



STOKES FLOW OVER ROUGHNESS SURFACE WITH COSINE VARIATION OF THE LOCAL SLIP LENGTH

Tran Anh Tuan^{1*}, Nguyen Dinh Hai²

¹*Section of Bridge and Tunnel Engineering, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.*

²*Section of Materials of Construction, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.*

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 16/09/2019

Revised: 22/10/2019

Accepted: 02/11/2019

Published online: 16/12/2019

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.4.15>

* *Corresponding author*

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Abstract. This investigation is concerned with the Stokes flow over rough surfaces characterized by the local slip length, which is expressed in the form of the cosine function. In this work, we are interested in two cases where the patterning direction is transverse and parallel to the flow. To achieve this objective, we use a semi-analytic method based on the Fourier expansions of the pressure and velocity fields. The results obtained by the proposed method are compared with the corresponding numerical ones provided by the finite element method and with the ones reported in the literature.

Keywords: rough surface, effective slip length, Stokes flow, cosine function.

© 2019 University of Transport and Communications



DÒNG CHẢY STOKES TRÊN BỀ MẶT GÒ GHỀ CÓ CHIỀU DÀI TRƯỢT CỤC BỘ BIẾN THIÊN THEO HÀM SỐ COSINE

Trần Anh Tuấn^{1*}, Nguyễn Đình Hải²

¹Bộ môn Cầu hầm, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.

²Bộ môn Vật liệu xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.

THÔNG TIN BÀI BÁO

Chuyên mục: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 16/09/2019

Ngày nhận bài sửa: 22/10/2019

Ngày chấp nhận đăng: 02/11/2019

Ngày xuất bản Online: 16/12/2019

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.4.15>

* Tác giả liên hệ

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Tóm tắt. Nghiên cứu này liên quan đến dòng chảy Stokes trên bề mặt gò gề đặc trưng bởi chiều dài trượt cục bộ biến đổi tuần hoàn theo hàm số cosine. Ở đây chúng ta phân tích cả hai tình huống đối với hướng của dòng chảy vuông góc và song song với cấu trúc gò gề. Để đạt được mục tiêu này, chúng ta sử dụng một phương pháp bán giải tích trên cơ sở khai triển chuỗi Fourier của trường vận tốc và áp suất. Kết quả thu được bằng phương pháp này được so sánh với phương pháp phân tử hữu hạn và một số kết quả nghiên cứu đã công bố trên thế giới.

Từ khóa: bề mặt gò gề, chiều dài trượt có hiệu, dòng chảy Stokes, hàm số cosine.

© 2019 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Bài toán dòng chảy trong trong các kết cấu vi mô, bao gồm dòng chảy micro, dòng chảy nano, xuất hiện trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật cũng như khoa học ứng dụng. Ví dụ như dòng chảy trong các lỗ rỗng, khe nứt của vật liệu, dòng chảy của chất bôi trơn trong các thiết bị cơ khí, dòng chảy trong các cấu trúc vi sinh học tự nhiên cũng như nhân tạo. Về cơ bản những dạng dòng chảy kể trên có dạng chảy tầng và thường được mô tả bằng phương trình Stokes. Trường nghiệm vận tốc và áp suất của bài toán dòng chảy chất lỏng phụ thuộc chặt chẽ vào điều kiện biên tại bề mặt mà ở đó chất lỏng tiếp xúc với chất rắn. Trong cơ học chất lỏng cổ điển, người ta coi bề mặt chất rắn là trơn tuyệt đối khi đó vận tốc tại bề mặt này được coi là bằng không. Tuy nhiên giả thuyết này không còn đúng nữa khi nghiên cứu các dòng chảy ở cấp độ vi mô, ở cấp độ này bề mặt chất rắn thực chất là gò gề và giữ lại các bóng khí trên bề mặt của nó, làm cho bề mặt tiếp xúc giữa chất lỏng và chất rắn là một bề mặt không đồng nhất, bao gồm mặt tiếp xúc lỏng-rắn và lỏng-khí. Điều này kéo theo điều kiện biên của dòng

chảy phải được thay thế bằng điều kiện hỗn hợp: (i) trượt tại mặt tiếp xúc lỏng-khí và (ii) không trượt tại mặt tiếp xúc lỏng-rắn, hiện tượng này được mô tả trên hình 1. Điều kiện biên trượt được đặc trưng bởi một đại lượng gọi là chiều dài trượt cục bộ $\Lambda \neq 0$, trong khi đó tại vị trí dòng chảy không trượt thì $\Lambda = 0$.

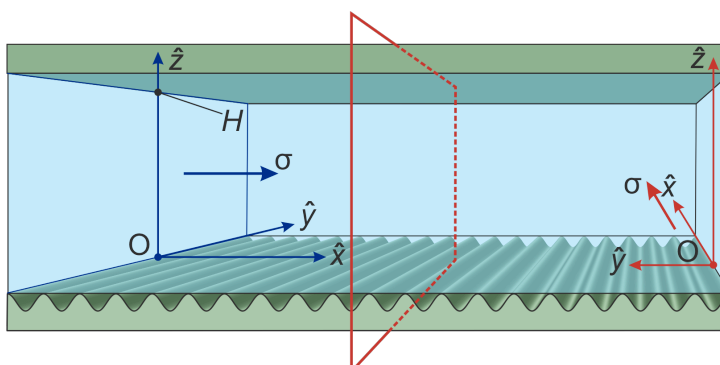
Tùy thuộc vào tính chất gồ ghề của bề mặt chất rắn mà tại mặt tiếp xúc lỏng-khí độ lớn của chiều dài trượt cục bộ có thể biến động. Vì vậy để đại diện cho toàn bộ điều kiện biên hỗn hợp nói trên cần một đại lượng gọi là chiều dài trượt có hiệu, đại lượng này đặc trưng cho điều kiện biên của chất lỏng chảy trên bề mặt chất rắn gồ ghề ở cấp độ vĩ mô, ở cấp độ này bề mặt chất rắn gồ ghề được đồng nhất hoá và thay thế bằng một bề mặt phẳng tuy nhiên vận tốc của dòng chảy tại đây là khác không và khác với giả thuyết về điều kiện biên của dòng chảy trong cơ học chất lỏng cổ điển. Liên quan đến chủ đề này đã có rất nhiều nghiên cứu, có thể kể đến như công trình của Priezjev và cộng sự năm 2005 [1], Teo và Khoo năm 2009 [2], Balyaev và Vinogradova năm 2010 [3], Ng và Wang năm 2010 [4], Zhou và cộng sự năm 2012, 2013 [5,6], Feuillebois và cộng sự năm 2009, 2010 [7,8], Vinogradova và Balyaev năm 2011 [9] Asmolov và cộng sự năm 2013 [10], Kumar và cộng sự năm 2016 [11]. Trong các công trình nêu trên các nhà nghiên cứu thường tập trung vào một trong hai loại dòng chảy phổ biến là Couette và Poiseuille, đối với dòng Couette chiều dài trượt có hiệu không bị ảnh hưởng bởi chiều cao khe còn đối với dòng Poiseuille giá trị chiều dài trượt có hiệu biến thiên theo sự biến thiên của chiều cao khe. Các kết quả mà họ thu được là lời giải cho trường hợp bề mặt gồ ghề dạng rãnh dọc, rãnh ngang, dạng cột hoặc lỗ vuông, tròn, dạng bề mặt này được đặc trưng bởi chiều dài trượt là hằng số. Asmolov đã nghiên cứu đối với trường hợp bề mặt gồ ghề đặc trưng bởi chiều dài trượt biến thiên hình sin tuy nhiên dòng chảy chất lỏng là dòng Couette. Kumar và cộng sự cũng đã nghiên cứu dòng chảy trên bề mặt có chiều dài trượt biến thiên theo hàm số cosine, thế nhưng nghiên cứu này chỉ giải quyết bài toán dòng chảy ngang. Vì vậy nhóm nghiên cứu nhận thấy rằng trường hợp dòng chảy Poiseuille dọc và ngang theo rãnh gồ ghề dạng hình cosine là vấn đề cần được giải quyết trong khuôn khổ bài báo này.

Nghiên cứu này quan tâm đến trường hợp dòng chảy Poiseuille trong khe giới hạn bởi hai mặt phẳng đó bề mặt trơn phía trên được đặc trưng bởi điều kiện không trượt, ngược lại bề mặt gồ ghề phía dưới lại có giá trị chiều dài trượt cục bộ biến thiên theo hàm số cosine. Mục tiêu chính của bài toán này bao gồm: Một là đồng nhất hoá bề mặt gồ ghề này thành một bề mặt phẳng nhưng được đặc trưng bởi một giá trị chiều dài trượt có hiệu. Hai là xác định các đặc trưng của dòng chảy tại mọi điểm tương ứng với điều kiện biên trượt biến thiên nói trên. Để đạt được hai mục tiêu kể trên một phương pháp bán giải tích được sử dụng trên cơ sở kết hợp khai triển chuỗi Fourier và rời rạc hóa bề mặt trên phương diện hình học.

2. MÔ TẢ BÀI TOÁN VÀ THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Mô hình nghiên cứu của bài toán được mô tả như sau: Trong không gian Cartesian $O-x\hat{y}\hat{z}$ xem xét một dòng chảy tầng (tuân theo phương trình Stokes) trong một khe được tạo bởi hai bề mặt song song, lần lượt đặt tại vị trí $\hat{z} = 0$ và $\hat{z} = H$. Mặt trên có cấu tạo không thấm và trơn tuyệt đối, điều kiện biên của chất lỏng tiếp xúc với bề mặt này được đại diện bằng giá trị chiều dài trượt $\Lambda_H = 0$. Ngược lại bề mặt dưới có cấu tạo gồ ghề dạng rãnh lượn sóng và điều kiện tiếp xúc của chất lỏng tại đây được đặc trưng bởi chiều dài trượt $\Lambda \neq 0$ biến thiên theo hàm số cosine. Dòng chảy chất lỏng trong khe này được sinh ra bởi một gradient áp suất $\nabla P = (-\sigma, 0, 0)$ xem xét trong hai trường hợp sau: (i) theo phương vuông góc với rãnh,

(ii) theo phương song song với rãnh. Hai trường hợp này được gọi tên tương ứng là dòng chảy ngang và dòng chảy dọc. Mô hình bài toán được minh họa trên hình 1, trong đó nửa hình bên trái tương ứng với trường hợp dòng chảy ngang, nửa hình bên phải tương ứng với trường hợp dòng chảy dọc.

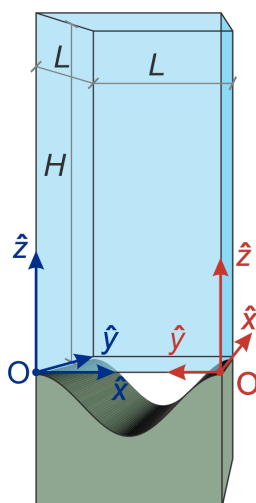


Hình 1. Mô hình dòng chảy trong khe.

Giá trị chiều dài trượt cục bộ được biểu diễn cho hai trường hợp của dòng chảy thông qua biểu thức dưới đây

$$\Lambda(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} \Lambda_0 [1 + a \cos(2\pi \hat{x} / L)] \\ \Lambda_0 [1 + a \cos(2\pi \hat{y} / L)] \end{cases}, \quad (1)$$

trong đó L là chiều dài bước sóng gồ ghề, a là hệ số biên độ lấy giá trị từ 0 đến 1, Λ_0 là giá trị biên độ chiều dài trượt. Ở đây nhận thấy rằng mô hình bài toán có tính chất tuần hoàn nên chúng ta chỉ cần xem xét một khối chất lỏng tính toán đơn vị U có hình dạng và kích thước được biểu diễn trên hình 2.



Hình 2. Miền chất lỏng tính toán.

Nhằm mục đích biểu diễn các phương trình dưới dạng không thứ nguyên, chúng ta lựa chọn L , $\sigma L^2 / \mu$, σ lần lượt là độ lớn đơn vị của chiều dài, vận tốc và gradient áp suất với μ là độ nhớt của chất lỏng. Như vậy phương trình Stokes mô tả dòng chảy sẽ được viết dưới dạng không thứ nguyên như sau:

$$\Delta \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \nabla p(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0, \quad (3)$$

trong đó $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x})$ lần lượt là trường vận tốc và áp suất của dòng chảy. Biểu thức (1) viết lại như sau

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} \lambda_0 [1 + a \cos(2\pi x)] \\ \lambda_0 [1 + a \cos(2\pi y)] \end{cases}, \quad (4)$$

với λ và λ_0 là chiều dài trượt cục bộ và biên độ chiều dài trượt không thứ nguyên.

Nghiệm của phương trình Stokes (2) và (3) giới hạn trong phạm vi miền chất lỏng tính toán U (hình 2) thỏa mãn tính chất tuần hoàn tại bốn mặt bên được biểu diễn bằng khai triển chuỗi Fourier như các thức dưới đây

$$u(x, y, z) = -\frac{z^2}{2} + \frac{hbz}{2(h+b)} + \frac{h^2b}{2(h+b)} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) U_{n0}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\beta_m y) U_{0m}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) U_{nm}(z), \quad (5)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) V_{nm}(z), \quad (6)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x) W_{n0}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) W_{nm}(z), \quad (7)$$

$$p(x, y, z) = -x + p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x) P_{n0}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) P_{nm}(z), \quad (8)$$

trong đó h, b lần lượt là chiều cao khe và chiều dài trượt có hiệu không thứ nguyên. Chúng ta nhận thấy rằng ở biểu thức (5) đại lượng chiều dài trượt có hiệu cần tìm là một thành phần của biểu thức nghiệm, điều này đã được chứng minh trong nghiên cứu của Tran và cộng sự năm 2017 [12]. Dạng của các hàm số đối với biến z : $U_{n0}(z)$, $U_{0m}(z)$, $U_{nm}(z)$, $V_{nm}(z)$, $W_{n0}(z)$, $W_{nm}(z)$, $P_{n0}(z)$, $P_{nm}(z)$ là chưa biết, chúng được xác định thông qua việc thay biểu thức nghiệm (5-8) vào phương trình Stokes (2) và (3) rồi giải hệ các phương trình vi phân thu được dạng nghiệm như sau

$$P_{n0}(z) = A_{1n} e^{-\alpha_n z} + A_{2n} e^{\alpha_n z}, P_{nm}(z) = D_{1nm} e^{-\gamma_{nm} z} + D_{2nm} e^{\gamma_{nm} z}, \quad (9)$$

$$U_{n0}(z) = \left(B_{1n} - \frac{A_{1n}}{2} z \right) e^{-\alpha_n z} + \left(B_{2n} + \frac{A_{2n}}{2} z \right) e^{\alpha_n z}, U_{0m}(z) = H_{1m} e^{-\beta_m z} + H_{2m} e^{\beta_m z}, \quad (10)$$

$$U_{nm}(z) = \left(E_{1nm} - \frac{\alpha_n D_{1nm}}{2\gamma_{nm}} z \right) e^{-\gamma_{nm} z} + \left(E_{2nm} + \frac{\alpha_n D_{2nm}}{2\gamma_{nm}} z \right) e^{\gamma_{nm} z}, \quad (11)$$

$$V_{nm}(z) = \left(F_{1nm} + \frac{\beta_m D_{1nm}}{2\gamma_{nm}} z \right) e^{-\gamma_{nm}z} + \left(F_{2nm} - \frac{\beta_m D_{2nm}}{2\gamma_{nm}} z \right) e^{\gamma_{nm}z}, \quad (12)$$

$$W_{n0}(z) = \left(C_{1n} + \frac{A_{1n}}{2} z \right) e^{-\alpha_n z} + \left(C_{2n} + \frac{A_{2n}}{2} z \right) e^{\alpha_n z}, \quad (13)$$

$$W_{nm}(z) = \left(G_{1nm} + \frac{D_{1nm}}{2} z \right) e^{-\gamma_{nm}z} + \left(G_{2nm} + \frac{D_{2nm}}{2} z \right) e^{\gamma_{nm}z}. \quad (14)$$

Trong đó $\gamma_{nm}^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2$ và hệ số trong biểu thức hàm số là chưa biết. Lưu ý rằng vận tốc của dòng chảy phải thỏa mãn điều kiện biên tại mặt trên và mặt dưới theo các biểu thức sau

$$u(x, y, h) = v(x, y, h) = w(x, y, h) = w(x, y, 0) = 0, \quad (15)$$

$$u(x, y, 0) = \lambda(x, y)u_z(x, y, 0), v(x, y, 0) = \lambda(x, y)v_z(x, y, 0). \quad (16)$$

Các biểu thức vận tốc (5-7) phải thỏa mãn các điều kiện (15) và (16), từ đó chúng ta thu được hệ 2 phương trình với $1 + 2N + 2N^2$ ẩn số như sau

$$b + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) (\kappa_{1n}^{(x)} - \lambda \varkappa_{1n}^{(x)}) \hat{A}_{1n} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\beta_m y) (\theta_{1m}^{(x)} - \lambda \vartheta_{1m}^{(x)}) \hat{H}_{1m} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) (1 - \lambda \varepsilon_{1nm}^{(x)}) \hat{E}_{1nm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) (1 - \lambda \varepsilon_{2nm}^{(x)}) \hat{E}_{2nm} = \lambda$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) (\zeta_{1nm}^{(y)} - \lambda \varepsilon_{1nm}^{(y)}) \hat{E}_{1nm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) (\zeta_{2nm}^{(y)} - \lambda \varepsilon_{2nm}^{(y)}) \hat{E}_{2nm} = 0 \quad (18)$$

trong đó $b, \hat{A}_{1n}, \hat{H}_{1m}, \hat{E}_{1nm}, \hat{E}_{2nm}$ là những ẩn số cần xác định, chúng được liên hệ với các hệ số trong các phương trình từ (9) đến (14) bằng biểu thức sau

$$\{ \hat{A}_{1n}, \hat{H}_{1m}, \hat{E}_{1nm}, \hat{E}_{2nm} \} = \frac{2(h+b)}{h^2} \{ A_{1n}, H_{1m}, E_{1nm}, E_{2nm} \}, \quad (19)$$

$\kappa_{1n}^{(x)}, \varkappa_{1n}^{(x)}, \theta_{1m}^{(x)}, \vartheta_{1m}^{(x)}, \varepsilon_{1nm}^{(x)}, \varepsilon_{2nm}^{(x)}, \zeta_{1nm}^{(y)}, \varepsilon_{1nm}^{(y)}, \zeta_{2nm}^{(y)}, \varepsilon_{2nm}^{(y)}$ là các hàm số tường minh đối với giá trị chiều dày khe không đơn vị h . Để tìm các ẩn số trong phương trình (17) và (18) chúng ta sử dụng phương pháp rời rạc hoá bề mặt thành các điểm cục bộ và tạo ra $1 + 2N + 2N^2$ phương trình tương ứng với số ẩn để đủ điều kiện giải hệ. Giải thích sâu hơn về phương pháp rời rạc hoá bề mặt có thể tìm thấy trong nghiên cứu của Ng và Wang năm 2010 [4], của Tran năm 2017 [12].

Một khi đã có được nghiệm của hệ phương trình (17), (18) chúng ta có thể dễ dàng xác định được giá trị chiều dài trượt có hiệu và các đặc trưng vật lý của dòng chảy Stokes.

3. KẾT QUẢ SỐ VÀ PHÂN TÍCH

Hệ phương trình sinh ra từ hai phương trình (17), (18) không thể giải được nghiệm tường minh, chính vì thế chúng ta tiến hành giải số một vài trường hợp cụ thể (gọi tên lần lượt là các trường hợp 1, 2, 3, 4) với các số liệu được trình bày trong bảng 1 và 2:

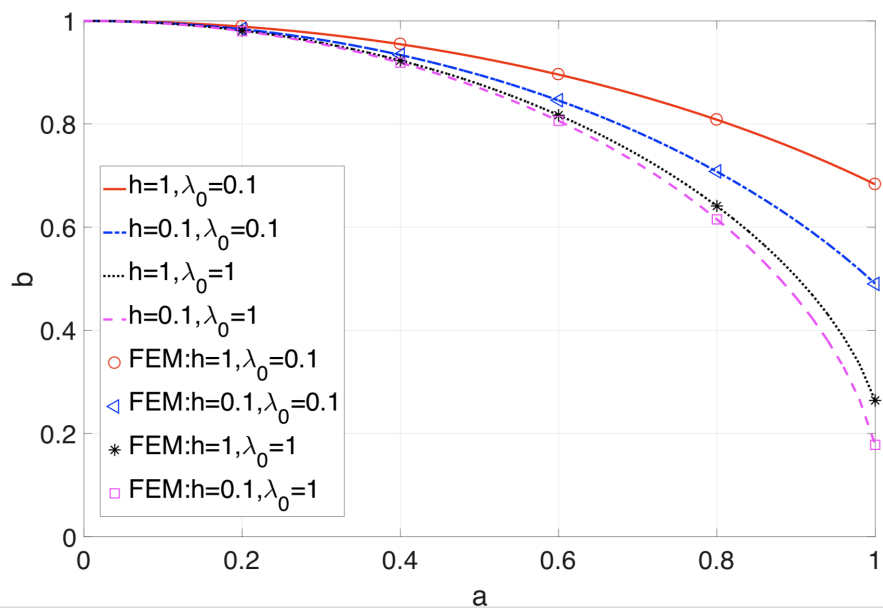
Bảng 1. Thông số đầu vào cho các trường hợp giải cụ thể.

Đại lượng	Trường hợp 1	Trường hợp 2	Trường hợp 3	Trường hợp 4
a	$0 \div 1$	$0 \div 1$	$0 \div 1$	$0 \div 1$
h	1	0,1	1	0,1
λ_0	0,1	0,1	1	1

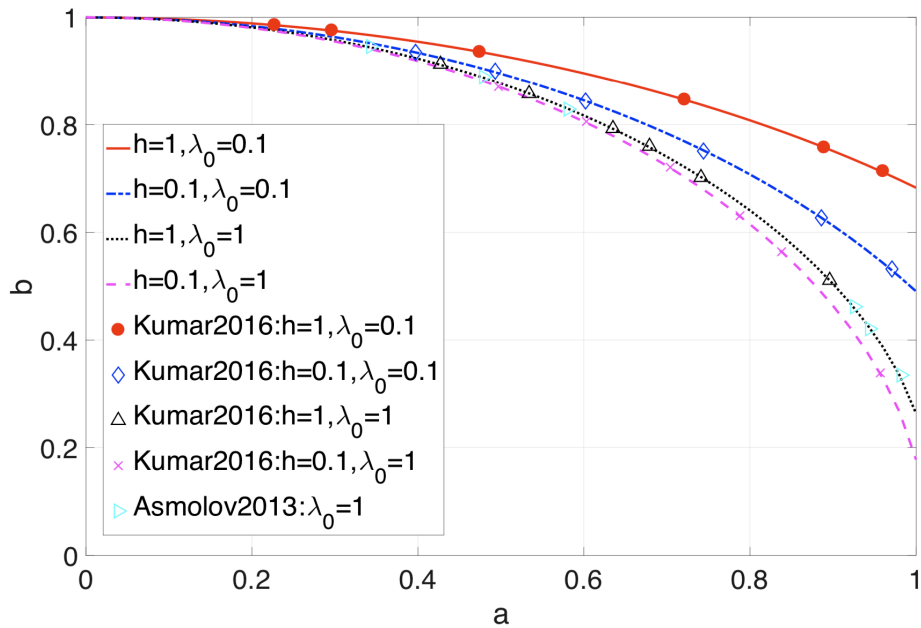
Bảng 2. Thông số mô phỏng so sánh bằng phương pháp PTHH.

Đại lượng	Trường hợp 1	Trường hợp 2	Trường hợp 3	Trường hợp 4
a	$0 \div 1$	$0 \div 1$	$0 \div 1$	$0 \div 1$
H	$16 \mu m$	$1,6 \mu m$	$16 \mu m$	$1,6 \mu m$
Λ_0	$1,6 \mu m$	$1,6 \mu m$	$16 \mu m$	$16 \mu m$

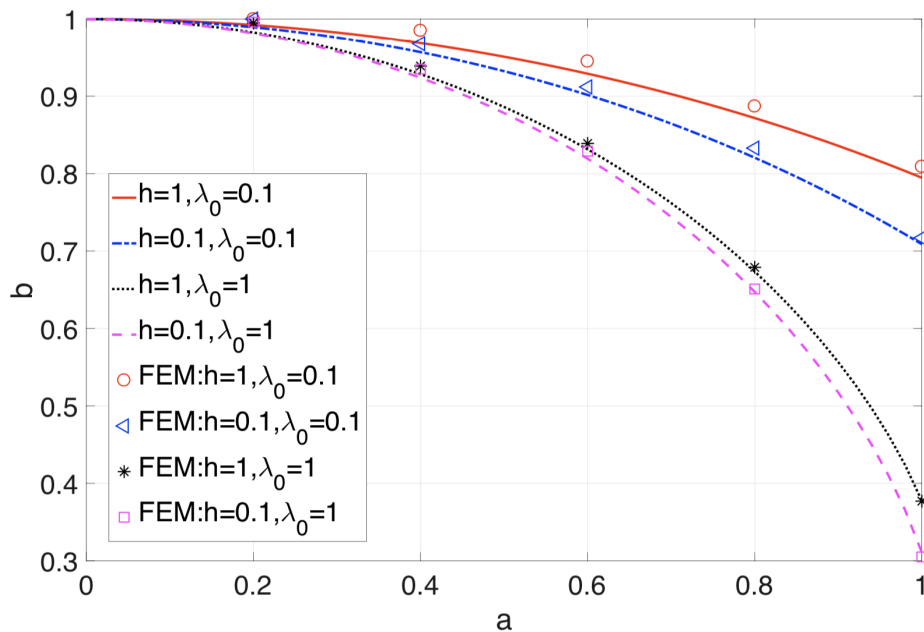
Hình 3, 4, 5 biểu diễn sự biến thiên của giá trị chiều dài trượt có hiệu b khi a thay đổi từ 0 đến 1 tương ứng cho hai trường hợp dòng chảy theo hướng ngang (hình 3, 4) và dọc (hình 5) đối với rãnh. Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng nghiên cứu này cho kết quả khá sát với phương pháp phần tử hữu hạn cũng như kết quả đã công bố của Asmolov và cộng sự năm 2013 [10], của Kumar và cộng sự năm 2016 [11], các so sánh này có chỉ số đánh giá sự chính xác R^2 (R-square) nằm trong khoảng $0.9983 \div 1$. Điều này chứng tỏ tính hiệu quả của phương pháp trình bày trong bài báo này. Từ hình 3, 4, 5 chúng ta cũng rút ra nhận xét rằng: (i) khe càng hẹp thì giá trị chiều dài trượt có hiệu càng nhỏ, (ii) bước sóng càng ngắn càng cho giá trị chiều dài trượt có hiệu càng nhỏ, điều này đúng với cả hai trường hợp chất lỏng chảy ngang và chảy dọc.



Hình 3. Biến thiên chiều dài trượt có hiệu theo bước sóng trong trường hợp dòng chảy ngang và so sánh với phương pháp phần tử hữu hạn.



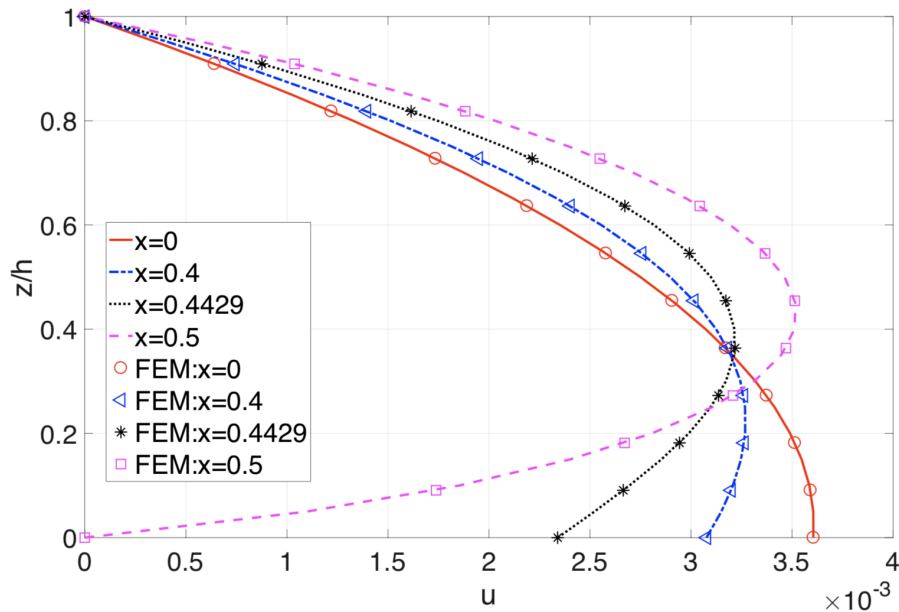
Hình 4. Biến thiên chiều dài trượt có hiệu theo bước sóng trong trường hợp dòng chảy ngang và so sánh với các kết quả đã công bố của Asmolov [10] và Kumar [11].



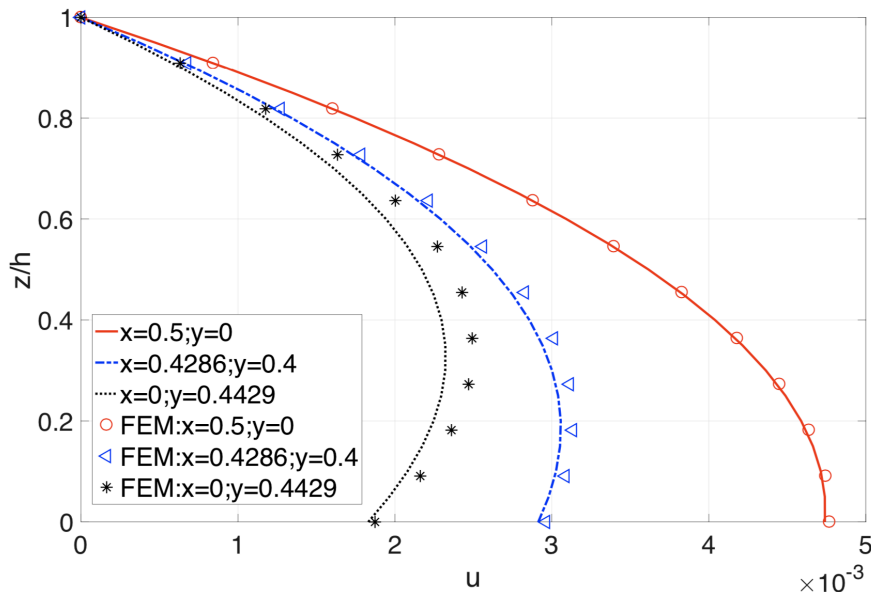
Hình 5. Biến thiên chiều dài trượt có hiệu theo bước sóng trong trường hợp dòng chảy và so sánh với phương pháp phần tử hữu hạn.

Sau khi có được giá trị của chiều dài trượt có hiệu, vận tốc của dòng chảy tại mọi điểm có thể được xác định và thể hiện trên hình 6, 7. Với chỉ số đánh giá sự chính xác R^2 (R-square) nằm trong khoảng $0.9979 \div 1$, ta có thể kết luận rằng phương pháp nêu ra trong bài báo này cho kết quả phù hợp với kết quả từ phương pháp phần tử hữu hạn mà thời gian tính toán tiêu tốn ít. Chúng ta nhận thấy rằng do điều kiện biên tại mặt trên là trơn tuyệt đối nên vận tốc của dòng chảy tại đây luôn luôn bằng không, ngược lại điều kiện biên tại mặt dưới là trượt và

chiều dài trượt cục bộ biến thiên theo hàm số cosine do đó giá trị vận tốc tại từng điểm khác nhau trên mặt dưới là khác nhau kéo theo biên dạng vận tốc tại mỗi điểm trên mặt phẳng nằm ngang có giá trị và hình dạng thay đổi.



Hình 6. Phân bố vận tốc theo chiều cao của khe ứng với dòng chảy ngang.



Hình 7. Phân bố vận tốc theo chiều cao của khe ứng với dòng chảy dọc.

4. KẾT LUẬN

Bài báo này đã giải quyết được bài toán đồng nhất bề mặt gồ ghề dạng rãnh hình sin và thay thế nó bằng một bề mặt phẳng đặc trưng bởi một giá trị chiều dài trượt có hiệu. Sau khi có được chiều dài trượt có hiệu đặc trưng của dòng chảy có thể được tính toán tại bất kì điểm nào trên miền chất lỏng đang xét. Toàn bộ kết quả nói trên có được là nhờ sự kết hợp giữa việc khai triển chuỗi Fourier của biểu thức nghiệm phương trình Stokes và phương pháp rời

rạc hóa bề mặt biên dòng chảy. Ở đây các kết quả thu được chỉ dành cho trường hợp bề mặt gồ ghề dạng hình sin theo một chiều, trường hợp bề mặt gồ ghề dạng hình sin theo hai chiều cũng là một chủ đề đáng được quan tâm trong thời gian sắp tới.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2017.310.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. N. V. Priezjev, A. A. Darhuber, S. M. Troian, Slip behavior on liquid films on surfaces of patterned wettability: Comparison between continuum and molecular dynamics simulations, *Phys. Rev. E.*, 71 (2005) 041608. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.041608>
- [2]. C. J. Teo, B. C. Khoo, Analysis of Stokes flow in micro channels with superhydrophobic surfaces containing a periodic array of micro-grooves, *Microfluid Nanofluid.*, 7 (2009) 353–382. <https://doi.org/10.1007/s10404-008-0387-0>
- [3]. A. V. Belyaev, O. I. Vinogradova, Effective slip in pressure-driven flow past super-hydrophobic strips, *J. Fluid Mech.*, 652 (2010) 489–499. <https://doi.org/10.1017/S0022112010000741>
- [4]. C. O. Ng, C. Y. Wang, Apparent slip arising from Stokes shear flow over a bidimensional patterned surface, *Microfluid Nanofluid.*, 8 (2010) 361–371. <https://doi.org/10.1007/s10404-009-0466-x>
- [5]. J. Zhou, A. V. Belyaev, F. Schmid, O. I. Vinogradova, Anisotropic flow in striped superhydrophobic channels, *J. Chem. Phys.*, 136 (2012) 194706. <https://doi.org/10.1063/1.4718834>
- [6]. J. Zhou, E. S. Asmolov, F. Schmid, O. I. Vinogradova, Effective slippage on superhydrophobic trapezoidal grooves, *J. Chem. Phys.*, 139 (2013) 194708.
- [7]. F. Feuillebois, M. Z. Bazant, O. I. Vinogradova, Effective slip over superhydrophobic surfaces in thin channels, *Phys. Rev. Lett.*, 102 (2009) 026001.
- [8]. F. Feuillebois, M. Z. Bazant, O. I. Vinogradova, Erratum: effective slip over superhydrophobic surfaces in thin channels, *Phys. Rev. Lett.*, 104 (2010) 159902.
- [9]. O. I. Vinogradova, A. V. Belyaev, Wetting, roughness and flow boundary conditions, *J. Phys. Condens. Matter.*, 23 (2011) 184104. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/23/18/184104>.
- [10]. E. S. Asmolov, S. Schemieschek, J. Harting, O. I. Vinogradova, Flow past superhydrophobic surfaces with cosine variation in local slip length, *Phys. Rev. E.* 87 (2013) 023005. Doi: [10.1103/PhysRevE.87.023005](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.023005)
- [11]. A. Kumar, S. Datta, D. Kalyanasundaram, Permeability and effective slip in confined flows transverse to wall slippage patterns, *Phys. Fluids.*, 28 (2016) 082002. <https://doi.org/10.1063/1.4959184>
- [12]. A. -T. Tran, H. LeQuang, Q. -C. He Effective interfacial conditions for the Stokes flow of a fluid on periodically rough surfaces, *Acta Mech.*, 228 (2017) 1851 - 1869. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1800-0>