Transport and Communications Science Journal, Vol 70, Issue 2 (08/2019), 122-131

Transport and Communications Science Journal

ANYNASYS FREE VIBRATION OF THE FUNCTIONALLY GRADE MATERIAL CRACKED PLATES WITH VARYING THICKNESS USING THE PHASE-FIELD THEORY

Pham Minh Phuc[1,2*]

[1]*University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.*

[2]*VNU Hanoi, University of Engineering and Technology, 144 Xuan Thuy Street, Hanoi, Vietnam.*

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article
Received: 24/7/2019
Revised: 12/9/2019
Accepted: 12/9/2019
Published online: 15/11/2019
https://doi.org/10.25073/tcsj.70.2.35
[*] *Corresponding author*
Email: phamminhphuc@utc.edu.vn

Abstract. This paper uses phase field theory, first-order shear deformation theory and finite element method to analyze the free vibrations of functionally graded plates (FGP) with linearly varying thickness and crack in the centre. To test the reliability of the algorithm and the calculation program, the numerical results are compared with the published article. The paper examines the effect of cracks (length, angle of inclination), the volume fraction exponent of material and the thickness of the plate to the vibration frequency of the plate. At the end of the paper, present some figures of mode shapes of the plate when it has a crack.

Keywords: FGM plate, linearly varying thickness, crack, vibration, finite element method, phase field theory.

© 2019 University of Transport and Communications

Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA TẤM CƠ TÍNH BIẾN THIÊN CÓ VẾT NỨT VỚI CHIỀU DÀY THAY ĐỔI THEO LÝ THUYẾT PHASE-FIELD

Phạm Minh Phúc[1,2*]

[1] *Trường Đại học Giao thông vận tải, số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.*

[2] *Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội, 144 Xuân Thủy, Hà Nội.*

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học
Ngày nhận bài: 24/7/2019
Ngày nhận bài sửa: 12/9/2019
Ngày chấp nhận đăng: 12/9/2019
Ngày xuất bản Online: 15/11/2019
https://doi.org/10.25073/tcsj.70.2.35
[*] *Tác giả liên hệ*
Email: phamminhphuc@utc.edu.vn

Tóm tắt. Bài báo sử dụng lý thuyết phase field, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích dao động của tấm chữ nhật có vết nứt ở tâm. Tấm làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (functionally graded materials – FGM) với quy luật phân bố thể tích theo hàm mũ và chiều dày tấm thay đổi tuyến tính. Để kiểm tra độ tin cậy của thuật toán và chương trình tính, kết quả số được so sánh với bài báo uy tín đã công bố. Bài báo khảo sát ảnh hưởng của vết nứt (chiều dài, góc nghiêng), chỉ số mũ vật liệu và tỉ lệ chiều dày của tấm tới tần số dao động riêng của tấm. Cuối bài báo, trình bày một vài hình ảnh về dạng dao động của tấm khi có vết nứt.

Từ khóa: Tấm FGM, chiều dày thay đổi, vết nứt, dao động tự do, phần tử hữu hạn, lý thuyết phase field.

© 2019 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong thực tế, vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) đã được sử dụng nhiều trong các ngành kỹ thuật cao do các đặc tính ưu việt của nó. Tuy nhiên, trong quá trình sản xuất, sử dụng, các kết cấu làm bằng vật liệu FGM có thể xuất hiện vết nứt làm ảnh hưởng đến khả năng làm việc của kết cấu. Những năm gần đây, đã có một số nhóm tác giả nghiên cứu về vấn đề này. S Natarajan và cộng sự [1] đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng để tính toán tần số dao động tự nhiên của tấm FGM có vết nứt. Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc

cao và phương pháp đẳng hình học mở rộng, Loc V Tran và cộng sự [2] đã phân tích dao động của tấm FGM có nứt. Gần đây, nhóm tác giả Phuc P.M và Duc N.D [3] đã nghiên cứu ảnh hưởng của vết nứt tới ổn định của tấm FGM chiều dày thay đổi, có vết nứt ở tâm.

Khi nghiên cứu về tấm chữ nhật có chiều dày thay đổi, nhóm tác giả Shufrin I [4] đã phân tích được dao động tự do của tấm bằng các lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Michele Bacciocchi và cộng sự [5] sử dụng phương pháp vi phân tổng quát để phân tích dao động của tấm và vỏ có chiều dày thay đổi. Nhóm tác giả Phuc P.M và cộng sự [6] đã sử dụng lý thuyết Phase-Field và phương pháp phần tử hữu hạn để tính ổn định cho tấm chữ nhật (bằng vật liệu đồng nhất) chiều dày thay đổi có vết nứt.

Theo hiểu biết của tác giả thì chưa có tác giả nào nghiên cứu về dao động tự do của tấm FGM chiều dày thay đổi và có vết nứt ở tâm. Bài báo sẽ tập trung tính toán tham số tần số dao động của tấm phụ thuộc vào tỉ lệ các cạnh tấm, chiều dài và góc nghiêng vết nứt và chỉ số mũ của vật liệu.

2. LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC NHẤT CỦA TẤM FGM VÀ LÝ THUYẾT PHASE FIELD

Ở đây, vật liệu FGM phân bố theo quy luật hàm lũy thừa [7]. Mô đun đàn hồi và hệ số poisson phân bố theo chiều dày tấm theo công thức:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)\left(\frac{z}{h(x)} + \frac{1}{2}\right)^n,\ \upsilon(z) = \upsilon_m + (\upsilon_c - \upsilon_m)\left(\frac{z}{h(x)} + \frac{1}{2}\right)^n \text{ với } n \geq 0 \quad (1)$$

Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Reissner-Mindlin, chuyển vị ở mặt cắt giữa tấm được tính theo công thức [8]:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad (2)$$

Trong đó u, v, w tương ứng là chuyển vị tại điểm bất kỳ theo các trục x, y, z; θ_x, θ_y là góc quay trong mặt xz và yz; u_0, v_0, w_0 là chuyển vị tại mặt giữa tấm.

Trường biến dạng của tấm như sau: $$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z\boldsymbol{\varepsilon}_b \\ \boldsymbol{\gamma}_s \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Quan hệ ứng suất biến dạng: $$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_m & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Năng lượng biến dạng của tấm:

$$U(\boldsymbol{\delta}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\gamma}_s^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma}_s \right\} d\Omega \quad (5)$$

Trong đó: $$\boldsymbol{D}_m = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{D}_s = \frac{kEh}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Với: $$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}_b) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2)\boldsymbol{D}_m dz$$

Trong cơ học phá hủy, lý thuyết Phase-field với biến Phase-field [3, 6, 8, 10], s, nhận các giá trị liên tục từ 0 đến 1. Trong đó, giá trị 0 của biến Phase-field chỉ trạng thái vật liệu bị phá huỷ hoàn toàn; giá trị 1 chỉ trạng thái vật liệu bình thường. Khi biến nhận giá trị giữa 0 và 1 ta nói vật liệu khu vực đó đang trong trạng thái mềm hoá (softening). Trạng thái này được hiểu như quá trình hình thành các micro-crack trong vật liệu và làm giảm độ cứng của vật liệu. Do đó, trong lý thuyết Phase-field, vết nứt được biểu diễn bởi một vùng hẹp có biến đổi trạng thái liên tục từ phá huỷ - mềm hoá - bình thường thông qua sự biến đổi liên tục của biến Phase-field từ 0 đến 1. Chính nhờ sự thể hiện này, trong vật liệu không xuất hiện vùng bất liên tục, cho phép ta tính đạo hàm, tích phân một cách dễ dàng trong toàn miền giải tích. Biến phase-field được đưa vào trong công thức tính năng lượng biến dạng của tấm thông qua hàm s trong phương trình (6 - 9) với ngụ ý giảm năng lượng đàn hồi tại vùng có vết nứt về 0.

Năng lượng biến dạng khi có vết nứt [9]:

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{\delta}, s) &= \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega s^2 \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\gamma}_s^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma}_s \right\} d\Omega + \int_\Omega G_C h \left[\frac{(1-s)^2}{4l} + l|\nabla s|^2 \right] d\Omega \right\} \\ &= \left\{ \int_\Omega s^2 \varphi(\boldsymbol{\delta}) d\Omega + \int_\Omega G_C h \left[\frac{(1-s)^2}{4l} + l|\nabla s|^2 \right] d\Omega \right\} \end{aligned} \tag{6}$$

Động năng của tấm [8]:

$$T^e = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e} s^2 \dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}} \rho \dot{\mathbf{u}} d\Omega = \frac{1}{2}\dot{\delta}^T M^e \dot{\delta} \tag{7}$$

Biến phân của hàm Lagrang $L(\boldsymbol{\delta}, s)$ được tính: $L(\delta, s) = T(\delta, s) - U(\delta, s)$

$$\rightarrow L(\delta, s) = \left\{ \int_\Omega s^2 \Psi(\boldsymbol{\delta}) d\Omega - \int_\Omega G_C h \left[\frac{(1-s)^2}{4l} + l|\nabla s|^2 \right] d\Omega \right\} \tag{8}$$

Từ đó, ta có hệ phương trình xác định tần số dao động tự do của tấm có vết nứt:

$$\begin{cases} \left(\sum \mathbf{K}^e + \omega^2 \sum M^e \right) \boldsymbol{\delta} = 0 \\ \int_\Omega 2s\Psi(\boldsymbol{\delta}) \delta s d\Omega - \int_\Omega 2G_C h \left[-\frac{(1-s)\delta s}{4l} + l\nabla s \nabla(\delta s) \right] d\Omega = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Trong đó hàm $\Psi(\boldsymbol{\delta})$ như sau [6, 11] :

$$\Psi(\boldsymbol{\delta}) = B\frac{G_c}{4l}H(x,y); \tag{10}$$

Với: $$H(x,y) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{d(x,y)}{l}\right) & if \ \dfrac{L-a}{2} \le x \le \dfrac{L+a}{2} \ \ and \ \ \dfrac{H-l}{2} \le y \le \dfrac{H+l}{2} \\ 0 & else \end{cases}$$

Ở đây l là chiều rộng vết nứt; hằng số B=10^3; $d(x,y)$ là khoảng cách gần nhất từ điểm bất kỳ tọa độ (x,y) tới đường biên trong vùng nứt; G_c là tốc độ giải phóng năng lượng tới hạn trong lý thuyết Griffith.

Giải hệ phương trình (9) sẽ tìm được tần số dao động tự do của tấm.

3. KẾT QUẢ SỐ

Ở phần này, phần tử hữu hạn được sử dụng là phần tử tam giác với hàm dạng :

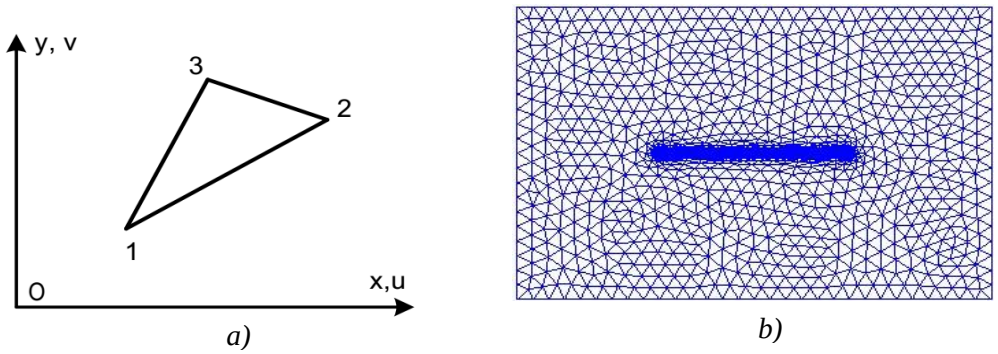
$$N_i = \{1 \ x \ y\}\begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} \quad \text{với} \quad \begin{aligned} a_i &= \left(x_j y_k - x_k y_j\right)/\left(2\Omega_e\right) \\ b_i &= \left(y_j - y_k\right)/\left(2\Omega_e\right) \\ c_i &= \left(x_k - x_j\right)/\left(2\Omega_e\right) \end{aligned}$$

Ma trận độ cứng phần tử: $\mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} h\mathbf{B}^T D\mathbf{B}\,dA = h\Omega_e\mathbf{B}^T D\mathbf{B}$

Với ma trận biến dạng – chuyển vị nút của phần tử: $\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{Bmatrix}$

D là ma trận liên hệ ứng suất – biến dạng

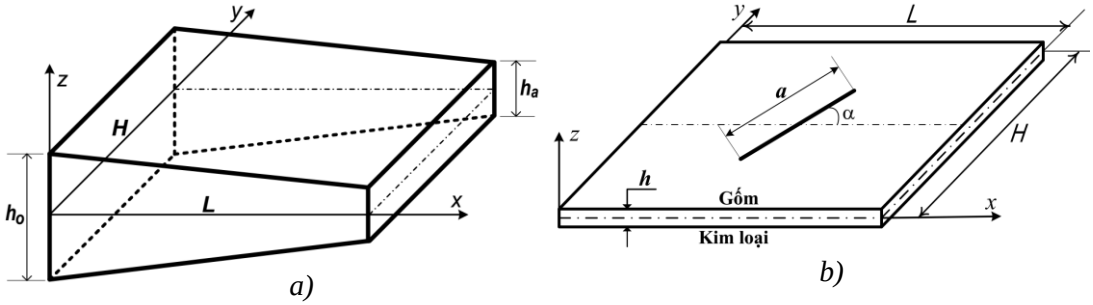
Ma trận khối lượng phần tử: $\mathbf{M}^e = \int_{\Omega_e} h\mathbf{N}^T \rho \mathbf{N}\,dA$; $\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{Bmatrix}$



a) *b)*

***Hình 1**. a) Phần tử tam giác; b) Phần tử tam giác được làm giàu tại lân cận vùng nứt.*

Hình 1a thể hiện phần tử tam giác với diện tích Ω_e và các đỉnh: 1(x_1 , y_1); 2(x_2 , y_2) và 3(x_3 , y_3). Hình 1b gồm các phần tử tam giác khi tấm có vết nứt (với chiều dài a= 0,4L) và ở lận cận vùng nứt thì số phần tử được làm giàu với tổng phần tử là 4678.



***Hình 2**. a) Tấm chữ nhật có chiều dày thay đổi tuyến tính; b) Tấm FGM có vết nứt ở tâm.*

3.1. So sánh với bài toán tấm chữ nhật có chiều dày thay đổi

Trong phần này, các thông số của tấm L=H=0.5m, E = 70GPa, chiều dày tấm thay đổi theo hàm bậc nhất $h = h_0(1-\beta x/L)$ với $\beta = (h_0 - h_a)/h_0$, bốn cạnh liên kết tựa (hình 2a). Công thức xác định tần số dao động tự do của tấm $\lambda = \omega H^2\sqrt{\rho h_0 / D_0}/\pi^2$ với $D_0 = Eh_0^3/(12(1-\nu^2))$. Kết quả được so sánh với bài báo của Shufrin [4], sai khác rất nhỏ như bảng 1 chứng tỏ độ tin cậy của chương trình tính.

***Bảng 1.** Tần số dao động tự do của tấm chiều dày thay đổi tuyến tính.*

Điều kiện biên	h_0/L	Shufrin [4]	Bài báo	Sai khác
SSSS	0.1	1.4504	1.45041	0.001%
	0.2	1.3738	1.37381	0.001%
	0.4	1.1664	1.16645	0.004%
SSFF	0.1	0.7201	0.72019	0.012%
	0.2	0.6999	0.69996	0.009%
	0.4	0.6368	0.63676	0.006%

3.2. So sánh kết quả với bài báo tấm FGM có vết nứt

Trên cơ sở chương trình tính ở mục 3.1 với tấm làm bằng vật liệu FGM chiều dày không đổi $\beta = 0$ và có vết nứt chiều dài ***a*** góc nghiêng α (hình 2b). Thông số của vật liệu FGM (Si_3N_4/SUS304) [1]: E_m=201.04GPa, E_c=348.43GPa, hệ số poisson $\nu_m = \nu_c = 0.28$, khối lượng riêng $\rho_m = 8166kg/m^3$, $\rho_c = 2370kg/m^3$, liên kết tựa trên 4 cạnh (SSSS), tỉ lệ chiều dài vết nứt (a/L) thay đổi 0.4; 0.6; 0.8, tần số dao động tự do không thứ nguyên của tấm được tính theo công thức $\lambda = \omega H^2/h\sqrt{\rho_c/E_c}$ như bảng 2.

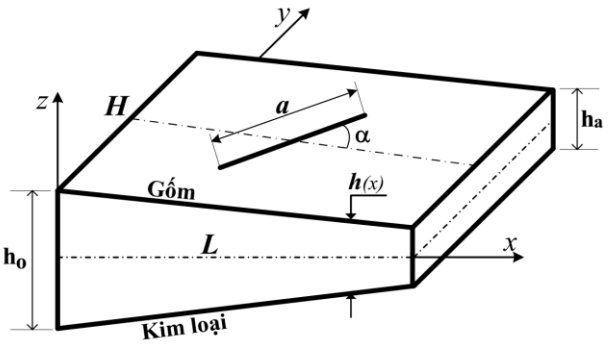
***Bảng 2**. Tần số dao động tự do không thứ nguyên của tấm FGM vuông có vết nứt ở tâm với góc nghiêng $\alpha = 0^0$.*

n	a/L	**Natarajan** [1]	**Bài báo**	**Sai số**
0	0.4	5.0502	5.2399	3.76%
	0.6	4.7526	4.9405	3.95%
	0.8	4.5636	4.7555	4.21%
1	0.4	3.0452	3.08596	1.34%
	0.6	2.8657	2.90947	1.53%
	0.8	2.7518	2.80035	1.76%
2	0.4	2.7383	2.75239	0.51%
	0.6	2.5769	2.59507	0.71%
	0.8	2.4747	2.49788	0.94%
5	0.4	2.4833	2.49091	0.31%
	0.6	2.3371	2.34866	0.49%
	0.8	2.2445	2.2609	0.73%

Theo bảng 2 thì sai số của chương trình tính với bài báo của Natarajan [1] là rất nhỏ, chứng tỏ chương trình tính có độ tin tưởng cao. Từ đó, chương trình tính được phát triển để tính tần số dao động tự do của tấm FGM chiều dày thay đổi có vết nứt như mục 3.3 dưới đây.

3.3. Dao động tự do của tấm FGM chiều dày thay đổi có vết nứt

Các thông số của tấm chiều dày thay đổi tuyến tính theo hàm bậc nhất $h = h_0(1-\beta x/L)$ với $\beta = (h_0 - h_a)/h_0$, tỉ lệ chiều dài vết nứt (a/L) thay đổi từ 0.2 đến 0.8 (hình 3); tấm bằng vật liệu FGM (Si_3N_4/SUS304): E_m=201.04GPa, E_c=348.43GPa, hệ số poisson $\nu_m = \nu_c = 0.28$, khối lượng riêng $\rho_m = 8166kg/m^3$, $\rho_c = 2370kg/m^3$, liên kết tựa trên 4 cạnh (SSSS), tần số dao động tự do không thứ nguyên của tấm được tính $\lambda = \omega H^2\sqrt{\rho h_0/D_0}/\pi^2$ với $D_0 = Eh_0^3/(12(1-\nu^2))$.



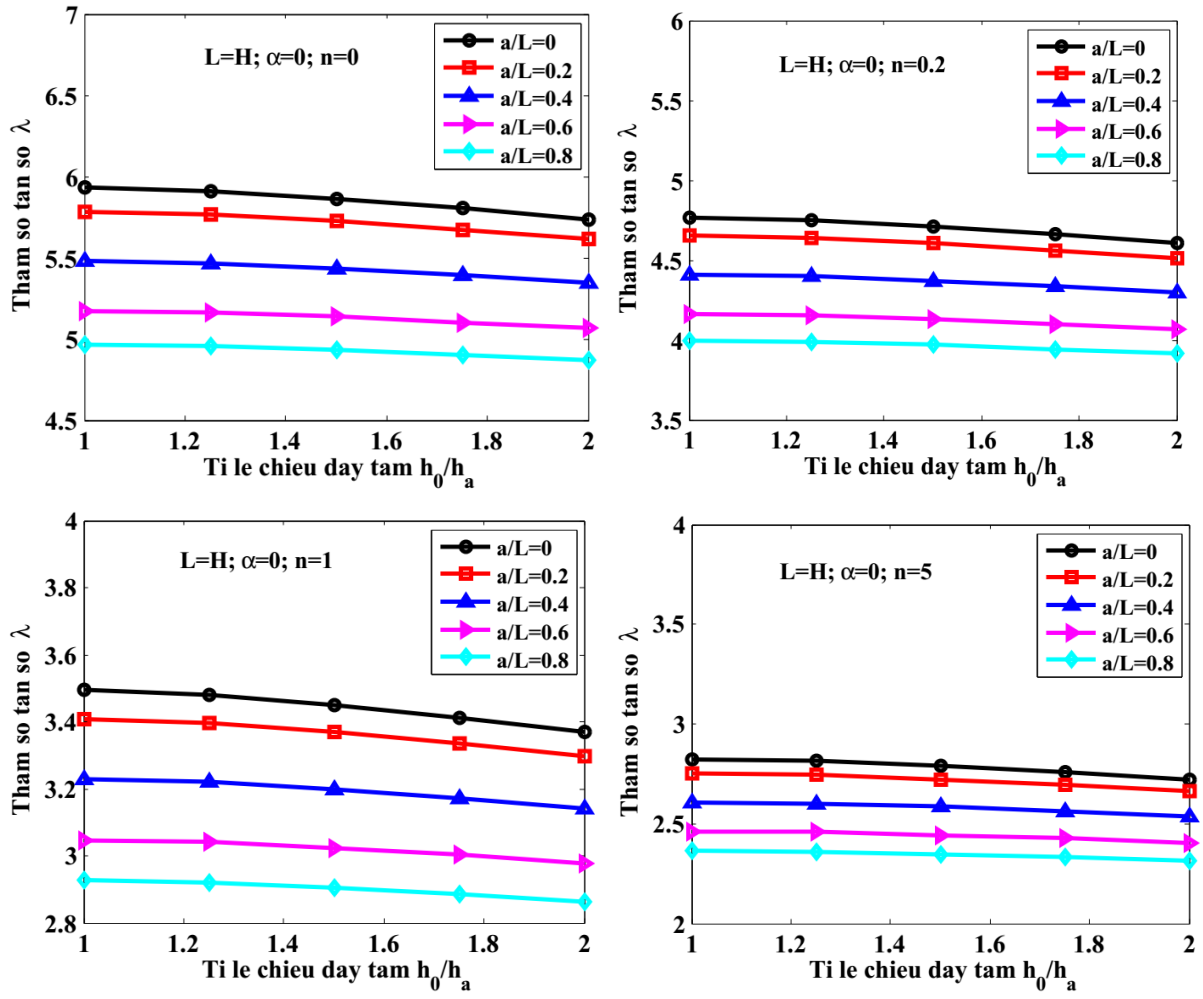
***Hình 3**. Tấm FGM chiều dày thay đổi tuyến tính và có vết nứt ở tâm.*

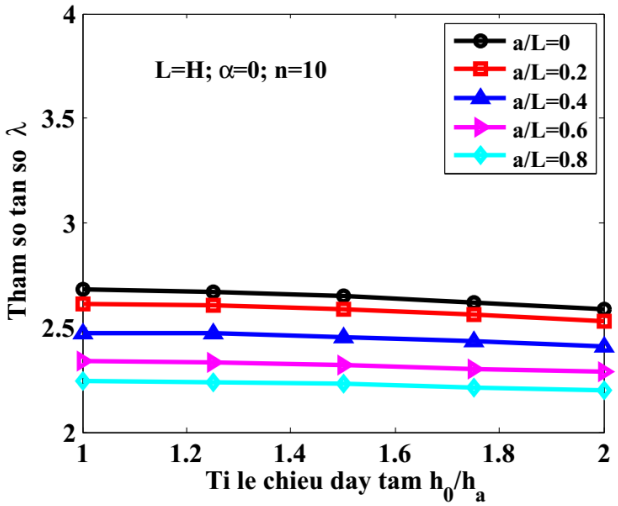
Bảng 3 cho ta thấy, khi tỉ lệ cạnh của tấm (L/H) càng cao thì tần số dao động tự do của tấm càng giảm. Vết nứt càng dài (a/L tăng) làm độ cứng của tấm giảm dẫn đến tần số dao động giảm.

Bảng 3. *Tần số dao động tự do của tấm FGM chiều dày thay đổi có vết nứt khi tỉ lệ cạnh tấm thay đổi với $h_0/h_a=1.5$; $n=5$; $\alpha=0^0$; SSSS.*

a/L	Tỉ lệ cạnh của tấm L/H				
	0.5	1	1.5	2	3
0	6.9543	2.78873	2.00244	1.71769	1.49418
0.2	6.91277	2.7234	1.90559	1.59396	1.33055
0.4	6.82548	2.58532	1.71326	1.35752	1.02979
0.6	6.72786	2.44396	1.5337	1.15336	0.80705
0.8	6.65664	2.34822	1.41984	1.02981	0.67835

Tham số tần số λ được tính cho tấm FGM hình vuông khi chiều dày (h) và chỉ số mũ (n) thay đổi (hình 4).

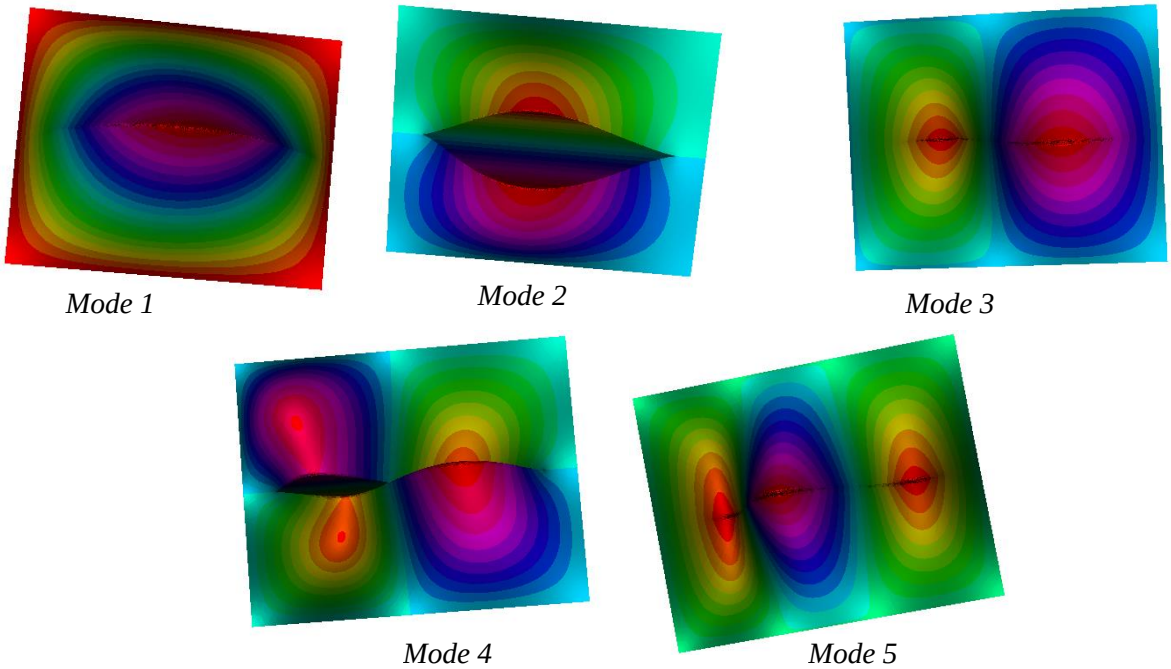




***Hình 4**. Tần số dao động tự do của tấm FGM chiều dày thay đổi có vết nứt phụ thuộc chỉ số mũ n; chiều dài vết nứt và tỉ lệ chiều dày tấm.*

Ta thấy rằng, khi tỉ lệ chiều dày (h_0/h_a) tăng, làm độ cứng của tấm giảm, do vậy tần số dao động (tỉ lệ thuận với tham số tần số λ) cũng giảm theo. Khi chiều dài vết nứt tăng, làm độ cứng của tấm giảm và dẫn tới tần số dao động giảm theo. Rõ ràng rằng, đối với vật liệu FGM thì chỉ số mũ (n) càng cao thì vật liệu FGM đó có tỉ lệ kim loại càng nhiều (theo biểu thức (1)), do vậy khi n tăng thì độ cứng của tấm giảm làm cho tần số dao động cũng giảm tương ứng.

Một số hình ảnh về 5 dạng đầu tiên của tấm FGM chiều dày thay đổi và có vết nứt:



***Hình 5**. Hình ảnh 5 dạng dao động đầu tiên của tấm FGM chiều dày thay đổi, có nứt (L=1.25H; h_0/h_a=1.5; n=5; a/L=0.8; α=0; SSSS).*

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã sử dụng lý thuyết Phase-field trong cơ học phá hủy và lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để nghiên cứu dao động tự do tấm FGM chiều dày thay đổi có vết nứt. Kết quả số chỉ ra rằng với trường hợp đã xét: (i) khi tăng chiều dài vết nứt thì tần số dao động tự do của tấm sẽ bị giảm xuống; (ii) khi tăng chỉ số mũ của vật liệu (n) thì tần số dao động tự do của tấm giảm; (iii) khi tăng tỉ lệ chiều dày tấm (h_0/h_a), tần số dao động tự do của tấm giảm. Kết quả này sẽ là định hướng cho các nghiên cứu về dao động tự do của tấm FGM khi vết nứt phát triển.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường đại học giao thông vận tải (ĐH GTVT) trong đề tài mã số T2020-CB-006.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] S.Natarajan, P.M. Baiz, S.Bordas, T.Rabczuk, P. Kerfriden, Natural frequencies of cracked functionally graded material plates by the extended finite element method, Composite Structures, 93 (2011) 3082–3092. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.04.007

[2] Loc V. Tran, Hung Anh Ly, M. Abdel Wahab, H.Nguyen-Xuan, Vibration analysis of cracked FGM plates using higher-order shear deformation theory and extended isogeometric approach, International Journal of Mechanical Sciences, 96 (2015) 65-78. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.03.003

[3] Phuc P.M, Duc N.D, The effect of cracks on the stability of the functionally graded plates with variable-thickness using HSDT and phase-field theory, Composites Part B: Engineering 175 (2019) 107086. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.107086

[4] Shufrin I, Eisenberger M, Vibration of shear deformable plates with variable thickness – first-order and higher-order analyses, J Sound Vib, 290 (2006) 465–89.

[5] M. Bacciocchi et al., Vibration analysis of variable thickness plates and shells by the Generalized Differential Quadrature method, Composite Structures, 156 (2016) 218-237.

[6] Phuc P.M, Thom D.V, Duc D.H, Duc N.D, The stability of cracked rectangular plate with variable thickness using phase field method, Thin-Walled Structures, 129 (2018) 157-65.

[7] Yang. J, Liew. K, Kitipornchai. S, Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates, Compos Sci Technol, 65 (2005) 1165–1175. https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.03.028

[8] Duc. HD, Thom. VD, Phuc. MP, Duc. ND, Validation simulation for free vibration and buckling of cracked Mindlin plates using phase-feld method, Mech Adv Mater Struct 26 (2018), pp. 1018–1027

[9] Ulmer. H, Hofacker. M, Miehe. C, Phase feld modeling of fracture in plates and shells, Proc Appl Math Mech, 12 (2010) 171–172

[10] Duc. HD, Tinh. BQ, Thom. VD, Duc. ND, A rate-dependent hybrid phase field model for dynamic crack propagation, J Appl Phys, 122 (2017) 102-115.

[11] M.J. Borden et al., A phase-field description of dynamic brittle fracture, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 217-220 (2012) 77–95. https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.01.008