



IDENTIFICATION OF THE BEAM VIBRATION PARAMETERS BY RAYLEIGH METHOD

Dam Minh Hung¹, Nguyen Huu Hung²

¹*Training, Construction and Human Resource Development Joint Stock Company, HoChiMinh city, Vietnam.*

²*University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.*

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 01/10/2019

Revised: 14/11/2019

Accepted: 18/11/2019

Published online: 16/12/2019

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.4.19>

* *Corresponding author*

Email: nhhunggttp@utc.edu.vn; Tel: 0912178594

Abstract. The current test and load-carrying test of bridge mainly receives the natural vibration frequency, deflection and strain of the bridge structure. This result immediately used to assess the current state of the bridge structure or stored to assess the bridge condition in the future. Of the above three results, only the natural vibration frequency of bridge is the parameter independent of external loads, so it is convenient to assess the bridge condition. The natural vibration frequency is made up of two main parameters which are the modal participating stiffness of the structure and the modal participating mass in that frequency. In order to better understand the behavior of beams, the paper proceeds to determine the actual modal participating stiffness, the modal participating mass of the beam and the mode shape function corresponding to this vibration case. The paper using Rayleigh method analyzed for simply supported beam case, the results modal participating mass and stiffness obtained by the proposed method are compared with the original assumptions and received high reliability results.

Keywords: natural vibration frequency, modal participating stiffness, modal participating mass, mode shape function, Reyleigh method.



XÁC ĐỊNH THAM SỐ DAO ĐỘNG CỦA DẦM BẰNG PHƯƠNG PHÁP RAYLEIGH

Đàm Minh Hùng¹, Nguyễn Hữu Hưng²

¹Công ty cổ phần đào tạo, xây dựng và phát triển nguồn nhân lực sáu, Thành phố Hồ Chí Minh

²Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.

THÔNG TIN BÀI BÁO

Chuyên mục: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 01/10/2019

Ngày nhận bài sửa: 14/11/2019

Ngày chấp nhận đăng: 18/11/2019

Ngày xuất bản Online: 16/12/2019

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.4.19>

* Tác giả liên hệ

Email: nhunggttp@utc.edu.vn; Tel: 0912178594

Tóm tắt. Công tác kiểm định, thử tải cầu hiện nay chủ yếu thu được kết quả tần số dao động riêng, độ võng và biến dạng của kết cấu cầu. Kết quả này dùng để đánh giá ngay hiện trạng của kết cấu cầu hoặc được lưu trữ để đánh giá tình trạng cầu sau này. Trong ba kết quả trên chỉ có tần số dao động riêng của kết cấu là thông số không phụ thuộc vào tải trọng bên ngoài cho nên thuận tiện trong việc đánh giá tình trạng của kết cấu. Tần số dao động riêng được cấu thành từ hai tham số chính đó là độ cứng của kết cấu dao động ở tần số đó và khối lượng tham gia vào tần số đó. Để hiểu rõ hơn về sự làm việc của kết cấu bài báo đi tiên hành xác định độ cứng thực tế của kết cấu, phần khối lượng tham gia khi kết cấu dao động với tần số đó và hàm dạng mode tương ứng với dao động này. Bài báo sử dụng phương pháp Rayleigh tiên hành phân tích với trường hợp dầm giản đơn, kết quả khối lượng và độ cứng tham gia dao động thu được bằng phương pháp đề xuất được so sánh với giả thiết ban đầu và cho kết quả có độ tin cậy cao.

Từ khóa: tần số dao động tự nhiên, độ cứng kết cấu tham gia, khối lượng tham gia, hàm dạng, phương pháp Reyleigh.

© 2019 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong công tác xếp hạng tải trọng cầu, việc xác định các tham số thực tế của kết cấu là rất cần thiết vì giúp góp phần đánh giá đúng hiện trạng của kết cấu cầu. Có rất nhiều tham số

của kết cấu nhưng trong đó các tham số dao động của kết cấu phản ánh được khá chi tiết điều kiện làm việc của kết cấu. Xác định những tham số dao động của kết cấu đóng vai trò quan trọng trong giám sát sức khỏe kết cấu, quản lý và thiết kế cầu. Vấn đề này đã thu hút rất nhiều sự quan tâm của các nhà khoa học trong nước và trên thế giới. Năm 2003, **Jann N, Yang cùng cộng sự** [1] giới thiệu sử dụng biến đổi Hilbert Huang cho xác định tham số của kết cấu, trong phương pháp này, tác giả đã xử lý kết quả đo phản ứng động lực học sau đó phân tích để xác định những tham số kết cấu. Cùng năm đó, **T. Kijewski và A. Kareem** [2] đã giới thiệu phương pháp biến đổi wavelet để xác định tham số kết cấu. Năm 2004, **J. Chen và cộng sự** [3] sử dụng phương pháp EMD-HT xác định tham số modal cho cầu treo dây võng Tsing Ma. trong bài báo của họ, họ so sánh phương pháp EMD-HT với phương pháp FFT truyền thống. Năm 2005, **Joong Sung Kang và cộng sự** [4] đã sử dụng kết quả đo gia tốc trong miền thời gian để xác định tham số kết cấu. Năm 2006, **B.F. Yan cùng cộng sự** [5] xác định tham số modal trên cơ sở biến đổi wavelet. Trong một bài báo khác [6] **Yan** đã so sánh khả năng xác định tham số modal của hai phương pháp dựa trên cơ sở biến đổi wavelet và biến đổi Hilbert-Huang. Trong bài báo của mình, ông cũng cho biết ưu nhược điểm của từng phương pháp, nhưng sẽ là khó để có thể kết luận phương pháp nào hiệu quả hơn. Năm 2007, **M. Feldman** [7] đã giới thiệu cách xác định tham số hệ dao động phi tuyến yếu trên cơ sở biến đổi Hilbert. Năm 2008, **P. Frank Pai cùng cộng sự** [8] trình bày xử lý tín hiệu phi tuyến trên cơ sở biến đổi Hilbert Huang để xác định hệ động lực học tham số và không tham số. Năm 2009, **M. Feldman cùng cộng sự** [9] sử dụng biến đổi Hilbert kết hợp với dao động cưỡng bức và dao động tự do để xác định tham số hệ phi tuyến. Năm 2010, **H.A. Nasrellah và C.S. Manohar** [10] đã sử dụng hướng lọc phần tử để xác định tham số kết cấu từ kết quả phản ứng động lực học của tương tác dầm-xe. Năm 2011, **Te-Yu Liu cùng cộng sự** [11] sử dụng biến đổi Hilbert Huang để xác định hệ kết cấu cầu.

Như vậy việc định tham số dao động kết cấu thu hút rất nhiều sự quan tâm của các nhà khoa học trên thế giới nhưng phần lớn sử dụng phương pháp chính xác trong phân tích và các kỹ thuật xử lý kết quả dao động tiên tiến, các phương pháp đó gặp khó khăn khi kết cấu có độ cứng thay đổi hay có các khối lượng tập trung phân bố trên kết cấu. Để vượt qua những khó khăn trên bài báo sử dụng phương pháp gần đúng (*phương pháp Rayleigh*) để thiết lập mối quan hệ giữa tần số của kết cấu đo được ứng với các trường hợp khối lượng chất thêm trên dầm. Thông qua mối quan hệ đó lần lượt đi xác định được độ cứng tương đương (*độ cứng của kết cấu trong tần số dao động thứ nhất*) và khối lượng tương đương (*khối lượng tham gia vào dạng dao động thứ nhất*), từ đó xác định khối lượng trên đơn vị chiều dài của kết cấu, *EI* của kết cấu và hàm dạng của dạng dao động thứ nhất.

Bài báo bước đầu phân tích cho bài toán dầm giản đơn, không xét đến cản có khối lượng trên đơn vị chiều dài (\bar{m}) và độ cứng chống uốn (*EI*) là hằng số. Kết quả phân tích theo phương pháp đề xuất của bài báo được so sánh với các số liệu giả thiết ban đầu cho kết quả tốt. Ngoài ra bài báo cũng đề xuất phương pháp xác định hàm dạng thực tế cho dầm, kết quả tính các tham số khối lượng trên đơn vị chiều dài và *EI* bằng hàm dạng mới cho kết quả có độ chính xác cao hơn so với hàm dạng truyền thống.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Theo Rayleigh [12], tần số dao động của kết cấu có thể biểu diễn dưới dạng

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (1)$$

trong đó k^* là độ cứng suy rộng (*tổng quát*) và m^* là khối lượng suy rộng phụ thuộc vào kết cấu và hàm dạng lựa chọn trong hệ tọa độ suy rộng

$$m^* = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum m_i [\psi(x_i)]^2 + \sum J_i [\psi'(x_i)]^2 \quad (2)$$

$$k^* = \int_0^L k(x) [\psi(x)]^2 dx + \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx + \sum k_i [\psi(x_i)]^2 \quad (3)$$

trong đó:

$\psi(x)$: hàm dạng có thể chọn dạng $\frac{x}{L} \left\{ 3 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right\}$; $x \leq L/2$ hoặc dạng $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$;

hoặc hàm dạng tự xây dựng.

$m(x)$: khối lượng trên một đơn vị chiều dài;

m_i : các khối lượng chất thêm tại vị trí x_i ;

J_i : các mô men quán tính khối lượng chất thêm tại vị trí x_i ;

$k(x)$: độ cứng nền đàn hồi trên một đơn vị chiều dài;

$EI(x)$: độ cứng chống uốn của dầm;

k_i : độ cứng gối đàn hồi tại vị trí x_i ;

x_i : vị trí khối lượng chất thêm, mô men quán tính khối lượng chất thêm (gối đàn hồi);

$\psi''(x)$: đạo hàm bậc hai theo biến x của hàm dạng.

Trong trường hợp dầm giản đơn có 1 khối lượng tập trung thì công thức trên đơn giản như sau:

$$m^* = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx + m [\psi(x_1)]^2 = m_{eq} + m [\psi(x_1)]^2 \quad (4)$$

$$k^* = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx = k_{eq} \quad (5)$$

từ trên ta có

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \rightarrow \omega^2 = \frac{k_{eq}}{m_{eq} + m [\psi(x_1)]^2} \quad (6)$$

Nếu $\psi(x_1) = 1$ (trường hợp x_1 tại giữa nhịp) thì

$$m = \frac{k_{eq}}{\omega^2} - m_{eq} \quad (7)$$

Từ “phương trình (7)” có thể thấy m và $1/\omega^2$ sẽ có quan hệ tuyến tính với nhau dạng phương trình $y=a*x+b$, như vậy nếu ta có các cặp số liệu đo ngoài thực tế là m_i và $1/\omega_i^2$ thì sẽ có thể xác định được k_{eq} và m_{eq} thông qua đường quan hệ tuyến tính của chúng.

Sau khi xác định k_{eq} và m_{eq} nếu biết được hàm dạng của kết cấu thì có thể xác định được $EI(x)$ và $m(x)$ tương ứng, theo công thức sau:

Nếu $EI(x)=EI$ (hằng số); $m(x)=\bar{m}$ (hằng số) khi đó

$$EI = \frac{k_{eq}}{\int_0^L [\psi''(x)]^2 dx}; \quad \bar{m} = \frac{m_{eq}}{\int_0^L [\psi(x)]^2 dx} \quad (8)$$

Trong bài báo này trước tiên xét trường hợp sử dụng hàm dạng $\psi(x)$ truyền thống và đi xác định EI và \bar{m} . Tiếp đó biến đổi “phương trình (6)” có thể xác định các giá trị hàm dạng $\psi(x)$ rời rạc tại các vị trí có bố trí tải trọng chất thêm theo phương trình sau:

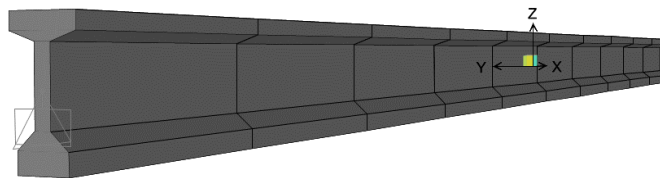
$$[\psi(x_i)]^2 = \frac{\frac{k_{eq}}{\omega^2(x_i)} - m_{eq}}{m(x_i)} \quad (9)$$

Trong công thức trên nếu $m(x_i)$ là tham số xác định, chỉ có $\omega(x_i)$ thay đổi ứng với các vị trí đặt khối lượng chất thêm, chính sự thay đổi này tạo ra các giá trị $\psi(x_i)$ của hàm $\psi(x)$.

3. VÍ DỤ SỐ

3.1. Các thông số đầu vào

Thực hiện ví dụ số với dầm giản đơn (*dầm tính theo lý thuyết dầm Euler–Bernoulli*) có các thông số sau: chiều dài nhịp $L=30\text{m}$. Vật liệu bê tông có các thông số sau: trọng lượng riêng $\gamma=23,5631\text{KN/m}^3$; khối lượng riêng $\rho=2,4028\text{KN/m}^3/\text{g}$; mô đun đàn hồi $E=24.855.578\text{KN/m}^2$. Mặt cắt ngang dầm chữ I cao 1,65m có các đặc trưng hình học: diện tích mặt cắt $A=0,6533\text{ m}^2$; $I=0,2232\text{ m}^4$.



Hình 1. Mô hình dầm đưa vào phân tích.

Để thiết lập được các cặp số liệu (*khối lượng chất thêm m_i và tần số dao động tương ứng ω_i*) bài báo tiến hành phân tích dao động với các trường hợp dầm có khối lượng chất thêm khác nhau, cụ thể là 50KN/g , 100KN/g , 150KN/g , 200KN/g và 250KN/g tại vị trí giữa nhịp (*vị trí hàm dạng có giá trị bằng 1*). Để kết quả sát với trường hợp đo ngoài hiện trường, kết quả gia tốc sẽ được lấy tại vị trí giữa nhịp và phân tích FFT để ra được tần số dao động tự nhiên

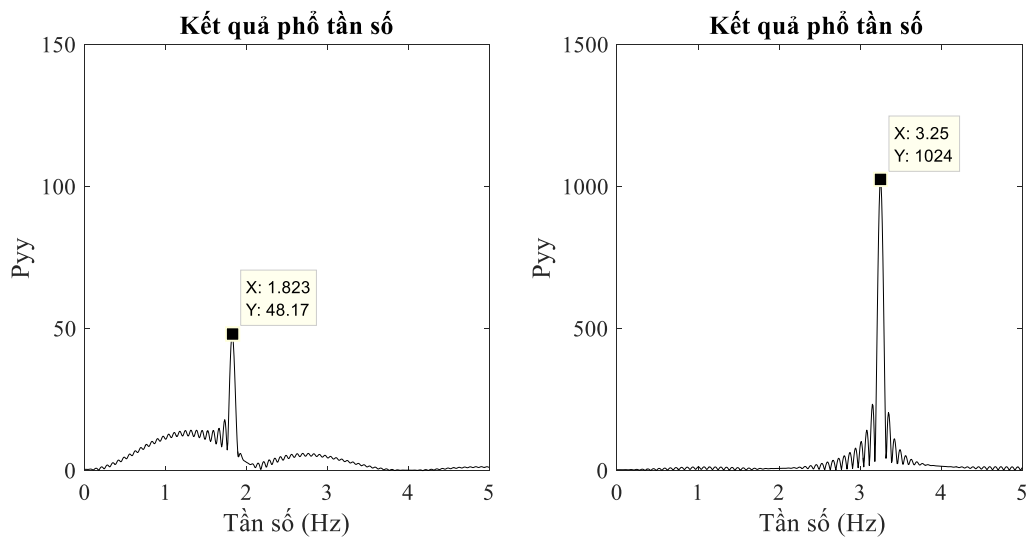
của các trường hợp, cách làm này tương tự như việc chất tải lên cầu sau đó đo dao động của dầm bằng đầu đo gia tốc.

Để kiểm tra được sự phù hợp của hàm dạng $\psi(x)$ bài báo sẽ đi tính toán tham số ứng với ba dạng hàm dạng khác nhau, dạng 1 là $\frac{x}{L} \left\{ 3 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right\}; x \leq L/2$, dạng 2 là $\sin \left(\frac{\pi x}{L} \right)$ và dạng 3 là hàm dạng xây dựng từ các kết quả đo đạc.

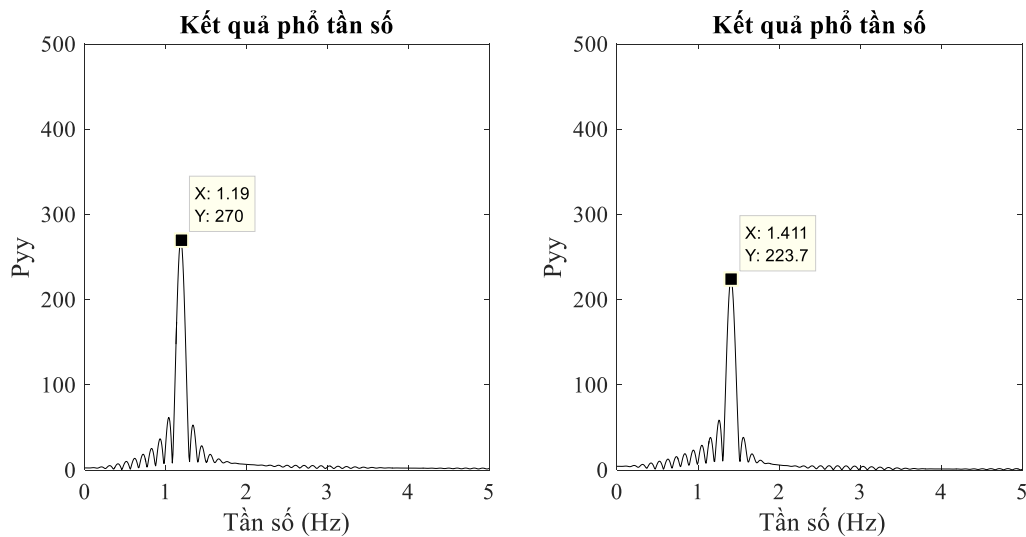
3.2. Các kết quả phân tích

Tiến hành phân tích (đo) dao động của dầm với các trường hợp: không có khối lượng chất thêm và có khối lượng chất thêm 50KN/g, 100KN/g, 150KN/g, 200KN/g và 250KN/g tại vị trí giữa nhịp.

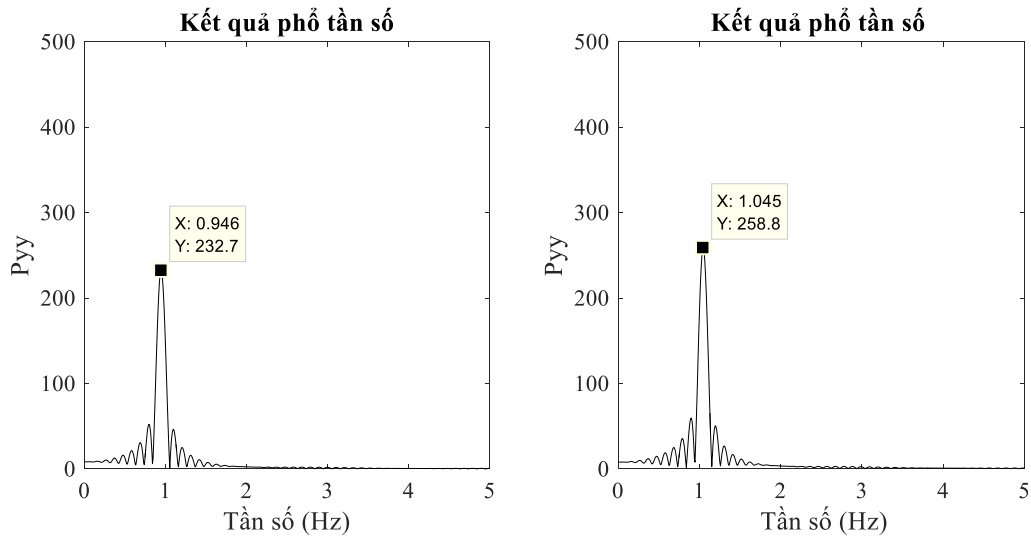
Kết quả nhận được sau đó biến đổi FFT để thu được kết quả tần số dao động của dầm như sau:



Hình 2. Tần số của trường hợp có chất thêm 50KN/g và không chất thêm.



Hình 3. Tần số của trường hợp chất thêm 150KN/g và chất thêm 100KN/g.



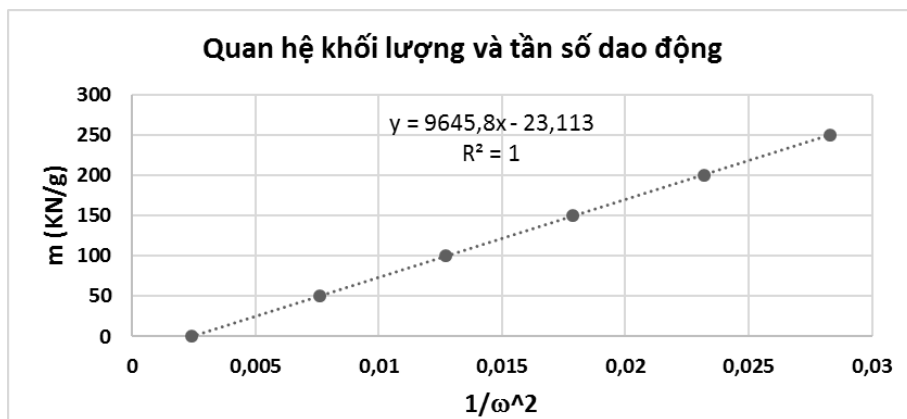
Hình 4. Tần số của trường hợp chất thêm 250KN/g và chất thêm 200KN/g.

Từ kết quả phân tích trên tổng hợp kết quả như sau:

Bảng 1. Tổng hợp kết quả đo dao động.

f (Hz)	3,25000	1,82300	1,41100	1,19000	1,04500	0,94600
1/f²	0,094675	0,300903	0,50228	0,706165	0,91573	1,117423
1/ω²	0,002398	0,007622	0,012723	0,017887	0,023196	0,028305
m (KN/g)	0	50	100	150	200	250

Từ kết quả trên có được quan hệ giữa khối lượng chất thêm và tần số như sau:



Hình 5. Quan hệ giữa khối lượng chất thêm và $1/\omega^2$.

Từ trên cho thấy phương trình tuyến tính phù hợp nhất từ các bộ số liệu có dạng $m=9645,8(1/\omega^2)-23,113$ nên có thể ước tính $k_{eq}=9645,8$ và $m_{eq}=23,113$.

Coi $m(x)=\bar{m}$ và $EI(x)=EI$ là hằng số, sau đó xác định \bar{m} và EI theo các hàm dạng khác nhau như sau:

$$m_{eq} = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx; k_{eq} = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx \quad (10)$$

+) Với trường hợp $\psi(x) = \frac{x}{L} \left\{ 3 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right\}$

Thay vào công thức trên có được

$$m_{eq} = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx = \frac{17}{35} \bar{m}L \quad (11)$$

$$k_{eq} = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx = EI \frac{48}{L^3} \quad (12)$$

Từ phương trình trên xác định được $\bar{m} = 1,586 \text{KN/m/g}$; $EI = 5.425.762,5 \text{ KN/m}^2$ sai số so với thực tế (1,570; 5.547.765) là 1,0% và 2,2%.

+) Trường hợp $\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

thay vào công thức trên có được

$$m_{eq} = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \bar{m}L \quad (13)$$

$$k_{eq} = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx = EI \frac{\pi^4}{2.L^3} \quad (14)$$

Từ phương trình trên xác định được $\bar{m} = 1,54087 \text{KN/m/g}$; $EI = 5.347.275,03 \text{KN/m}^2$ sai số so với thực tế (1,570; 5.547.765) là 1,8% và 3,6%.

Kết quả trên cho thấy kết quả xác định tham số sẽ phụ thuộc nhiều vào hàm dạng được lựa chọn. Trong trường hợp sử dụng hàm dạng là đa thức bậc ba sẽ thu được kết quả chính xác hơn so với hàm dạng là hàm lượng giác. Tiếp theo bài báo sẽ đi xác định hàm dạng thực tế của kết cấu và sau đó xác định các tham số \bar{m} , EI của kết cấu theo hàm dạng được xây dựng từ kết quả đo đặc tần số của kết cấu.

+) Xác định hàm dạng thực tế của kết cấu và \bar{m} , EI theo hàm dạng thực tế

Biến đổi “công thức (6)” đưa được về dạng quan hệ giữa hàm dạng và tần số của kết cấu

như sau: $[\psi(x_i)]^2 = \frac{k_{eq}}{\omega^2(x_i)} - m_{eq}$ từ công thức trên nếu tiến hành đặt khối lượng 150KN/g tại

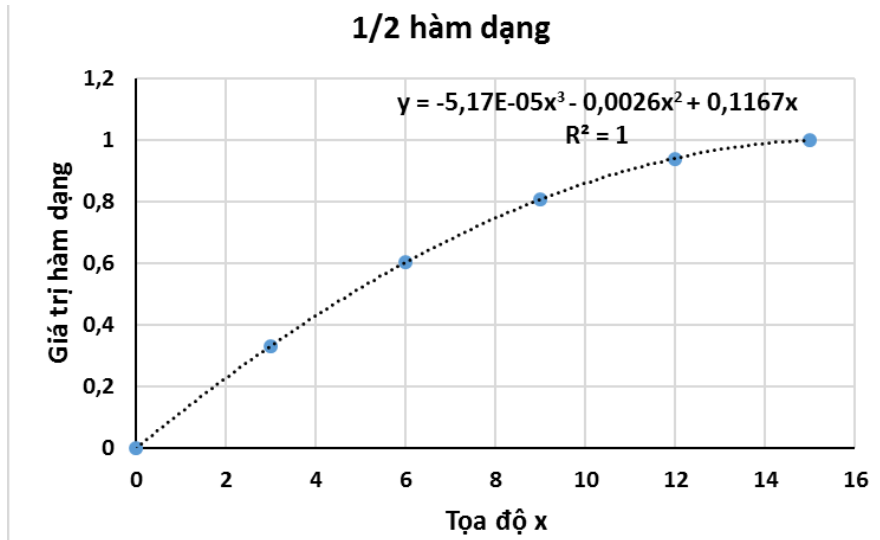
các vị trí cách đầu dầm 3m, 6m, 9m, 12m và 15m. Tiến hành phân tích thu được các tần số dao động và tính ra được các giá trị $\psi(x_i)$; $x_i = 3, 6, 9, 12, 15$ tương ứng

Bảng 2. Kết quả xác định hàm dạng $\psi(x_i)$.

x_i (m)	3,00	6,00	9,00	12,00	15,00
f_i	2,48	1,72	1,38	1,23	1,19
ω_i^2	242,6025	117,4199	75,62682	60,06242	55,89411
$[\psi(x_i)]^2$	0,105823	0,35454	0,643221	0,877336	0,996398

$\psi(x_i)$	0,325304	0,595433	0,802011	0,936662	0,998197
-------------	----------	----------	----------	----------	----------

Từ các giá trị $\psi(x_i)$ có thể xây dựng hàm dạng là hàm phù hợp nhất với bộ số liệu trên, như thể hiện bên dưới



Hình 6. Hàm dạng xây dựng từ số liệu đo.

Như vậy có thể thấy hàm dạng có thể chọn theo dạng đa thức bậc ba phù hợp nhất như sau:

$$\psi(x) = -5,17 \cdot 10^{-5} x^3 - 0,0026 x^2 + 0,1167 x \text{ với } (x \leq L/2) \quad (15)$$

Để kiểm nghiệm sự hiệu quả của hàm dạng mới tìm được, bài báo tiến hành tính toán \bar{m} và EI theo “công thức (8)”

$$\bar{m} = \frac{m_{eq}}{\int_0^L [\psi(x)]^2 dx} = \frac{23,113}{2 \cdot 7,41058} = 1,55946 \text{ KN/m/g} \quad (16)$$

$$EI = \frac{k_{eq}}{\int_0^L [\psi''(x)]^2 dx} = \frac{9645,8}{2 \cdot 0,0008764125} = 5.503.002,296 \text{ KN/m}^2 \quad (17)$$

Kết quả tính toán trên sai số so với thực tế (1,570; 5.547.765) là 0,7% và 0,8%. Kết quả thu được cho thấy sử dụng hàm dạng xây dựng cho kết quả xác định tham số kết cấu có độ chính xác cao hơn so với sử dụng các hàm dạng truyền thống chung cho tất cả các dạng kết cấu.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã đi xây dựng phương pháp xác định tham số dựa trên phương pháp phân tích dao động của Rayleigh. Bài báo đã xác định được các tham số chính ảnh hưởng đến việc phân tích dao động của dầm đó là khối lượng trên đơn vị chiều dài \bar{m} , độ cứng EI và hàm dạng cho

dạng dao động thứ nhất của dầm. Bài báo đã xác định tham số \bar{m} và EI theo ba hàm dạng khác nhau (hai hàm dạng được sử dụng phổ biến và một hàm dạng do tác giả xây dựng lên) cho kết quả sai số dưới 5% so với giá thiết ban đầu. Kết quả của bài báo hứa hẹn giúp ích cho việc xác định \bar{m} và EI của kết cấu thực tế bằng cách đo dao động theo các kích bản như trong bài báo đề xuất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Jann N. Yang, Ying Lei, Shuwen Pan, Norden Huang, System identification of linear structures based on Hilbert–Huang spectral analysis. Part 1: normal modes, Earthquake Engng Struct. Dyn., 32 (2003) 1443–1467. <https://doi.org/10.1002/eqe.287>
- [2] T. Kijewski, A. Kareem, Wavelet transform for system identification in Civil Engineering, Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 18 (2003) 339-355. <https://doi.org/10.1111/1467-8667.t01-1-00312>
- [3] J. Chen, Y.L. Xu, R.C. Zhang, Modal parameter identification of Tsing Ma suspension bridge under Typhoon Victor: EMD-HT method, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 92 (2004) 805–827. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2004.04.003>
- [4] Joo Sung Kang, Seung-Keun Park, Soobong Shin, Hae Sung Lee, Structural system identification in time domain using measured acceleration, Journal of Sound and Vibration, 288 (2005) 215–234. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.01.041>
- [5] B.F. Yan, A. Miyamoto, E. Bruhwiler, Wavelet transform-based modal parameter identification considering uncertainty, Journal of Sound and Vibration, 291 (2006) 285–301. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.06.005>
- [6] Banfu Yan, Ayaho Miyamoto, A Comparative Study of Modal Parameter Identification Based on Wavelet and Hilbert–Huang Transforms, Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 21 (2006) 9–23. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2005.00413.x>
- [7] Michael Feldman, Identification of weakly nonlinearities in multiple coupled oscillators, Journal of Sound and Vibration, 303 (2007) 357–370. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.01.028>
- [8] P. Frank Pai, Anthony N. Palazotto, HHT-based nonlinear signal processing method for parametric and non-parametric identification of dynamical systems, International Journal of Mechanical Sciences, 50 (2008) 1619–1635. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2008.10.001>
- [9] Michael Feldman, Izhak Bucher, Joseph Rotberg, Experimental Identification of Nonlinearities under Free and Forced Vibration using the Hilbert Transform, Journal of Vibration and Control, 15 (2009) 1563-1579. <https://doi.org/10.1177/1077546308097270>
- [10] H.A. Nasrellah, C.S. Manohar, A particle filtering approach for structural system identification in vehicle–structure interaction problems, Journal of Sound and Vibration 329 (2010) 1289–1309. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.10.041>
- [11] Te-Yu Liu, Wei-Ling Chiang, Cheng-Wu Chen, Wen-Ko Hsu, Chi-Wei Lin, Dong-Jiang Chiou and Pei-Chun Huang, Structural system identification for vibration bridges using the Hilbert–Huang transform, Journal of Vibration and Control, 18 (2011) 1939-1956. <https://doi.org/10.1177/1077546311428347>
- [12] R. W. Clough, J. Penzien, Dynamics of structures, Computers & Structures, Inc. , Berkeley, CA 94704, 2003.