



## LATTICE MODEL FOR PREDICTING OF PERMEABILITY OF FIBER REINFORCED CONCRETE UNDER LOADING

Pham Duc Tho<sup>1\*</sup>, Tran The Truyen<sup>2</sup>, Bui Anh Thang<sup>1</sup>,  
Ho Xuan Ba<sup>3</sup>

<sup>1\*</sup>*Department of Infrastructure Construction, Faculty of Civil Engineering, University of Mining and Geology, No18, Pho Vien street, Ha Noi.*

<sup>2</sup>*Section of Bridge and Tunnel Engineering, Faculty of Civil Engineering, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam, No 3, Cau Giay street, Ha Noi.*

<sup>1</sup>*Department of Infrastructure Construction, Faculty of Civil Engineering, University of Mining and Geology, No18, Pho Vien street, Ha Noi.*

<sup>3</sup>*Section of Bridge and Tunnel Engineering, Faculty of Civil Engineering, University of Transport and Communications - Campus in Ho Chi Minh City, N<sup>o</sup> 450-451, Le Van Viet Street, Ho Chi Minh City.*

### ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 17/1/2019

Revised: 20/6/2019

Accepted: 28/6/2019

Published online: 16/9/2019

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.1.44>

\* *Corresponding author*

Email: phamductho@humg.edu.vn

**Abstract.** This study used the lattice model to analysis the initiation and the propagation of cracks in concrete and its effect on water permeability of fibre reinforced concrete structures (FRC). Concrete was considered as saturated state without capillary phenomenon. The hydro-damage coupling law was developed based Marzars damage model in which, the permeability evolution of concrete is a cubic function of crack opening. A compairison of the numerical results with experimental result has shown to be a simplified and powerful tool for assessing the crack widths and their effect on the permeability, which is key for guaranteeing the durability of FRC structures.

**Keywords:** Lattice model, water permeability, fracture mechanic, fiber reinforced concrete, load, stress.



## MÔ PHỎNG TÍNH TOÁN ĐỘ THẨM CỦA BÊ TÔNG SỢI THÉP CÓ TÍNH ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA TẢI TRỌNG

Phạm Đức Thọ<sup>1\*</sup>, Trần Thế Truyền<sup>2</sup>, Bùi Anh Thắng<sup>1</sup>,  
Hồ Xuân Ba<sup>3</sup>

<sup>1\*</sup>Bộ môn Hạ tầng cơ sở, Khoa Xây dựng, Trường Đại học Mỏ Địa chất, Số 18 Phố Viên, Hà Nội.

<sup>2</sup>Bộ môn Cầu hầm, Khoa Công Trình, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.

<sup>1</sup>Bộ môn Hạ tầng cơ sở, Khoa Xây dựng, Trường Đại học Mỏ Địa chất, Số 18 Phố Viên, Hà Nội.

<sup>3</sup>Bộ môn Cầu hầm, Khoa Công Trình, Phân hiệu TP.HCM, Trường Đại học Giao thông vận tải, 450-451, Lê Văn Việt, TP. Hồ Chí Minh

### THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 17/1/2019

Ngày nhận bài sửa: 20/6/2019

Ngày chấp nhận đăng: 28/6/2019

Ngày xuất bản Online: 16/9/2019

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.1.44>

\* Tác giả liên hệ

Email: phamductho@humg.edu.vn

**Tóm tắt:** Nghiên cứu này sử dụng mô hình lưới (lattice model) để mô phỏng sự hình thành và phát triển các vi khe nứt và ảnh hưởng của nó đến hệ số thấm của cấu kiện bê tông tăng cường sợi thép (FRC). Trong mô hình này, bê tông được xem là bão hòa nước và bỏ qua ảnh hưởng của hiện tượng mao dẫn. Luật ứng xử kết hợp cơ-thủy được phát triển dựa trên mô hình cơ học phá hủy Mazars với sự tăng độ thấm của bê tông là 1 hàm lập phương của độ mở rộng vết nứt. So sánh kết quả mô phỏng với thực nghiệm cho thấy mô hình đề xuất là 1 công cụ hữu hiệu cho phép đánh giá độ mở rộng vết nứt và ảnh hưởng của nó đến sự thay đổi hệ số thấm của bê tông sợi thép, có vai trò quan trọng trong việc phân tích độ bền của các kết cấu bê tông cốt sợi thép.

**Từ khóa:** Mô hình lưới; độ thấm; cơ học phá hủy, bê tông sợi thép.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Độ thấm là tính chất đặc trưng của vật liệu rỗng (bê tông, đá...) cho khả năng chất lỏng chảy qua không gian rỗng, dưới ảnh hưởng của chênh lệch áp lực nước thủy tĩnh hoặc độ ẩm tương đối. Độ thấm của bê tông có mối quan hệ chặt chẽ với độ bền và tuổi thọ của kết cấu bê tông và bê tông cốt thép (độ thấm càng lớn, độ bền và tuổi thọ càng giảm).

Độ thấm của bê tông chịu ảnh hưởng của nhiều thông số đặc trưng của môi trường rỗng như: độ rỗng, sự phức tạp, sự kết nối của hệ thống lỗ rỗng hay vi vết nứt. Thông số này cũng rất quan trọng trong việc xác định khả năng truyền chất trong bê tông (khuếch tán ion Clo đối với bê tông trong môi trường biển). Khi ứng suất trong bê tông vượt qua ứng suất cho phép, nứt xuất hiện và phát triển trong bê tông, hệ thống nứt này sẽ liên kết với nhau và liên kết với hệ thống lỗ rỗng, dễ dàng cho chất lỏng di chuyển, càng nhiều vết nứt, độ thấm càng tăng. Phụ thuộc và cường độ cũng như bản chất của tải trọng mà độ thấm của bê tông có thể tăng hoặc giảm.

Việc xác định độ thấm trong cấu kiện bê tông khi chịu tải là vấn đề được giới nghiên cứu khoa học về xây dựng rất quan tâm, đặc biệt trong công tác đánh giá, dự báo tính ổn định và bền vững của các công trình xây dựng tiếp xúc với môi trường có tính xâm thực như nước ngầm, nước khoáng, nước biển, nước thải sinh hoạt và công nghiệp chứa các tác nhân ăn mòn. Bê tông có độ thấm lớn có thể dẫn đến tăng tốc độ gỉ của cốt thép dẫn đến nứt kết cấu. Nứt xuất hiện trong bê tông sẽ dẫn đến giảm khả năng mang tải, giảm độ bền thấm...

Nhiều nghiên cứu thực nghiệm chỉ ra ảnh hưởng của tải trọng đến sự thay đổi hệ số thấm thông qua mối quan hệ giữa độ mở rộng vết nứt và độ thấm của bê tông (Desmettre and Charron, 2011; Gérard et al., 1996; Gilles Pijaudier-Cabot et al., 2009). Trong những thí nghiệm này, độ thấm được đo ở mỗi cấp tải trọng hoặc độ mở rộng vết nứt khác nhau, kết quả cũng chỉ ra rằng, khi ứng suất trong bê tông còn nhỏ và trung bình, độ thấm của bê tông tăng chậm, sau đó tăng nhanh khi tải trọng tác dụng gần với tải trọng gây phá hủy. Rõ ràng độ thấm của bê tông phụ thuộc vào sự hình thành và phát triển nứt của bê tông.

Một số mô hình toán được đề xuất dự báo sự thay đổi độ thấm của kết cấu khi chịu tải trọng, hầu hết các mô hình này dựa trên lý thuyết cơ học môi trường rỗng của Biot (Coussy O, 1995), trong đó tương tác giữa cơ học và thủy học được xem xét thông qua hệ số Biot. Phương pháp tiếp cận này sau đó trở nên phổ biến trong nghiên cứu tính bền vững và được phát triển cho cơ học phá hủy, mô phỏng sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (Benoît Bary et al., 2000; Chatzigeorgiou et al., 2005). Tuy nhiên, việc mô phỏng số sự phát triển của vết nứt trong phương pháp phần tử hữu hạn truyền thống gặp nhiều khó khăn khi xem xét tính chất không đồng nhất, không ổn định do kết quả phụ thuộc vào kích thước phần tử và tính cục bộ của vết nứt có thể dẫn đến tính không hội tụ của thuật toán (ứng suất ở đáy vết nứt tiến đến vô cùng).

Mô hình lưới lattice được xem là công cụ hiệu quả trong việc mô phỏng sự hình thành và phát triển nứt của vật liệu bê tông ((Bolander Jr. and Saito, 1998; Grassl, 2009; Jan Kozicki

and Jacek Tejchman, n.d.; Schlangen and Mier, 1992). Trong mô hình này vật liệu nghiên cứu được rời rạc hóa thành các phần tử dạng dầm (truyền lực pháp tuyến, lực cắt và mô men uốn) hoặc dạng thanh (chỉ truyền lực pháp tuyến) dựa trên sơ đồ Voronoi (Voronoi, 1908). Để đảm bảo tính không đồng nhất, các tính chất cơ học (Mô đun đàn hồi E, cường độ chịu kéo  $f_t$ , nén  $f_c$ , năng lượng phá hủy  $G_f$ ...) được đưa vào 1 cách ngẫu nhiên. Quá trình phát triển nứt được mô phỏng bằng cách giảm các tính chất cơ học hoặc loại bỏ các phần tử khi ứng suất trong các phần tử này vượt qua khả năng chịu lực.

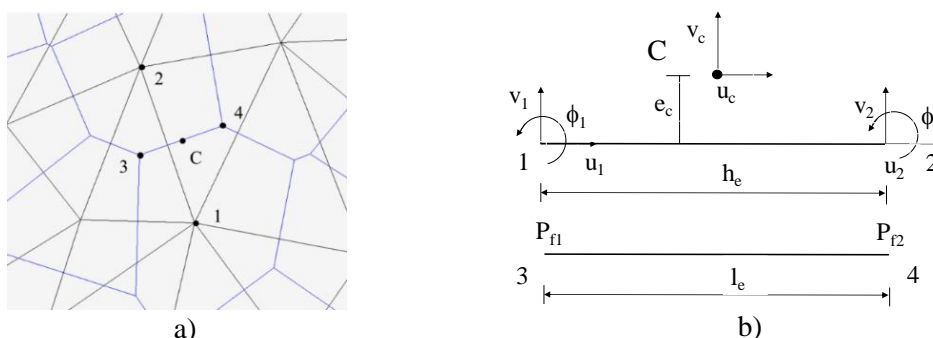
Trong bài báo này, tác giả nghiên cứu sự thay đổi độ thấm của kết cấu bê tông cốt thép chịu kéo bằng mô hình 2D ứng suất phẳng. Kết quả mô phỏng được so sánh với kết quả thí nghiệm đo được bởi (Desmettre and Charron, 2011).

## 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Mô hình lưới được mô phỏng bởi 2 hệ thống các cạnh tam giác Delaunay và sơ đồ Voronoi (Voronoi, 1908). Các phần tử truyền nước được xem như những ống dẫn đặt trên các cạnh của sơ đồ Voronoi trong khi đó các phần tử cơ học được rời rạc thành các phần tử dạng dầm (truyền lực pháp tuyến, lực cắt và mô men uốn) được đặt trên các cạnh tam giác Delaunay (hình 1a).

### 2.1. Mô hình lưới cơ học

Các phần tử cơ học được đặt trên trên các cạnh của đa giác Voronoi có chiều dài  $l$ . Mỗi điểm có 3 bậc tự do, gồm có hai chuyển vị  $u$  và  $v$ , và góc xoay  $\phi$ . Những chuyển vị và góc quay này cho phép xác định bước nhảy tại trung điểm C của phần tử mặt cắt ngang trung tuyến (hình 3).



**Hình 1.** a) Sơ đồ Voronoi và Tam giác Delaunay; b) Phần tử cơ học.

Tại trung điểm C của mặt cắt ngang, chuyển vị không liên tục được xác định như sau:

$$u_c = Bu_e \quad (1)$$

Trong đó: 
$$u_e = \{u_1, v_1, \phi_1, u_2, v_2, \phi_2\}^T; u_c = \{u_c, v_c\}^T \quad (2)$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & e_c & 1 & 0 & -e_c \\ 0 & -1 & -h_e/2 & 0 & 1 & -h_e/2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$h_e$  - là chiều dài của phần tử,

$e_c$  - là độ lệch tâm.

Chuyển vị  $u_c$  được thay thế bằng biến dạng  $\varepsilon = u_c / h_e = (\varepsilon_n, \varepsilon_s, \varepsilon_\phi)$ , ở đây  $h_e$  là chiều dài của phần tử lưới. Ma trận độ cứng của phần tử lưới được xác định bởi:

$$K = \frac{A}{h_e} B^T D_e B \quad (4)$$

Với  $D_e$  - là ma trận độ cứng đàn hồi.

Trong trường hợp mô hình phá hủy đẳng hướng, mối quan hệ giữa biến dạng và ứng suất được xác định bởi [Grassl, 2009]. Sự phát triển của phá hủy được kiểm soát bởi đường biểu diễn ứng suất- độ mở rộng vết nứt, chính vì vậy mà ứng xử cơ học không phụ thuộc vào chiều dài của phần tử lưới lattice. Mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng được biểu diễn như sau:

$$\sigma = (1-\omega)D_e\varepsilon = (1-\omega)\bar{\sigma} \quad (5)$$

Ở đây  $\omega$  là hệ số phá hủy,  $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}_s)^T$  và ma trận độ cứng đàn hồi  $D_e$  được xác định như sau:

$$D_e = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \gamma E \end{bmatrix} \quad (6)$$

Trong đó  $E$  và  $\gamma$  là các thông số của mô hình, kiểm soát mô đun Young và hệ số Poisson của vật liệu. Trong trường hợp ứng suất phẳng, và lưới lattice đều, hệ số Poisson  $\nu$  được xác định như sau:

$$\nu = \frac{1-\gamma}{3+\gamma} \quad (7)$$

Biến phá hủy của vật liệu  $\omega$  là hàm số của biến lịch sử  $\kappa$ , được xác định bởi hàm tải trọng:

$$f(\varepsilon, \kappa) = \varepsilon_{eq}(\varepsilon) - \kappa \quad (8)$$

Biến dạng tương đương  $\varepsilon_{eq}$  được xác định:

$$\varepsilon_{eq}(\varepsilon_s, \varepsilon_n) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (1 - c) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 (c - 1) + \varepsilon_n\right)^2 + \frac{c \lambda^2 \varepsilon_s^2}{q^2}} \quad (9)$$

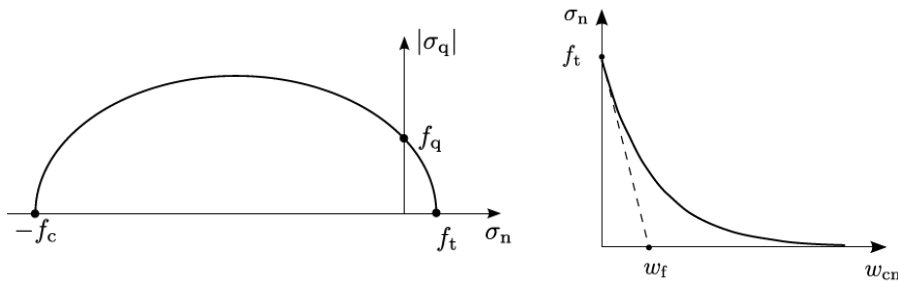
Trong đó  $\varepsilon_0$ ,  $c$  và  $q$  là những thông số của mô hình, những thông số này liên quan trực tiếp đến cường độ và độ cứng của các phần tử lưới. Theo (Grassl and Jirasek, 2010), biến dạng tương đương chỉ phụ thuộc vào hai thành phần biến dạng pháp tuyến và biến dạng trượt  $\varepsilon_n$  and  $\varepsilon_s$ .

Trường hợp chịu kéo thuần túy:

$$f_t = E \varepsilon_0 \quad (10)$$

Đường cong giảm yếu ứng suất-biến dạng, trong trường hợp kéo thuần túy:

$$\sigma_n = f_t \exp\left(-\frac{\omega_{cn}}{\omega_f}\right) \quad (11)$$



**Hình 2.** (a) Đường bao elip ứng suất (b) Đường cong ứng suất-độ mở rộng vết nứt.

Trường hợp cắt thuần túy:

$$f_q = q f_t \quad (12)$$

Trường hợp nén thuần túy:

$$f_c = c f_t \quad (13)$$

## 2.2. Mô hình lưới thủy học

Phần tử dùng để mô phỏng chất lỏng chảy trong bê tông được mô phỏng là phần tử nằm dọc trên các đa giác Voronoi. Phương trình vi phân miêu tả chảy của chất lỏng, trong trường hợp 1 chiều, đối với mỗi phần tử được xác định như sau :

$$\alpha_e P_f = f \quad (14)$$

Trong đó:  $\alpha_e$  - là ma trận độ dẫn thủy:

$$\alpha_e = \frac{h_e}{l_e} \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$P_f$  - áp lực nước,  $\alpha$  là hệ số dẫn thủy, hệ số thấm k:

$$k = \alpha \frac{\mu}{\rho g} \quad (16)$$

Trong đó:  $\mu$ ,  $\rho$  lần lượt là hệ số nhớt và khối lượng riêng của chất lỏng,  $g$  là gia tốc trọng trường. Để mô phỏng số, ta xem độ thấm của bê tông bao gồm 2 thành phần, thành phần của bê tông ban đầu (khi chưa hình thành nứt, nguyên trạng) và thành phần tăng thêm do nứt (gây ra bởi tải trọng, nhiệt độ, co ngót...).

$$k = k_0 + k_c(h_e) \quad (17)$$

Trong đó:  $k_0$  là độ thấm của vật liệu khi chưa bị phá hủy và  $k_c(h_e)$  là độ thấm tăng thêm do qua trình hình thành và phát triển nứt (phụ thuộc vào độ mở rộng vết nứt).

Trong trường hợp ta tính đến tính khúc khuỷu của khe nứt,  $k_c(h_e) = \xi \frac{\tilde{\omega}_c^3}{12h_e}$ . Độ thấm của bê tông khi đó được viết lại như sau :

$$k = k_0 + k_c(h_e) = k_0 + \xi \frac{\tilde{\omega}_c^3}{12h_e} \quad (18)$$

Trong đó:  $\xi$  tính khúc khuỷu của khe nứt,  $\tilde{\omega}_c$  là độ mở rộng vết nứt tương đương, được xác định:  $\tilde{\omega}_c = h_e \omega \varepsilon$

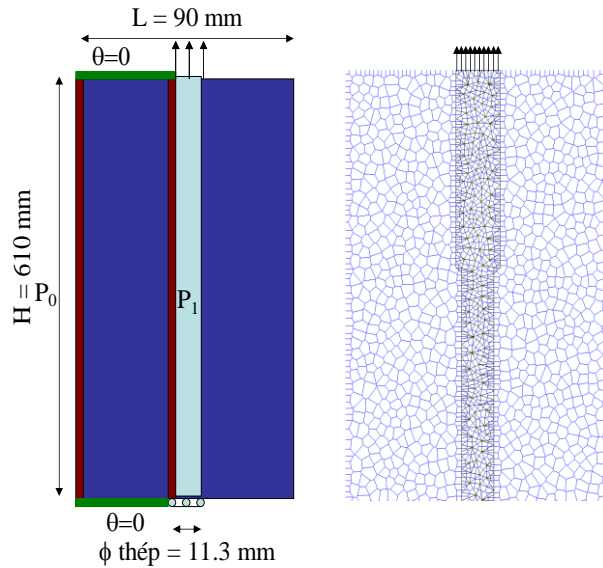
### 2.3. Chia lưới và điều kiện biên

Thí nghiệm sự thay đổi độ thấm theo tải trọng thí nghiệm kéo thép (Desmettre and Charron, 2011) được mô phỏng bằng bài toán 2D ứng suất phẳng với các điều kiện tương đương. Chiều cao của mẫu là 610 mm và chiều rộng là 90 mm tương tự như thí nghiệm. Chiều rộng của thanh thép mô phỏng được chọn tương tự như đường kính của thanh thép trong thí nghiệm  $\phi = 11.3$  mm, tuy nhiên để đảm bảo cùng diện tích thép, chiều dày 2 đầu thép lớn hơn chiều dày thép trong bê tông. Hình học và các điều kiện biên được giới thiệu trong hình 3. Thanh thép trong bê tông được kéo với tốc độ 0.05mm/phút đến khi chuyển vị đạt được  $\Delta = 1$ mm. Bảng 1 đưa ra các thông số của mô hình cơ học và thủy học được sử dụng để mô phỏng.

**Bảng 1.** Các thông số của mô hình dùng cho phân tích sự thay đổi độ thấm.

| Các thông số | Thực nghiệm<br>(Desmettre and Charron, 2011) | Mô phỏng |
|--------------|--|----------|
| E (MPa)      | 32   | 35       |
| $f_t$ (MPa)  | 2.8  | 3.2      |

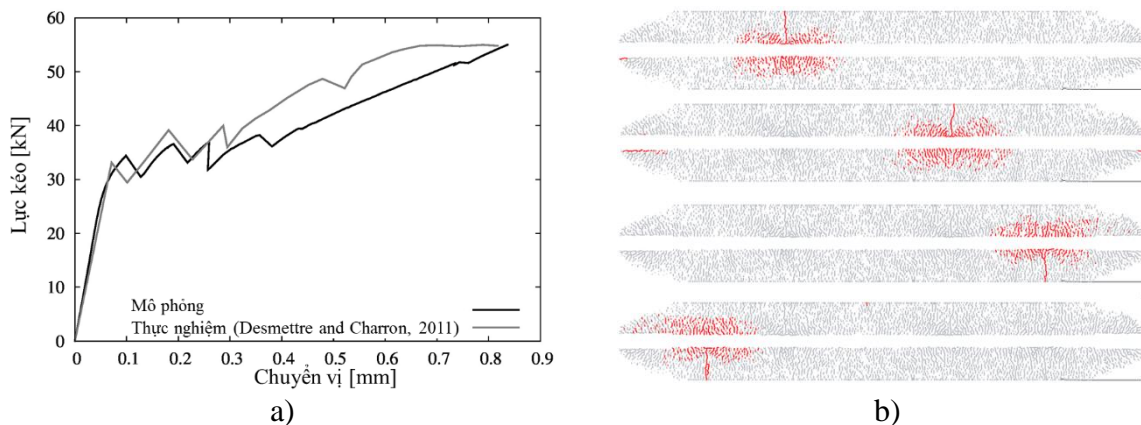
|             |                  |                  |
|-------------|------------------|------------------|
| $f_c$ (MPa) | --               | 42.24            |
| $f_q$ (MPa) | --               | 9.6              |
| $\gamma$    | --               | 0.33             |
| $G_f$       | --               | 75 N/m           |
| $k_{ini}$   | $2.10^{-10}$ m/s | $2.10^{-10}$ m/s |
| $b$         | --               | 0.6              |



Hình 3. Hình học, chia lưới và điều kiện biên.

### 3. KẾT QUẢ, PHÂN TÍCH VÀ THẢO LUẬN

Kết quả mô phỏng sử dụng được so sánh với kết quả thực nghiệm được thực hiện bởi (Desmettre and Charron, 2011). Mối quan hệ giữa lực và chuyển vị được biểu diễn trong hình 4a. Mô phỏng có thể cho ra 4 bước nhảy tương ứng tương ứng với mỗi vết nứt được hình thành (hình 4b). So sánh với thực nghiệm cho thấy mô hình lưới có khả năng mô phỏng tốt ứng xử cơ học của cấu kiện bê tông sợi thép chịu kéo thép.

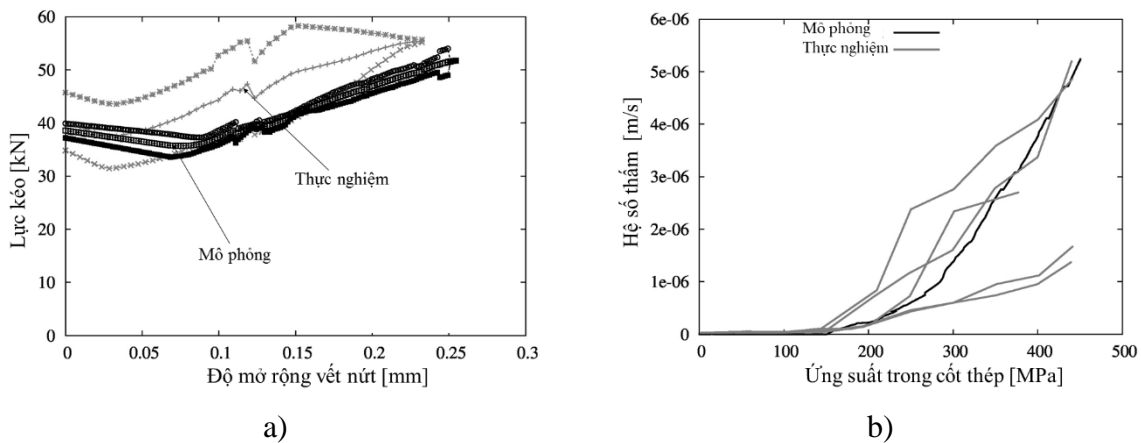


Hình 4. a) Tải trọng - chuyển vị; b) Vị trí vết nứt.



Độ mở rộng vết nứt được tính thông qua chuyển vị tương đối của 2 đầu khe nứt, độ mở rộng này phụ thuộc vào tải trọng tác dụng và được thể hiện trong hình 5a. Kết quả mô phỏng cũng đưa ra được sự phụ thuộc của độ mở rộng vết nứt theo tải trọng tác dụng.

Hình 5b giới thiệu đường cong độ thấm và ứng suất trong cốt thép. Có thể quan sát thấy, khi ứng suất còn bé, từ 0 – 200 MPa, độ thấm tăng nhẹ, tương ứng với sự hình thành vi vết nứt, sau đó ứng suất tăng từ 200 đến 450 MPa, độ thấm tăng nhanh tương ứng với sự lan truyền nứt và xuất hiện các vết nứt lớn. Mô hình lưới cũng cho kết quả tốt các giai đoạn phát triển của độ thấm, điều đó càng khẳng định tính đúng đắn của mô hình và là công cụ mạnh trong việc dự báo tính bền vững của cấu kiện bê tông cốt thép.



**Hình 5.** a) Tải trọng - độ mở rộng vết nứt; b) Độ thấm - ứng suất.

#### 4. KẾT LUẬN

Trong bài báo, các tác giả đã phát triển phương pháp mô hình lưới để mô phỏng thí nghiệm xác định độ thấm của kết cấu bê tông cốt thép tăng cường sợi thép khi cốt thép chịu kéo. Mô hình lưới được hợp thành bởi các phần tử rời rạc để dàng mô phỏng sự hình thành và phát triển vết nứt; từ đó có thể xác định được độ thấm của bê tông. Kết quả mô phỏng theo phương pháp trên đây cho thấy:

- Trong quá trình kéo thép trong kết cấu, mô hình có thể cho ra được 4 bước nhảy, tương ứng với sự xuất hiện của 4 vết nứt;
- Mô hình đã đề xuất mô phỏng tốt 4 giai đoạn của quá trình hình thành và phát triển vết nứt, từ đó xác định sự thay đổi của độ thấm;
- Quan hệ giữa hệ số thấm và độ mở rộng vết nứt được diễn tả bởi một hàm bậc 3 và cho thấy sự phù hợp với kết quả thực nghiệm theo mô phỏng trên đây.

Mô hình lưới cho kết quả gần sát với kết quả thí nghiệm, chứng tỏ tính đúng đắn của mô hình này. Đây là cơ sở xây dựng công cụ số hữu hiệu trong việc dự báo tuổi thọ của công trình bê tông cốt thép.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Benoît Bary, Jean-Pierre Bournazel, Eric Bourdarot, Poro-Damage Approach Applied to Hydro-Fracture Analysis of Concrete, *J. Eng. Mech.*, 126 (2000) 937–943. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2000\)126:9\(937\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2000)126:9(937))
- [2]. J.E. Bolander, S. Saito, Fracture analyses using spring networks with random geometry. *Eng. Fract. Mech.*, 61 (1998) 569–591.
- [3]. G. Chatzigeorgiou, V. Picandet, A. Khelidj, G. Pijaudier-Cabot, Coupling between progressive damage and permeability of concrete: analysis with a discrete model, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 29 (2005) 1005–1018. <https://doi.org/10.1002/nag.445>
- [4]. O. Coussy, *Mechanics of Porous Continua*, Wiley Interscience, New York, 1995.
- [5]. C. Desmettre, J.-P. Charron, Water permeability of reinforced concrete with and without fiber subjected to static and constant tensile loading, *Cem. Concr. Res.*, 42 (2012) 945–952. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2012.03.014>
- [6]. C. Desmettre, J.-P. Charron, Novel water permeability device for reinforced concrete under load, *Mater. Struct.*, 44 (2011) 1713–1723. <https://doi.org/10.1617/s11527-011-9729-6>
- [7]. P. Grassl, A new lattice approach to model diffusion in fractured media, *Cement and Concrete Composites*, 33 (2009) 918-924.
- [8]. Jan Kozicki, Jacek Tejchman, 2D lattice model for fracture in brittle materials, *Hydro-Eng. Environ. Mech.*, 53 (2006) 137-154.
- [9]. E. Schlangen, J.G.M. van Mier, Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures, *Mater. Struct.*, 25 (1992) 534–542. <https://doi.org/10.1007/BF02472449>
- [10]. G. Voronoi, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1908 (2009) 198-287. <https://doi.org/10.1515/crll.1908.134.198>