



## FREE VIBRATION OF FUNCTIONALLY GRADED POROUS NANO BEAMS

Le Thi Ha\*, Nguyen Thi Kim Khue

*Theoretical Mechanics Department, Faculty of Basic Sciences, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.*

### ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 22/7/2019

Revised: 13/8/2019

Accepted: 14/8/2019

Published online: 15/11/2019

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.2.32>

\* Corresponding author

Email: lethiha@utc.edu.vn

**Abstract.** In this paper, the free vibration of functionally graded (FG) porous nano beams is studied, based on Bernoulli beam theory. The material properties of FG porous nano beam are assumed vary through the thickness according to a power law. Based on Eringen nonlocal elasticity theory, the governing equations of motion are derived from the Hamilton's principle. The finite element method is used to discretize the model and to compute the vibration characteristics of the beams. A parametric study in carry out to show the effects of the nonlocal parameter and porous parameter, material distribution on the natural frequencies of the beams are examined and discussed.

**Keywords:** FG nano beam, nonlocal model, porous, free vibration, finite element method

© 2019 University of Transport and Communications



## DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA DẦM NANO XÓP CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN

Lê Thị Hà\*, Nguyễn Thị Kim Khuê

*Bộ môn Cơ lý thuyết, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Giao thông vận tải, số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.*

### THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 22/7/2019

Ngày nhận bài sửa: 13/8/2019

Ngày chấp nhận đăng: 14/8/2019

Ngày xuất bản Online: 15/11/2019

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.2.32>

\* Tác giả liên hệ

Email: lethiha@utc.edu.vn

**Tóm tắt.** Với lý thuyết dầm Bernoulli, bài báo nghiên cứu dao động tự do của dầm cơ tính biến thiên có kích thước nano và lỗ rỗng vi mô. Tính chất vật liệu được giả thiết thay đổi theo chiều dày dầm. Bài báo dùng lý thuyết đàn hồi không địa phương để xây dựng các phương trình vi phân cân bằng và chuyển động của các kết cấu dầm nano có lỗ rỗng vi mô. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn thiết lập phương trình chuyển động cho dầm, từ đó tính toán các tham số tần số dao động của dầm. Ảnh hưởng của các tham số không địa phương, tham số lỗ rỗng, tham số phân bố vật liệu đến đặc tính dao động của dầm được nghiên cứu và thảo luận trong bài báo.

**Từ khóa:** dầm nano có cơ tính biến thiên, lý thuyết không địa phương, lỗ rỗng vi mô, dao động tự do, phương pháp phần tử hữu hạn.

© 2019 Trường Đại học Giao thông vận tải

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) là vật liệu composite được tạo thành từ hai vật liệu thành phần với tỷ lệ thể tích thay đổi theo một hay nhiều hướng không gian nào đó. Vật liệu này được sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực như công nghệ hàng không, vũ trụ, hóa học, thiết bị máy, công nghệ hạt nhân. Ngày nay, vật liệu FGM còn được áp dụng và thiết kế vào các hệ thống thiết bị cơ - điện tử micro/nano. Các kết cấu như tấm, dầm có kích thước nano được sử dụng rộng rãi trong lĩnh vực cơ điện tử, y học và chế tạo sensors. Nghiên cứu đặc trưng và ứng xử cơ học của kết cấu có kích thước nano nói chung, dầm nano nói riêng hiện thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong nước và trên thế giới.

Lý thuyết đàn hồi cổ điển dựa trên liên hệ liên tục với giả thiết rằng ứng suất tại một điểm là hàm của biến dạng tại điểm đó. Tuy nhiên đối với kết cấu có kích thước nano thì có tính đến ảnh hưởng của kích thước (size effect), do đó lý thuyết đàn hồi cổ điển không đủ để mô tả chính xác các ứng xử của kết cấu nano. Vì thế, lý thuyết đàn hồi không địa phương do Eringen đề xuất đầu tiên [1-4] với giả thiết rằng ứng suất tại một điểm là hàm của biến dạng tại tất cả các điểm xung quanh đó. Lý thuyết này được sử dụng để xây dựng các phương trình vi phân cân bằng và chuyển động của các kết cấu nano. Sử dụng phương pháp giải tích, Reddy [6] đã nghiên cứu các ứng xử như uốn, phân tích ổn định và dao động của dầm thuần nhất theo lý thuyết không địa phương với các lý thuyết dầm khác nhau bao gồm các lý thuyết dầm: Euler-Bernoulli, Timoshenko, Reddy và Levinson. Nghiệm giải tích đối với bài toán uốn, dao động và vòng sử dụng lý thuyết không địa phương đã cho thấy ảnh hưởng của các tham số không địa phương tới độ võng, tần số riêng của dầm thuần nhất. Simsek [7] đã đưa ra nghiệm giải tích đối với bài toán uốn và phân tích ổn định của dầm nano FGM dựa trên lý thuyết dầm Timoshenko. Ngoài ra, phương pháp phần tử hữu hạn cũng được sử dụng để tính toán dầm có kích thước nano. Trong đó có nghiên cứu của Eltaher và các cộng sự [9, 10] đã phân tích dao động của dầm Euler – Bernoulli nano đồng nhất một vật liệu và dầm nano FGM bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH).

Trong bài báo này, tác giả nghiên cứu tham số tần số của dầm tựa đơn, dầm được làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên không hoàn hảo do có lỗ rỗng vi mô. Bằng phương pháp phần tử hữu hạn, ảnh hưởng của tham số không địa phương, tham số lỗ rỗng, tham số vật liệu đến tham số tần số của dầm được nghiên cứu chi tiết trong bài báo.

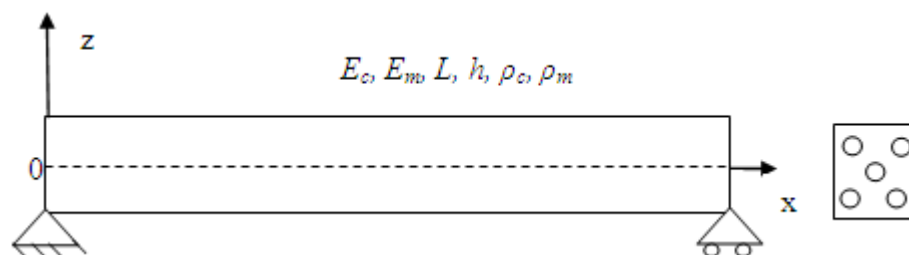
## 2. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Trong Hình 1 minh họa dầm FGM kích thước nano và có lỗ rỗng vi mô chiều dài  $L$ , chiều rộng  $b$ , chiều dày  $h$ . Hệ trục tọa độ xác định như ở Hình 1. Đáy của dầm làm hoàn toàn bằng kim loại và mặt trên của dầm làm bằng vật liệu gốm.

Dầm nano FGM có lỗ rỗng vi mô cấu thành từ hai vật liệu là gốm và kim loại với tỉ phần thể tích biến đổi theo chiều dày theo quy luật [11]:

$$P(z) = (P_c - P_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + P_m - \frac{\alpha}{2} (P_c - P_m) \quad (1)$$

trong đó  $P_c$ ,  $P_m$  tương ứng là tính chất hiệu dụng vật liệu gốm và kim loại,  $\alpha$  là tham số lỗ rỗng của vật liệu,  $n$  là tham số vật liệu,  $z$  là biến thay đổi theo chiều dày dầm.



Hình 1. Mô hình dầm FGM kích thước nano và lỗ rỗng vi mô.

Từ công thức (1), mô đun đàn hồi Young  $E(z)$ , mật độ khối  $\rho(z)$  của dầm nano FGM viết dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + E_m - \frac{\alpha}{2} (E_c - E_m) \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + \rho_m - \frac{\alpha}{2} (\rho_c - \rho_m) \end{aligned} \quad (2)$$

Trong (2),  $E_c$ ,  $E_m$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_m$  tương ứng là mô đun đàn hồi, mật độ khối của gốm và kim loại. Theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, chuyển vị dọc trục  $u$  và chuyển vị ngang  $w$  tại điểm bất kỳ trên dầm biểu diễn dưới dạng như sau:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t), \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó  $u_0, w_0$  lần lượt là thành phần chuyển vị dọc trục và chuyển vị ngang tại mặt giữa dầm. Theo giả thuyết biến dạng nhỏ, các thành phần biến dạng biểu diễn bởi

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \varepsilon_{xx}^0 - z\kappa^0 \quad (4)$$

trong đó  $\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ ,  $\kappa^0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$ ;  $\varepsilon_{xx}^0$  là kí hiệu của biến dạng dọc trục và  $\kappa^0$  kí hiệu biến dạng uốn. Theo nguyên lý Hamilton, phương trình chuyển động xác định theo phương trình sau:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt = 0 \quad (5)$$

trong đó  $\delta U$  là biến phân của năng lượng biến dạng đàn hồi,  $\delta T$  là biến phân của động năng. Các thành phần này biểu diễn như sau

$$\delta U = \int_0^L (N \delta \varepsilon_{xx}^0 - M \delta \kappa^0) dx, \quad (6)$$

Trong đó  $N = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(z) dz$  là lực dọc trục và  $M = b \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx}(z) dz$  là momen uốn

$$\delta T = \int_0^L \left[ I_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \right) - I_{12} \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right) + I_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} \right] dx \quad (7)$$

trong đó các thành phần  $I_{11}$ ,  $I_{12}$ ,  $I_{22}$  là các momen khối lượng được tính bởi:

$$(I_{11}, I_{12}, I_{22}) = b \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (8)$$

Thay (6), (7) vào (5) ta được phương trình chuyển động:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} &= I_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= I_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - I_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Theo Eringen [1-4], tensor ứng suất không địa phương biểu diễn đối với kết cấu dầm có kích thước chiều dày và chiều rộng bé hơn rất nhiều so với chiều dài như sau:

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) \sigma = \mathbf{t}; \quad \tau = \frac{e_0 a}{l} \quad (10)$$

trong đó,  $e_0$  là hằng số thích hợp đối với từng vật liệu,  $a$  và  $l$  tương ứng là các kích thước đặc trưng bên trong và bên ngoài. Đối với dầm Euler–Bernoulli, phương trình (10) viết dưới dạng:

$$\sigma_{xx} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E(z) \varepsilon_{xx} \quad (11)$$

trong đó  $\mu = e_0^2 a^2$  được gọi là tham số không địa phương. Từ phương trình (11), với việc tích phân hai vế thu được biểu thức biểu diễn nội lực dọc trục và biểu thức đối với momen như sau

$$\begin{aligned} N - \mu \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} &= A_{11} \varepsilon_{xx}^0 - A_{12} k^0 \\ M - \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= A_{12} \varepsilon_{xx}^0 - A_{22} k^0 \end{aligned} \quad (12)$$

$A_{11}$ ,  $A_{12}$  và  $A_{22}$  trong phương trình (12) tương ứng là độ cứng dọc trục, độ cứng tương hỗ dọc trục – uốn và độ cứng chống uốn được xác định như sau:

$$(A_{11}, A_{12}, A_{22}) = \int_A E(z) (1, z, z^2) dA = b \int_{-h/2}^{h/2} E(z) (1, z, z^2) dz \quad (13)$$

Thế (9) vào phương trình (12) ta tìm được kết quả đối với nội lực  $N$  và momen  $M$  và thay chúng vào (6) được kết quả thay vào (5) ta có:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} - A_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \right. \\ \left. - I_{11} \mu \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + \mu \left( I_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - I_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - \mu I_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + \mu I_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} - I_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \right) \right. \\ \left. + I_{12} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} + I_{12} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} - I_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} \right] dx dt = 0 \quad (14)$$

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích dao động tự do của dầm. Để thực hiện điều này, ta chia dầm làm  $nELE$  phần tử có độ dài 'l' bằng nhau. Mỗi phần tử gồm hai nút. Sử dụng hàm dạng tuyến tính và hàm dạng Hermite để nội suy chuyển vị dọc trục và chuyển vị ngang của dầm. Sau khi thay các chuyển vị vào phương trình chuyển động (14) và tích phân cho toàn miền ta được phương trình chuyển động cho dao động tự do của dầm có dạng:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = 0 \quad (15)$$

trong đó  $\mathbf{M}$  là ma trận khối lượng tổng thể của dầm kích thước nano;  $\mathbf{K}$  là ma trận độ cứng tổng thể của dầm.  $\mathbf{D}$  là vectơ chuyển vị nút tổng thể

### 3. KẾT QUẢ SỐ

Bài báo thực hiện so sánh kết quả tham số tần số cơ bản của dầm FG kích thước nano với kết quả của Eltahir[10] đã công bố trước đó. Các số liệu và công thức tính tham số tần số cho dầm nano được lấy theo tài liệu [10]. Từ **Bảng 1**, nhận thấy rằng kết quả thực hiện trong bài báo là sát với các kết quả của Eltahir[10]. Điều này cho thấy chương trình tính toán và việc xây dựng mô hình phần tử hữu hạn đối với dầm nano FGM là đáng tin cậy.

**Bảng 1.** Kết quả so sánh tham số tần số cơ bản với Eltahir [10] với điều kiện biên tựa đơn tại hai đầu ( $\alpha=0, L/h=20$ ).

$\mu$	$n=0$		$n=1$		$n=5$	
	Bài báo	[10]	Bài báo	[10]	Bài báo	[10]
1	9,4062	9,4238	6,6669	6,7631	5,6639	5,7256
2	9,0102	9,0257	6,3863	6,4774	5,4255	5,4837
3	8,6604	8,6741	6,1384	6,2251	5,2148	5,2702
4	8,3483	8,3607	5,9172	6,0001	5,027	5,0797
5	8,0678	8,0789	5,7184	5,7979	4,858	4,9086

Sau khi thực hiện so sánh thì bài báo tiến hành các tính toán số cụ thể để minh họa tính chính xác và hữu hiệu của phần tử xây dựng được. Dầm có chiều dài  $L=10$ , chiều rộng  $b=1$ , và chiều cao  $h$ . Dầm làm từ vật liệu Nhôm oxit và SUS304, các tính chất vật liệu của Nhôm

oxit (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>): E<sub>c</sub>=390(GPa), ρ<sub>c</sub>=3960(kg/m<sup>3</sup>), và SUS304 có tính chất vật liệu: E<sub>m</sub>=210(GPa), ρ<sub>m</sub>=7800(kg/m<sup>3</sup>).

Tham số tần số của dầm nano FGM được xác định theo công thức

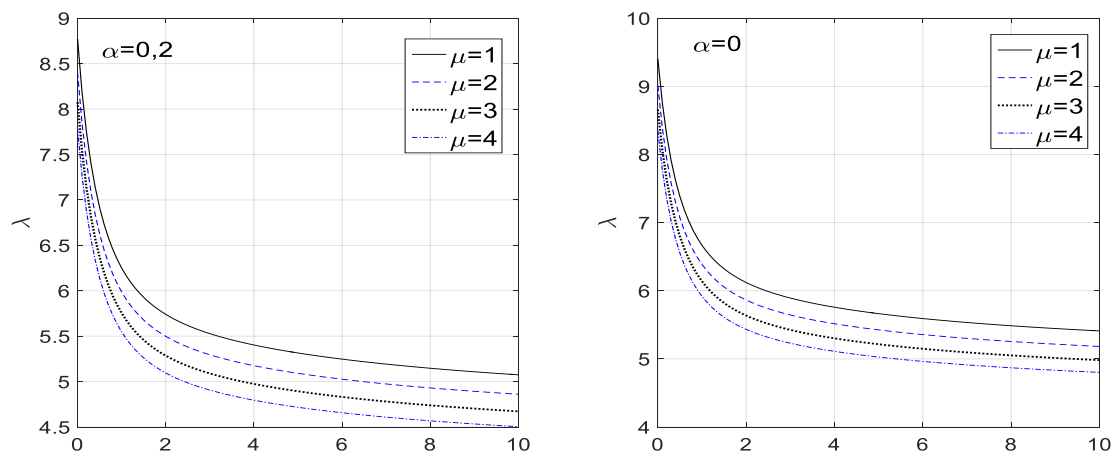
$$\lambda_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho_c A / E_c I} \quad (16)$$

trong đó ω<sub>i</sub> là tần số thứ i của dầm, A là diện tích mặt cắt ngang của dầm và I = bh<sup>3</sup> / 12 là momen quán của dầm.

**Bảng 2.** Tham số tần số của dầm nano có lỗ rỗng vi mô (L/h=20, μ=1, α=0,1).

λ <sub>i</sub>	n=0	n=0,1	n=0,2	n=0,5	n=1	n=5	n=10
i=1	9,0795	8,4718	8,0138	7,1452	6,4552	5,4877	5,2410
i=2	32,1349	29,9813	28,3581	25,2806	22,8375	19,4207	18,5500
i=3	61,8274	57,6753	54,5459	48,6137	43,9094	37,3591	35,6921
i=4	93,3925	87,0989	82,3507	73,3449	66,2058	56,3387	53,8797
i=5	103,7875	97,5181	92,7269	83,2778	74,9911	60,7918	57,8099

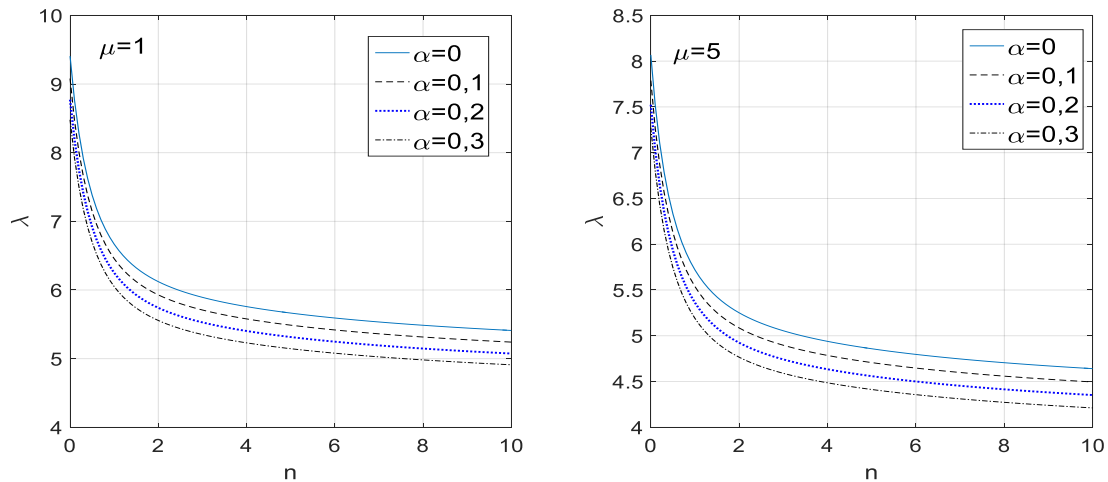
Bảng 2 minh họa năm tham số tần số đầu tiên của dầm FG có kích thước nano và lỗ rỗng vi mô. Nhìn vào bảng 2, tham số tần số tăng dần từ tham số tần số đầu tiên đến tham số tần số thứ năm bất kể tham số vật liệu tăng dần từ 0 đến 10. Ngoài ra, khi tham số vật liệu tăng nhẹ thì tham số tần số giảm dần và giảm mạnh khi n=10, điều này nhận thấy cho tất cả năm tham số tần số trong bảng.



**Hình 2.** Mối quan hệ giữa tham số tần số cơ bản và tham số vật liệu của dầm nano FG khi cho một vài giá trị của tham số địa phương (L/h=20).

Hình 2 minh họa mối quan hệ giữa tham số tần số cơ bản và tham số vật liệu khi cho bốn giá trị của tham số địa phương (μ=1,2,3,4). Hình vẽ chỉ ra rằng khi tham số địa phương tăng

dần, tham số tần số cơ bản của dầm nano FGM cũng giảm dần. Tham số vật liệu càng tăng thì tham số tần số càng giảm. Khi  $n$  tăng từ 0 đến 2 tham số tần số giảm mạnh,  $n$  tăng từ 2 đến 10, tham số tần số giảm từ từ. Từ hai hình nhận thấy dầm nano FGM hoàn hảo ( $\alpha=0$ ) có tham số tần số cao hơn dầm FGM không hoàn hảo ( $\alpha=0.2$ ).



**Hình 3.** Mối quan hệ giữa tham số vật liệu và tham số tần số cơ bản của dầm nano FGM khi cho một vài giá trị của tham số lỗ rỗng ( $L/h=20$ ).

Hình 3 minh họa mối quan hệ giữa tham số vật liệu và tham số tần số cơ bản của dầm khi cho bốn giá trị của tham số lỗ rỗng ( $\alpha=0,0.1,0.2,0.3$ ). Hình vẽ đã chỉ rõ khi tham số lỗ rỗng tăng nhẹ thì tham số tần số lại giảm dần bất kể tham số địa phương tăng dần. Đặc biệt, khi tham số lỗ rỗng cao hơn thì tham số tần số giảm càng nhanh hơn. Điều này cũng dễ hiểu, khi tham số lỗ rỗng tăng thì dầm càng mềm đi dẫn đến tham số tần số giảm đi.

#### 4. KẾT LUẬN

Bài báo đã phân tích dao động tự do của dầm nano FGM có lỗ rỗng vi mô bằng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và lý thuyết đàn hồi không địa phương do Eringen đề xuất. Bằng phương pháp phần tử hữu hạn, phương trình chuyển động cho dầm nano có lỗ rỗng vi mô đã được thiết lập. Dưới sự hỗ trợ của phần mềm Maple và Matlab, ảnh hưởng của các tham số vật liệu ( $n$ ), tham số không địa phương ( $\mu$ ), tham số lỗ rỗng ( $\alpha$ ) đến tham số tần số đã được tính toán và minh họa chi tiết qua hình vẽ. Tham số không địa phương đóng vai trò quan trọng trong phân tích dao động của dầm nano, khi tham số địa phương tăng dần thì tham số tần số của dầm nano cũng tăng dần lên.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A.C. Eringen, D. Edelen, On nonlocal elasticity, Int. J. Eng. Sci., 10 (1972) 233–248. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90039-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90039-0)
- [2] A.C. Eringen, Nonlocal Continuum Field Theories, Springer-Verlag, New York, 2002.



- [3] A.C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua, *Int. J. Eng. Sci.*, 10 (1972) 1–16. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90070-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90070-5)
- [4] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *J. Appl. Phys.*, 54 (1983) 4703–4710. <https://doi.org/10.1063/1.332803>
- [5] J.M. Gere, S.P. Timoshenko, *Mechanics of materials*, Third SI Edition, Chapman & Hall, 1989.
- [6] J.N. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *Int. J. Eng. Sci.*, 45 (2007) 288–307. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.04.004>
- [7] M. Simsek, H.H. Yurtcu, Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory, *Compos. Struct.*, 97 (2013) 378–386. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.10.038>
- [8] M.A. Eltaher, A.E. Alshorbagy, F.F. Mahmoud, Determination of neutral axis position and its effect on natural frequencies of functionally graded macro/nanobeams, *Compos. Struct.*, 99 (2013) 193–201. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.039>
- [9] M.A. Eltaher, A.E. Alshorbagy, F.F. Mahmoud, Vibration analysis of Euler–Bernoulli nano beams by using finite element method, *Appl. Math. Model.*, 37 (2013) 4787–4797. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.10.016>
- [10] M.A. Eltaher, S.A. Emam, F.F. Mahmoud, Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams, *Appl. Math. Comput.*, 218 (2012), 7406–7420. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.12.090>
- [11] N. Wattanasakulpong, A. Chaikittiratana. Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method, *Meccanica*, 50 (2015) 1331–1342. <https://doi.org/10.1007/s11012-014-0094-8>
- [12] Lê Thị Hà, Nguyễn Thị Kim Khuê, Đáp ứng động lực học của dầm Bernoulli FGM có cơ tính biến đổi dọc chịu tác dụng của nhiều lực di động, *Tạp chí khoa học giao thông vận tải*, 49 (2015) 3.