cơ tính cũng như hình học không đồng nhất [11].

Để giảm tài nguyên máy tính, tiết kiệm thời gian phân tích, việc áp dụng và phát triển các phương pháp mới thay thế các phương pháp truyền thống trong phân tích kết cấu như các kỹ thuật xấp xỉ, phân tích lại đã được nghiên cứu [6]. Gần đây, Massa F., et al. [7] và các nhà nghiên cứu khác đã dùng phương pháp chiếu kết hợp kỹ thuật phát triển homotopy để phân tích dao động cho mô hình phần tử hữu hạn (PTHH) lớn. Tiếp đến, mô hình giảm bậc và mô hình thay thế [3] bước đầu cũng được nghiên cứu và áp dụng trong phân tích uốn dọc của kết cấu. Trong kỹ thuật, uốn dọc là hiện tượng gây mất ổn định cho kết cấu chịu nén khi lực tác dụng đạt giá trị tới hạn, hiện tượng này có thể xem xét bằng bài toán tuyến tính hoặc phi tuyến [2]. Trong chế tạo các kết cấu cơ khí, sai số về hình học và vật liệu do các phương pháp gia công tạo ra sẽ ảnh hưởng đến khả năng làm việc của kết cấu. Với nghiên cứu gần đây [4], tác giả đã tập trung vào phân tích hiện tượng uốn dọc, khảo sát sự biến đổi đa tham số của kết cấu có mô hình phần tử hữu hạn sử dụng phần tử dầm 3 chiều. Trong nghiên cứu này, cũng về sai số, tác giả đề xuất nghiên cứu các mô hình thay thế Radial Basis Function (RBF) để tính toán xấp xỉ lực uốn dọc của kết cấu chịu nén trong mô hình PTHH sử dụng phần tử dạng khối 3 chiều. Mục đích là đánh giá sâu hơn về phương pháp xấp xỉ bằng mô hình thay thế, cụ thể là dự đoán trước khả năng làm việc của kết cấu, giảm được thời gian phân tích, chi phí thực nghiệm mà vẫn đảm bảo độ tin cậy cần thiết.

2. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN CHO UỐN DỌC KẾT CẤU

Trong phương pháp số, với phương pháp PTHH, trước hết phải xây dựng ma trận độ cứng tuyến tính \mathbf{K}_l , rồi giải hệ phương trình tuyến tính xác định được chuyển vị của kết cấu. Tiếp đến xác định biến dạng và ứng suất để xây dựng ma trận độ cứng hình học \mathbf{K}_σ .

Giải vấn đề uốn dọc tuyến tính phải xác định giá trị riêng liên quan đến ma trận độ cứng tuyến tính \mathbf{K}_l và ma trận độ cứng hình học \mathbf{K}_σ để xác định trị riêng đầu tiên λ_{cr} và véc tơ riêng \mathbf{z} như đã trình bày trong bài báo [4]:

$$(\mathbf{K}_l + \lambda_{cr} \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{z} = 0 \quad (1)$$

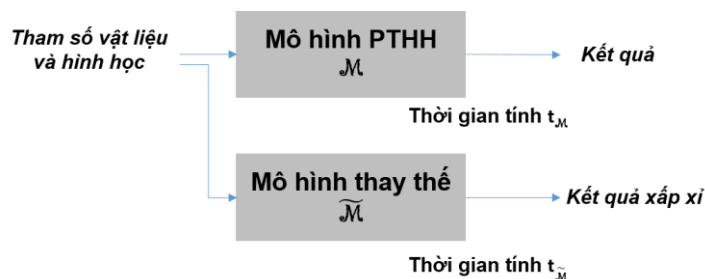
Lực tới hạn uốn dọc được xác định từ giá trị riêng đầu tiên và véc tơ ngoại lực:

$$\mathbf{F}_{cr} = \lambda_{cr} \mathbf{F}_0 \quad (2)$$

3. PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ BẰNG MÔ HÌNH THAY THẾ

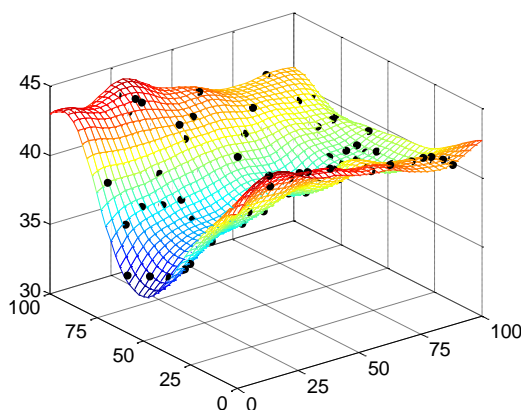
3.1. Mô hình thay thế

Mô hình thay thế là một phương pháp xấp xỉ trong mô phỏng số bằng mô hình toán học. Phương pháp này có thể ứng dụng trong xấp xỉ mô hình PTHH cổ điển \mathcal{M} bởi mô hình toán tương thích $\tilde{\mathcal{M}}$. Với mỗi một vấn đề trong mô phỏng kết cấu đã xác định, có thể biểu diễn phương pháp xấp xỉ của mô hình này dưới sơ đồ sau:



Hình 1. Sơ đồ phương pháp xấp xỉ bằng mô hình thay thế.

Mô hình PTHH của vấn đề nghiên cứu có các tham số về vật liệu và hình học, sự thay đổi các giá trị cũng như các sai số của các tham số này sẽ ảnh hưởng đến kết quả đầu ra mà cụ thể trong trường hợp này là lực giới hạn uốn dọc và phương thức (mode) dao động của kết cấu. Mục đích của phương pháp xấp xỉ này là giảm đáng kể thời gian tính tức là t_M của mô hình thay thế nhỏ hơn nhiều t_M của mô hình PTHH tiêu chuẩn. Trong mô hình thay thế, cần có một tập hợp số liệu ngẫu nhiên ban đầu hay còn gọi là không gian mẫu làm cơ sở để ước lượng kết quả đầu ra như Hình 2.



Hình 2. Tập hợp kết quả ước lượng bằng mô hình thay thế từ không gian mẫu ngẫu nhiên.

Các mô hình toán thay thế điển hình trong mô phỏng số như mô hình bậc 2 (Quadratic model), mô hình Kriging [9], mô hình hàm cơ sở bán kính (Radial Basis Function - RBF). Ngoài ra, còn có các kỹ thuật xấp xỉ khác như kỹ thuật Perturbation, xấp xỉ Padé, xấp xỉ chuỗi Taylor...

3.2. Mô hình Radial Basis Function

Mô hình hàm cơ sở bán kính RBF được đề xuất bởi Hardy R.L. [5] và được phát triển cho nội suy đa biến rời rạc bởi Buhmann M. [1]. Phương pháp này dựa trên các tổ hợp tuyến tính của các hàm đối xứng trên cơ sở số liệu cụ thể để xấp xỉ hàm kết quả.

Trong vấn đề nghiên cứu uốn dọc tuyến tính, kết quả đầu ra $s_j(\mathbf{p})$ (bao gồm trị riêng và véc tơ riêng) có thể được viết dưới dạng tổng của mô hình hồi quy như công thức (3):

$$s_j(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n_s} \omega_i R(\theta, d) \quad (3)$$

Ở đây, $d = \|\hat{p} - \hat{p}_i\|$ là khoảng cách bán kính từ \hat{p} đến \hat{p}_i , ω_i là hệ số trọng số của hàm cơ sở thứ i .

Hàm tương quan $R(\theta, d)$ có thể là các hàm theo bảng sau:

Bảng 1. Các dạng hàm tương quan của mô hình RBF.

Hàm tương quan	$R(\theta, d)$
Tuyến tính	$\max\{0, 1 - \theta d \}$
Mũ	$\exp(-\theta d)$
Gaussian	$\exp(-\theta d^2)$

Với θ là tham số tỉ lệ xác định và là trung bình cộng của tập hợp mẫu nghiên cứu.

Các hệ số nội suy chưa biết có thể được tính toán bởi hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n_s} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n_s 1} & R_{n_s 2} & \cdots & R_{n_s n_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_j(p_1) \\ s_j(p_2) \\ \vdots \\ s_j(p_{n_s}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

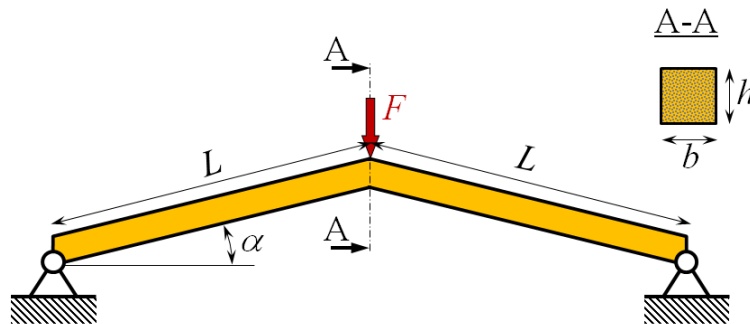
Ở đây, $R_{ij} = R(\theta, \|\hat{p}_j - \hat{p}_i\|)$

Để xác định mô hình toán RBF, cần phải lập một không gian mẫu ngẫu nhiên ít hơn nhiều số tính toán cần nội suy, có thể sử dụng phương pháp Latin Hypercube Sampling (LHS). Không gian mẫu là các tổ hợp các giá trị của các tham số biến đổi và giá trị lực tới hạn cùng dao động riêng tương ứng theo phương pháp tính thông thường bằng công thức (1, 2).

4. MÔ PHỎNG SỐ CHO KẾT CẤU VỚI MÔ HÌNH RBF

4.1. Mô tả kết cấu nghiên cứu

Kết cấu dầm thép được đặt trên hai gối cố định, có mặt cắt hình chữ nhật kích thước $b \times h$. Dầm có các cạnh chiều dài L , mỗi cạnh tạo với phương ngang một góc α và chịu một lực nén tập trung F tại giữa dầm như Hình 3.



Hình 3. Kết cấu dầm chịu nén [3].

Các tham số hình học và vật liệu của kết cấu trong trường hợp nghiên cứu có các giá trị danh nghĩa như trong bảng 2.

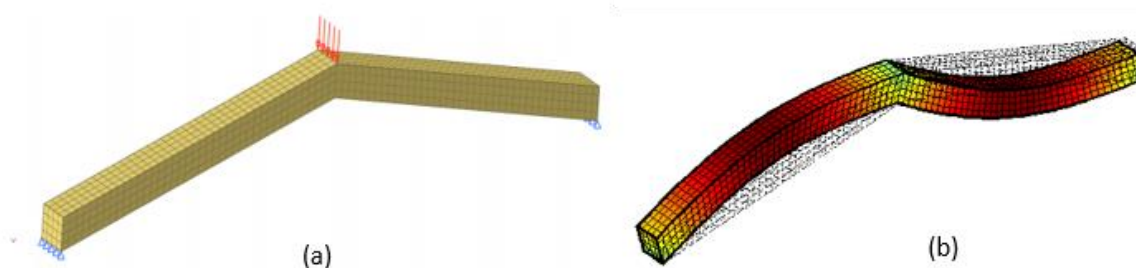
Bảng 2. Đặc tính hình học và vật liệu của kết cấu.

Tham số của kết cấu	Giá trị
Chiều dài L [m]	1
Chiều rộng mặt cắt b [m]	0,1
Chiều cao mặt cắt h [m]	0,1
Góc nghiêng α [°]	15
Mô đun đàn hồi E [GPa]	210
Hệ số poisson ν	0,3
Lực nén F [kN]	1000

Để đánh giá khả năng làm việc của kết cấu này trong trường hợp bị nén, tác giả sẽ xác định các giá trị lực giới hạn bằng phương pháp số với mô hình PTHH được trình bày trong mục tiếp theo.

4.2. Mô hình số

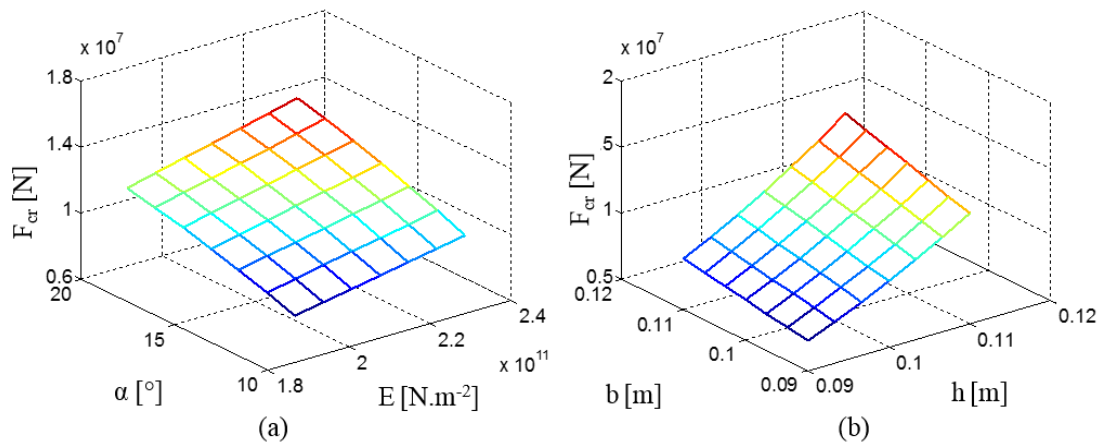
Để xây dựng mô hình số cho kết cấu dầm nghiêng cứu (Hình 4a), mô hình PTHH của phần tử khối lực diện Solid 3D, có 8 nút với 24 bậc tự do đã được phát triển. Các ma trận độ cứng tuyến tính và hình học được thành lập phục vụ cho bài toán uốn dọc tuyến tính. Trên cơ sở đó, tác giả đã xây dựng chương trình tính trên MATLAB để khảo sát ảnh hưởng của sai số.



Hình 4. Lưới PTHH và mode dao động đầu tiên của kết cấu.

Kết cấu được chia $4 \times 4 \times 40$ theo 3 chiều kích thước, tương đương 1028 phần tử hay 6075 bậc tự do và mode uốn dọc thu được từ trị riêng đầu tiên theo chương trình tính như Hình 4b. Kết quả chạy chương trình tính được so sánh với kết quả từ phần mềm ANSYS APDL. Phần tử Solid45 được sử dụng, kết quả so sánh nhận được có sai số về chuyển vị, lực uốn dọc giữa chương trình và phần mềm là nhỏ hơn 1%. Do đó, chương trình tính uốn dọc tuyến tính với trên MATLAB được xác nhận.

Xét đến sai số hình học và vật liệu của kết cấu, với sự biến đổi tham số b, h, E biến đổi 10%, α biến đổi 30% so với giá trị danh nghĩa trong Bảng 2, từ đó xác định tập hợp giá trị lực giới hạn uốn dọc và mode dao động. Sử dụng mô hình PTHH tiêu chuẩn theo công thức (1,2) và tính cho 7^4 (2401) giá trị lực giới hạn uốn dọc với các tổ hợp giá trị của 4 tham số biến đổi, các khoảng giá trị được chia đều thành 7 giá trị. Tập hợp sự biến đổi lực uốn dọc F_{cr} tạo lên các bề mặt giá trị như trên Hình 5, điều này cho thấy lực uốn dọc quan hệ tuyến tính với mô đun đàn hồi E, góc nghiêng α và phi tuyến với chiều rộng b, chiều cao h của dầm.



Hình 5. Tập hợp lực tối hạn uốn dọc dưới sự biến đổi tham số đầu vào trong chương trình MATLAB.

4.3. Ảnh hưởng của dạng hàm tương quan đến hiệu quả của mô hình thay thế RBF

Mô hình RBF cũng được xây dựng trong chương trình MATLAB để nghiên cứu. Như phân lý thuyết về mô hình, một tập hợp mẫu giữa các tham số đầu vào và giá trị các lực giới hạn được xác định ngẫu nhiên làm cơ sở để tính toán gần đúng giá trị lực giới hạn mà không cần qua các bước tính như phương pháp thông thường. Ảnh hưởng của các hàm tương quan khác nhau trong mô hình RBF được xem xét, với các khoảng biến đổi của 4 tham số như mục trên, tập hợp giá trị lực giới hạn uốn dọc theo mô hình RBF cũng được xác định. So sánh tập hợp các giá trị lực giới hạn uốn dọc nhận được từ mô hình PTHH tiêu chuẩn, sai số lớn nhất nhận được như Bảng 3. Với kết quả so sánh, hàm tương quan dạng Gaussian có độ chính xác tốt nhất 0,09 % sẽ được chọn cho mô hình RBF trong trường hợp nghiên cứu này.

Bảng 3. Ảnh hưởng của hàm tương quan trong mô hình RBF.

Sai số lớn nhất của giá trị lực giới hạn uốn dọc [%]			
Hàm tương quan	Tuyến tính	Mũ	Gauss
	20,18	0,89	0,09

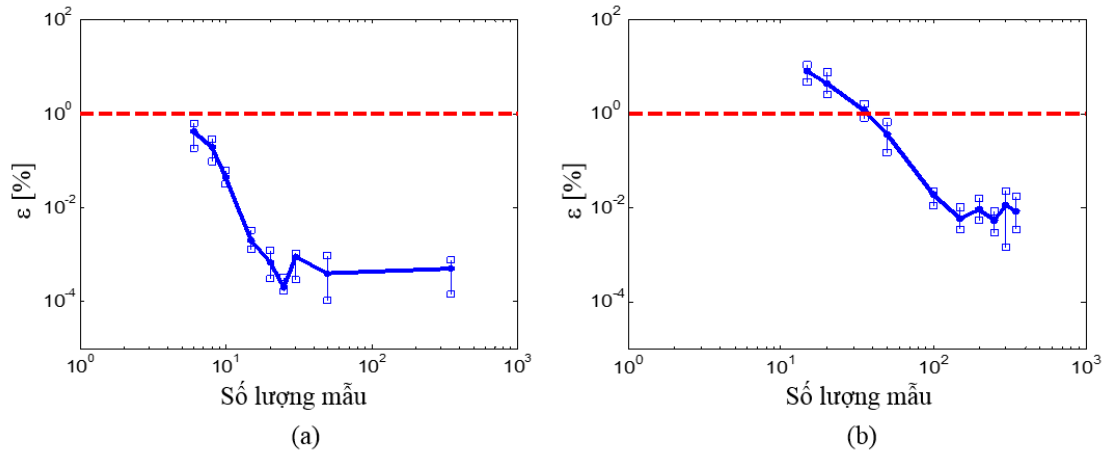
4.4. Ảnh hưởng số lượng tham số biến đổi đến hiệu quả của mô hình thay thế RBF

Ở đây, để xem xét ảnh hưởng số lượng tham số biến đổi đến kết quả phân tích lực uốn dọc và mode dao động của kết cấu, hai trường hợp được đưa ra:

- + Trường hợp 1: Xét sự thay đổi của chỉ 2 tham số α và E.
- + Trường hợp 2: Xét sự thay đổi của 4 tham số b, h, α và E

Trên Hình 6a, để sai số ϵ luôn nhỏ hơn 1% với trường hợp 2 tham số biến đổi thì số lượng mẫu chỉ cần lớn hơn 8, còn trường hợp 4 tham số biến đổi thì số lượng mẫu phải lớn hơn 50 như Hình 6b. Điều này cho thấy, khi số lượng tham số biến đổi tăng thì số lượng mẫu cần thiết cho mô hình RBF sẽ phải tăng để đảm bảo độ chính xác cần thiết.

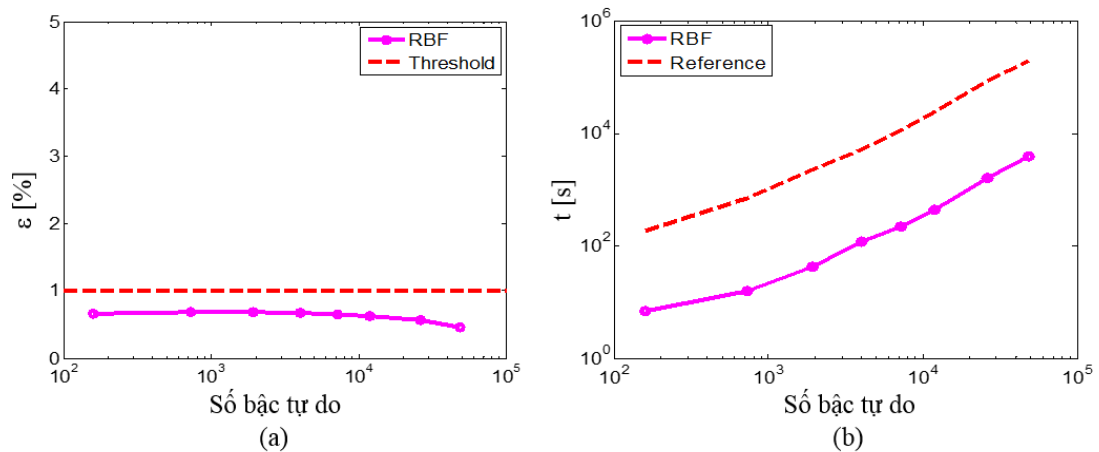
Tác giả cũng nhận thấy rằng, khi không gian mẫu tăng thì độ chính xác của mô hình RBF không được ổn định vì đường cong không mịn. Tuy nhiên, các kết quả xấp xỉ này đều đạt yêu cầu với sai số nhỏ hơn 1%. Như vậy, cũng cần phải xem xét thêm mô hình để cải thiện vấn đề này đặc biệt khi số lượng tham số đầu vào tăng.



Hình 6. Sự biến đổi sai số lực giới hạn uốn dọc theo số lượng mẫu trong mô hình RBF.

4.5. Kết quả xấp xỉ của mô hình thay thế RBF

Để làm nổi bật hiệu quả của mô hình thay thế RBF, kết quả xấp xỉ 2401 giá trị lực tới hạn uốn dọc sẽ được so sánh tương ứng với giá trị nhận được từ mô hình PTHH tiêu chuẩn (Reference) trong trường hợp 4 tham số đầu vào thay đổi b, h, α và E . Mô hình thay thế RBF sử dụng hàm tương quan Gauss với tập hợp 50 mẫu ngẫu nhiên LHS. Mô hình PTHH được chia với các trường hợp số lượng phần tử khác nhau, mỗi một trường hợp thì 2401 giá trị lực sẽ được so sánh. Trên Hình 7a biểu diễn mối quan hệ của sai số lực tới hạn với số bậc tự do (dof), tại tất cả các trường hợp từ 160 đến 48598 dof có sai số luôn nhỏ hơn 1%, điều này thể hiện khả năng của phương pháp. Về thời gian tính CPU, quan sát Hình 7b, với phương pháp tiêu chuẩn cần $t_{reference} = 196720$ giây (hay 54,6 giờ) tại trường hợp 48598 dof, trong khi mô hình RBF chỉ mất 3995 giây để tạo tập hợp mẫu và 9 giây ước lượng 2401 giá trị lực cùng mode dao động, tổng thời gian tính là $t_{RBF} = 4004$ giây (hay 1,1 giờ). Tức là với mô hình RBF thì thời gian tính trong trường hợp này đã giảm đi 49,1 lần.



Hình 7. Ảnh hưởng của số bậc tự do đến độ chính xác và thời gian CPU của mô hình RBF.

5. KẾT LUẬN

Như vậy, mô hình RBF hiệu quả khi dự đoán xấp xỉ lực uốn dọc tới hạn cho kết cấu nghiên cứu với sự biến đổi không nhỏ của 4 tham số hình học và vật liệu. Mô hình có thể

được sử dụng để thay thế cho phương pháp tính tiêu chuẩn, các bước giải chuyển vị, ứng suất, xây dựng ma trận độ cứng tuyến tính, ma trận độ cứng hình học được bỏ qua trong bước tính xấp xỉ kết quả đầu ra khi đã có tập hợp mẫu ngẫu nhiên đủ lớn. Kết quả số cho thấy sự hiệu quả của kỹ thuật xấp xỉ bằng mô hình RBF là nổi bật bằng sự so sánh với phương pháp tính tiêu chuẩn qua sự đánh giá về sai số của lực uốn dọc và thời gian chương trình tính CPU. Mô hình RBF sẽ hiệu quả hơn khi các khoảng biến đổi được chia nhỏ hơn nữa, tức là số lượng tính toán lực tới hạn đầu ra nhiều hơn, nếu dùng phương pháp tiêu chuẩn sẽ mất rất nhiều thời gian. Để xác định sự ảnh hưởng của sai số đầu vào đến khả năng làm việc của kết cấu hay sự lan truyền sai số (uncertainty propagation) đến lực uốn dọc trong trường hợp nghiên cứu này bằng phương pháp không xác định (Non-Deterministic Approaches) như xác suất, ví dụ như Monte Carlo Simulation (MCS) hay tập mờ, với yêu cầu về độ tin cậy thì số lượng tính toán có thể rất lớn. Việc kết hợp giữa mô hình RBF nói riêng và mô hình thay thế nói chung với các phương pháp lan truyền có thể giải quyết vấn đề này sẽ là hướng nghiên cứu tiếp theo.

LỜI CẢM ƠN

Cảm ơn Trường Đại học Giao thông vận tải đã tài trợ cho nghiên cứu này trong khuôn khổ đề tài mã số T2020-CK-001.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Buhmann, Martin D. Radial basis functions: theory and implementations. Vol. 12. Cambridge university press, 2003.
- [2]. Chen, Yanyu, et al., 3D printed hierarchical honeycombs with shape integrity under large compressive deformations, *Materials & Design* 137 (2018) 226-234. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.10.028>
- [3]. Doan, Tu, et al., Réduction de modèles pour la prédiction de charges critiques de flambement sous variabilité, *Congrès français de mécanique*. AFM, Association Française de Mécanique, Lille, France, 2017. <http://hdl.handle.net/2042/63143>
- [4]. Đoàn Văn Tú, Định lượng sai số và phân tích kết cấu lưới được sản xuất bằng chùm tia điện tử nóng chảy. *Tạp chí Khoa học GTVT*, 67 (2018) 82-90.
- [5]. Hardy, Rolland L., Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, *Journal of geophysical research* 76.8 (1971) 1905-1915. <https://doi.org/10.1029/JB076i008p01905>
- [6]. Massa, F., et al., Structural modal reanalysis methods using homotopy perturbation and projection techniques, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.45-46 (2011) 2971-2982. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.06.016>
- [7]. Massa, F., I. Turpin, and T. Tison., From homotopy perturbation technique to reduced order model for multiparametric modal analysis of large finite element models, *Mechanical Systems and Signal Processing* 96 (2017) 291-302. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.04.025>
- [8]. Nguyễn Văn Vịnh, Đoàn Văn Tú, Nghiên cứu ứng dụng phần mềm Ansys trong tính toán kết cấu thép cần trục tháp theo mẫu JTL65C4. *Tạp chí Bộ GTVT*, 08 (2014) 19-23. <http://www.tapchigiaothong.vn/tap-chi-giao-thong-thang-8-2014-i27.html>
- [9]. Sacks, Jerome, et al., Design and analysis of computer experiments, *Statistical science* (1989) 409-423. <https://www.jstor.org/stable/2245858>
- [10]. Sing, Swee Leong, Florencia Edith Wiria, and Wai Yee Yeong, Selective laser melting of lattice structures: A statistical approach to manufacturability and mechanical behavior, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 49 (2018) 170-180. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2017.06.006>
- [11]. Suard, Mathieu. Characterization and optimization of lattice structures made by Electron Beam Melting, PhD Thesis. Grenoble Alpes, 2015 <https://www.theses.fr/2015GREAI055>