



SIMULATION OF THE FIVE-POINT BENDING PROPERTIES FOR STEEL BRIDGE DECK PLATE WITH ASPHALT SURFACING

Tran Anh Tuan¹, Le Ba Anh¹, Hoang Viet Hai¹,
Nguyen Quang Tuan²

¹*Section of Bridge and Tunnel Engineering, University of Transport and Communications,
No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.*

²*Section of Highway and Traffic Engineering, University of Transport and Communications,
No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.*

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 9/05/2019

Revised: 13/6/2019

Accepted: 14/6/2019

Published online: 16/9/2019

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.1.42>

* *Corresponding author*

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Abstract. The objective of this work was to analyze the behavior of the steel bridge deck plate with asphalt surfacing under local loading. To achieve the aforementioned objective, the finite element method is applied to simulate the five-point bending test. In this simulation, the behavior of asphalt concrete was considered as linear viscoelasticity. This kind of material exhibit time dependent property of the stress-strain relationship expressed by a Prony series. The numerical results obtained in the present work are compared with the corresponding experimental ones.

Keywords: Linear viscoelastic, finite element method, Prony series, sinusoidal loading.



MÔ HÌNH HÓA ỨNG XỬ KẾT CẤU BẢN MẶT CẦU THÉP - BÊ TÔNG NHỰA CHỊU UỐN 5 ĐIỂM

Trần Anh Tuấn¹, Lê Bá Anh¹, Hoàng Việt Hải¹,
Nguyễn Quang Tuấn²

¹Bộ môn Cầu hầm, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.

²Bộ môn Đường bộ, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 9/05/2019

Ngày nhận bài sửa: 13/6/2019

Ngày chấp nhận đăng: 14/6/2019

Ngày xuất bản Online: 16/9/2019

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.1.42>

* Tác giả liên hệ

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Tóm tắt: Mục tiêu của nghiên cứu này là phân tích ứng xử của bản mặt cầu thép có sử dụng lớp phủ bằng bê tông asphalt dưới tác động của tải trọng cục bộ. Để đạt được mục đích nêu trên, phương pháp phần tử hữu hạn được ứng dụng để mô phỏng thí nghiệm uốn năm điểm. Trong mô phỏng này, ứng xử của bê tông asphalt được xem là đàn nhớt tuyến tính. Loại vật liệu này biểu hiện tính chất phụ thuộc vào thời gian trong mối quan hệ ứng suất - biến dạng, trong mô phỏng số tính chất này được biểu diễn bằng chuỗi Prony. Kết quả thu được trong bài báo này được so sánh với kết quả thí nghiệm đã thực hiện.

Từ khóa: Đàn nhớt tuyến tính, phần tử hữu hạn, chuỗi Prony, tải trọng hình sin.

© 2019 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Sự phát triển về kinh tế - xã hội của Việt Nam nói riêng và của thế giới nói chung đòi hỏi việc thiết kế và thi công nhiều công trình cầu nhịp lớn. Đối với loại cầu này việc sử dụng kết cấu cầu mặt cầu vừa nhẹ vừa đáp ứng được khả năng chịu lực là hết sức cần thiết, một trong những loại kết cấu đáp ứng được yêu cầu trên là mặt cầu bản thép trực hướng sử dụng lớp phủ

bê tông nhựa. Mặc dù rất thông dụng và được sử dụng từ thập niên 1930 nhưng đến nay vẫn tồn tại nhiều vấn đề về loại mặt cầu này cần được phân tích và nghiên cứu. Một trong những vấn đề đó là ứng xử phức tạp của lớp phủ bằng bê tông asphalt trên bề mặt bản thép trực hướng, đây cũng chính là đối tượng được quan tâm của nghiên cứu này.

Kết cấu bản thép trực hướng sử dụng lớp phủ bê tông nhựa có độ nhạy cảm cao đối với tác động cục bộ gây ra bởi tải trọng bánh xe vận tải nặng. Cụ thể là độ biến dạng và dao động của loại mặt cầu này cao hơn so với mặt cầu bằng bê tông xi măng. Chính những ứng xử này gây ra hư hỏng cho mặt cầu bản thép trực hướng ở cả phần kết cấu thép lẫn lớp phủ, làm giảm đáng kể tuổi thọ của toàn bộ công trình. Ở Việt Nam biểu hiện hư hỏng này có thể tìm thấy trên các cây cầu như Thăng Long (Hà Nội), Thuận Phước (Đà Nẵng), ... Vì vậy có rất nhiều công trình nghiên cứu, phân tích lý thuyết và thực nghiệm ở Việt Nam cũng như trên thế giới xoay quanh vấn đề này, có thể kể đến như các nghiên cứu của Cullimore và đồng nghiệp năm 1983 [1], của Bild năm 1987 [2], của Battista và Pfeil năm 1999 [3], của Nakanishi và Okochi năm 2000 [4], của Kim và đồng nghiệp năm 2014 [5] và của Nguyễn Ngọc Long và đồng nghiệp năm 2016 [6].

Trên cơ sở tham khảo các nghiên cứu trên thế giới, bài báo này đề xuất mô hình kết cấu, mô hình tải trọng và mô hình vật liệu dùng để phân ứng xử cục bộ của kết bản thép – lớp phủ bê tông nhựa. Từ đó mô phỏng sự làm việc của nó bằng phương pháp phần tử hữu hạn, kết quả mô phỏng được sử dụng để phân tích phản ứng của các loại vật liệu cũng như tác động qua lại giữa chúng khi làm việc chung. Bài báo được kết cấu theo các nội dung chính sau: Phần 2 dành để mô tả, đề xuất mô hình kết cấu và vật liệu, phần 3 đề cập và phân tích các kết quả số sau khi mô phỏng bằng phương pháp phần tử hữu hạn, phần cuối cùng là một số kết luận của vấn đề nghiên cứu.

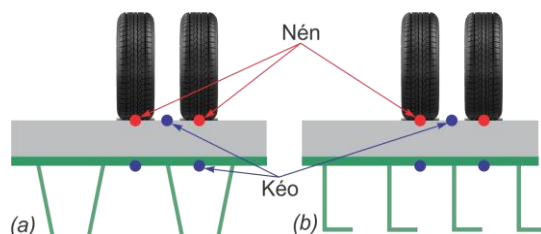
2. MÔ HÌNH KẾT CẤU VÀ VẬT LIỆU

2.1. Mô hình kết cấu

Việc phân tích tác động qua lại giữa hai loại vật liệu bê tông nhựa và thép trong kết cấu mặt cầu trực hướng dưới tác dụng cục bộ của tải trọng bánh xe không nhất thiết phải mô hình toàn bộ kết cấu tổng thể mà chỉ cần xem xét kết cấu trong phạm vi ảnh hưởng của tải trọng. Hơn nữa trong nghiên cứu thực nghiệm cũng như mô hình do điều kiện của trang thiết bị thí nghiệm, do hạn chế về thời gian và dung lượng bộ nhớ đệm của máy tính mà việc thực hiện thí nghiệm hay hay mô hình hoá toàn bộ kết cấu là khó thực hiện và rất tốn kém. Chính vì lý do đó mà việc đề xuất một mô hình kết cấu đặc trưng đủ khả năng đại diện cho ứng xử cục bộ của kết cấu tổng thể là việc hết sức cần thiết. Trong việc phỏng đoán ứng xử của bản mặt cầu trực hướng sử dụng lớp phủ bê tông nhựa nhiều công trình nghiên cứu trên thế giới đã lựa

chọn và đưa ra mô hình kết cấu đại diện dùng trong thực nghiệm cũng như mô hình số, có thể kể ra công trình nghiên cứu của các tác giả Cullimore và đồng nghiệp năm 1983 [1], Battista và Pfeil năm 1999 [3], Kim và đồng nghiệp năm 2014 [5], Li và Chen năm 2009 [7], Pouget và đồng nghiệp năm 2010 [8].

Trong các công bố kể trên đều chỉ ra rằng đối với mặt cầu thép có sườn tăng cường kín thì ứng suất kéo và biến dạng cực đại xuất hiện khi một bánh xe nằm chính giữa sườn tăng cường và bánh còn lại nằm giữa nó và sườn kế tiếp như được biểu diễn trên hình 1a.



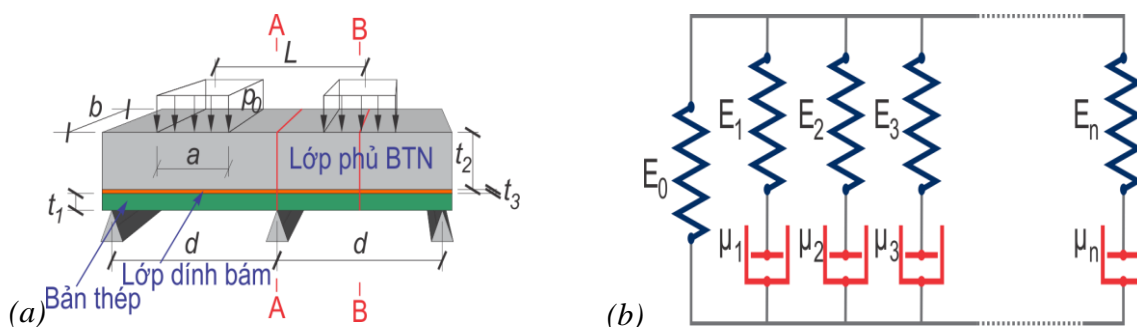
Hình 1. Vị trí bánh xe trên mặt cầu thép gây ra biến dạng cực đại.

Trên cơ sở phân tích như trên hai mô hình kết cấu đặc trưng được đề xuất dùng để phân tích ứng xử cục bộ của mặt cầu thép trực hướng sử dụng lớp phủ bê tông nhựa dưới tác dụng của tải trọng bánh kép. Trước tiên là mô hình dầm hai lớp ngàm một đầu được sử dụng trong nghiên cứu của Cullimore [1], tiếp đến là mô hình dầm hai lớp kê trên ba gối chịu tác dụng của hai vật tải trọng rải đều sử dụng trong các nghiên cứu của Kim, Li và Pouget [5],[7], [8], nó còn được biết đến với tên gọi mô hình kết cấu chịu uốn 5 điểm. Mô hình uốn 5 điểm cũng phù hợp trong trường hợp kết cấu mặt cầu có sườn tăng cường hở, ứng suất và biến dạng cực đại xuất hiện khi hai bánh xe nằm giữa ba sườn liên tiếp như mô tả trên hình 1b.

Trên cơ sở tham khảo các phân tích cơ học, ở đây nhóm tác giả lựa chọn phương án mô phỏng kết cấu chịu uốn 5 điểm chịu tác dụng của hai vật tải trọng rải đều biến đổi theo hàm số sin có dạng phương trình như sau:

$$P = p_0 [1 + \sin(2\pi ft)] \quad (\text{Mpa}) \quad (2)$$

Các thông số cụ thể của mô hình kết cấu và tải trọng được thể hiện trên hình 2a và bảng 1.



Hình 2. (a) Mô hình kết cấu và tải trọng; (b) Mô hình Maxwell tổng quát.

Bảng 1. Thông số kích thước và tải trọng.

STT	Ký hiệu	Giá trị	Đơn vị
1	p_0	0.3	MPa
2	a	200	mm
3	b	250	mm
4	d	380	mm
5	L	380	mm
6	t_1	14	mm
7	t_2	70	mm
8	t_3	0.4	mm

2.2. Mô hình vật liệu

Loại vật liệu sử dụng trong mô hình gồm có bê tông nhựa, chất dính bám và thép. Trong phạm vi nghiên cứu này chúng ta giả định rằng ở cấp độ vĩ mô chúng là những vật liệu đồng nhất và đẳng hướng. Thép và chất dính bám được coi là có ứng xử đàn hồi, riêng bê tông nhựa thì có ứng xử đàn nhớt. Vì đàn hồi tuyến tính là loại ứng xử phổ biến và cổ điển nên trong phần này chúng ta chỉ tập trung trình bày về ứng xử đàn nhớt tuyến tính và đưa ra mô hình đàn nhớt của vật liệu bê tông nhựa sử dụng trong nghiên cứu này. Không giống như vật liệu đàn hồi, ứng xử của vật liệu đàn nhớt bị ảnh hưởng mạnh mẽ bởi hai yếu tố đó là nhiệt độ và tần số tải trọng. Khi nhiệt độ thấp và tần số tác động của tải trọng cao vật liệu sở hữu ứng xử thiên về đàn hồi, trong khi đó khi nhiệt độ cao tần số tác dụng của tải trọng lại thấp thì vật liệu lại có ứng xử của chất lỏng nhớt. Vì vậy lớp phủ bê tông nhựa trong kết cấu mặt cầu thép có bản trục hướng tỏ ra rất phức tạp. Mô hình số trình bày trong bài báo này quan tâm đến đến ảnh hưởng của tần số đến vật liệu bê tông nhựa.

Để dự đoán ứng xử của lớp phủ bê tông nhựa cần phải đưa ra mô hình mối quan hệ ứng suất – biến dạng của nó. Mối quan hệ ứng suất – biến dạng của loại vật liệu đàn nhớt tuyến tính có thể được mô phỏng bằng ứng xử cơ học của mô hình bao gồm phần tử đàn hồi (biểu diễn bằng hình lò xo) và phần tử đàn nhớt (biểu diễn bằng hình giảm chấn). Các nhà khoa học trên thế giới đã xây dựng các mô hình dựa trên sự kết hợp của hai phần tử cơ bản này để mô phỏng ứng xử đàn nhớt của vật liệu bê tông nhựa, như mô hình của Huet năm 1963 [9], mô hình của Olard và Di Benedetto năm 2003 [10], mô hình của Yin và cộng sự năm 2008 [11]. Hoặc ứng xử đàn nhớt có thể biểu diễn bằng các mô hình đơn giản như Maxwell, Kelvin, Maxwell tổng quát (xem hình 2b), người đọc có thể dễ dàng tìm hiểu các mô hình này trong các cuốn sách cơ học của Zienkiewicz và Taylor năm 2000 [12], của Lake năm 2009 [13], của Lemaitre và Chaboche năm 2009 [14]. Trong số đó Maxwell tổng quát là mô hình khái quát

nhất mô phỏng ứng xử đàn nhớt tuyến tính. Mô hình này cũng mô tả tốt nhất đặc tính trùng ứng suất của bê tông nhựa.

Đặc tính cơ bản của ứng xử đàn nhớt tuyến tính là mối quan hệ ứng suất – biến dạng phụ thuộc chặt chẽ vào thời gian như cách biểu thị trong phương trình sau

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} d\tau, \quad (1)$$

trong đó $E(t)$ là mô đun trùng ứng suất. Đối với mô hình Maxwell tổng quát nói đến ở trên thì mô đun trùng ứng suất được xác định như sau

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-t/\tau_i}, \quad (2)$$

với $E_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t)$ là mô đun cân bằng dài hạn, E_i là hệ số hồi quy Prony, τ_i là thời gian trùng ứng suất. Cách biểu diễn mô đun trùng ứng suất như trên còn được biết đến với tên gọi khai triển chuỗi Prony hay chuỗi Dirichlet. Xét phương trình (2) tại thời điểm $t = 0$ chúng ta nhận được mô đun ban đầu

$$E_0 = E(0) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \Rightarrow E_\infty = E_0 - \sum_{i=1}^N E_i, \quad (3)$$

do vậy biểu thức (2) có thể viết lại như sau

$$E(t) = E_0 - \sum_{i=1}^N E_i \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right]. \quad (4)$$

Như đã nói ở trên ở cấp độ vĩ mô lớp phủ bê tông nhựa được coi là đẳng hướng nên chúng ta có mối liên hệ cơ học giữa mô đun trùng ứng suất và mô đun cắt trùng ứng suất như sau

$$G(t) = \frac{E(t)}{2(1+\nu)}, \quad (5)$$

trong đó ν là hệ số Poisson. Thay (4) vào (5) và chia cả hai vế cho G_0 thu được biểu diễn mô đun cắt trùng ứng suất không thứ nguyên theo khai triển chuỗi Prony như biểu thức dưới đây

$$g(t) = 1 - \sum_{i=1}^N g_i \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right]. \quad (6)$$

Đây là cách mô tả mối quan hệ ứng suất – biến dạng của vật liệu đàn nhớt mà phương pháp phần tử hữu hạn ưu tiên sử dụng trong quá trình thiết lập các thuật toán.

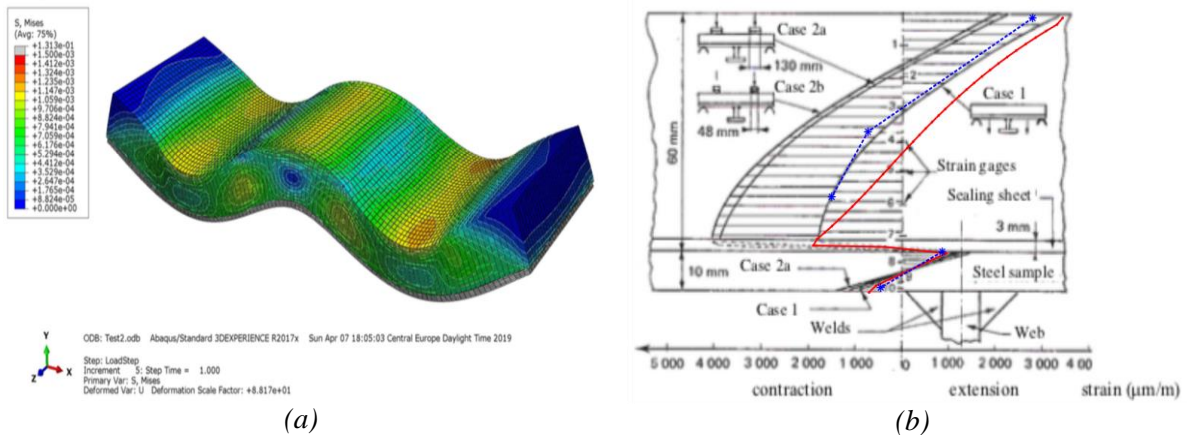
Trên cơ sở tham khảo nghiên cứu của Asim và đồng nghiệp năm 2018 [15] nghiên cứu này sử dụng chuỗi Prony với các thông số theo bảng 2 để đưa vào mô phỏng.

Bảng 2. Các hệ số trong chuỗi Prony.

TT	Tỷ số mô đun cắt trùng ứng suất g_i	Thời gian trùng ứng suất τ_i
1	0.4532	1.9472
2	0.3214	30.2541
3	0.1187	125.4102

III. KẾT QUẢ SỐ VÀ PHÂN TÍCH

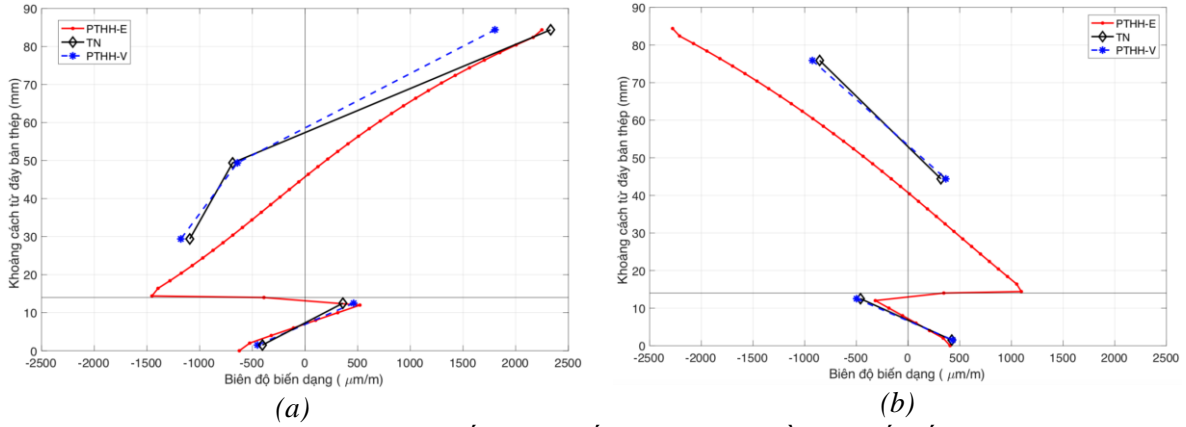
Mô phỏng được thực hiện dưới tác động của tải trọng hình sin như mô tả ở biểu thức (1) với dải tần số $f=0.01; 0.1; 1; 8$ Hz. Tiến hành xuất kết quả ứng suất Mises tại thời điểm $t=1000s$ như minh họa trên hình 3a. Hình 3b biểu diễn dạng hàm biến dạng thay đổi theo chiều dày kết cấu. Trong đó kết quả tính theo 2 trường hợp: vật liệu đàn hồi (đường liền) và vật liệu đàn nhớt (đường có điểm, gián đoạn). Chúng ta nhận thấy rằng sự biến đổi này có xu thế phù hợp với công bố của Hameau và cộng sự vào năm 1981 [16]. Đặc biệt, là sự chuyển trạng thái biến dạng từ nén tại đáy lớp phủ bê tông nhựa sang kéo tại vị trí thớ trên bản thép khi qua lớp dính bám. Điều này có thể giải thích bởi lớp dính bám có mô đun nhỏ hơn rất nhiều so với thép và lớp phủ bê tông nhựa.



Hình 3. (a) Ứng suất Mises; (b) Dạng phân bố biến dạng tại mặt cắt A-A so sánh với nghiên cứu của Hameau và đồng nghiệp năm 1981 [16].

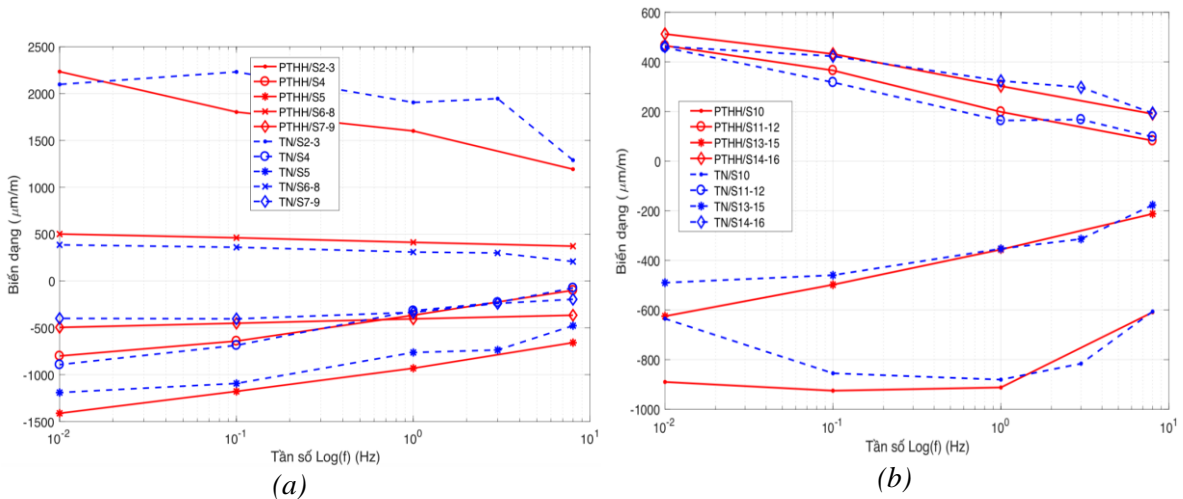
Hình 4 biểu diễn sự thay đổi biên độ của biến dạng tại hai mặt cắt A-A và B-B (vị trí mặt cắt được mô tả như trong hình 2.a) đối với mô hình đàn hồi (đường liền chấm), mô hình đàn nhớt (đường đứt sao) đồng thời cũng so sánh với kết quả thực hiện thí nghiệm (đường liền hình thoi) đã công bố trong nghiên cứu của Nguyễn Quang Tuấn và đồng nghiệp năm 2019 [17]. Chúng ta nhận thấy rằng giữa kết quả mô hình khi coi vật liệu bê tông nhựa là đàn hồi và kết quả thực nghiệm có sự khác biệt khá rõ tuy nhiên điều này là chấp nhận được do hai cách tiếp cận khác nhau. Ngược lại kết quả tính toán khi coi ứng xử vật liệu là đàn nhớt khá khớp với giá trị nhận được thông qua thí nghiệm. Có thể nhận thấy sự phân bố biến dạng trong lớp phủ bê tông nhựa là phi tuyến khi quan sát sự thay đổi biến dạng của lớp bê tông nhựa theo chiều dày. Sự phi tuyến này có thể do một hoặc kết hợp của khá nhiều các nguyên nhân: tính

nhót của bê tông nhựa, ứng xử phi tuyến của vật liệu và/hoặc kích thước, sự liên kết các vật liệu trong kết cấu. Tuy vậy, việc mô hình hóa kết cấu với đặc tính đàn nhót tuyến tính của lớp phủ đã theo sát được sự biến đổi biến dạng trong cả 2 mặt cắt thể hiện trên Hình 4. Kết quả này cũng cho thấy cần xem xét ứng xử vật liệu là đàn hồi hay đàn nhót tuyến tính cũng như giả thiết về sự phân bố biến dạng khi tính toán thiết kế kết cấu bản mặt cầu trục hướng.



Hình 4. Sự biến thiên biến dạng theo chiều dày kết cấu (a) tại mặt cắt A-A, (b) tại mặt cắt B-B.

Hình 5 thể hiện mối quan hệ giữa biến dạng và tần số của tải trọng tác động lần lượt tại các mặt cắt A-A và B-B ở các vị trí tương ứng đặt đầu đo trong thí nghiệm của Nguyễn Quang Tuấn và đồng nghiệp [17]. Kết quả giữa mô hình (đàn nhót) và thực nghiệm cũng cho thấy sự tương đồng. Từ hai biểu đồ chúng ta nhận thấy rằng khi tần số tăng thì độ lớn của biến dạng (cả kéo cả nén) có xu hướng giảm. Xu hướng này cũng phù hợp với kết quả thí nghiệm do đặc tính chung của vật liệu đàn nhót ở khi tần số càng cao thì độ cứng càng lớn, ứng xử có xu hướng thiên về chất rắn đàn hồi. Đặc biệt, xu thế tăng rồi giảm của đầu đo tại vị trí S10 (Hình 5b) cũng thể hiện rõ bằng mô hình hóa. Cần lưu ý rằng tần số của tải trọng trong thực tế tương ứng với vận tốc xe chạy trên đường. Kết quả mô hình cũng như thực nghiệm cho thấy biến dạng tại các vị trí trong lớp phủ bê tông nhựa cũng như bản thép có thể giảm đến 2 lần khi vận tốc tác dụng tải chênh nhau 800 lần.



Hình 5. Sự biến thiên biến dạng theo tần số (a) tại mặt cắt A-A, (b) tại mặt cắt B-B.

IV. KẾT LUẬN

Nội dung của bài báo này xoay quanh vấn đề mô phỏng thí nghiệm uốn 5 điểm là kết cấu đại diện cho việc phân tích ứng xử mặt cầu thép bản trục hướng sử dụng lớp phủ bê tông nhựa, trong đó lớp phủ được mô hình dạng vật liệu đàn nhớt tuyến tính có mô đun cắt trùng ứng suất được biểu diễn bằng khai triển chuỗi Prony. Nghiên cứu đã chỉ ra một số đặc tính của lớp phủ khi có sự thay đổi của tần số tác động của tải trọng.

Ở Việt Nam, nghiên cứu này đã bước đầu tính đến ứng xử đàn nhớt – loại ứng xử phức tạp của lớp phủ bê tông nhựa trên kết cấu mặt cầu thép trục hướng. Kết quả mô phỏng phù hợp với các nghiên cứu thực nghiệm đã thực hiện, đặc biệt thể hiện được sự phân bố biến dạng phi tuyến trong lớp phủ bê tông nhựa. Kết quả cũng nhấn mạnh tầm quan trọng của việc xem xét tính chất đàn nhớt của vật liệu bê tông nhựa trong tính toán thiết kế các kết cấu có sử dụng vật liệu này. Tuy nhiên cũng còn nhiều vấn đề cần đặt mục tiêu nghiên cứu tiếp như ảnh hưởng của nhiệt độ hay mối liên hệ giữa các hệ số của chuỗi Prony với vật liệu sử dụng trong các thí nghiệm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. M.S.G. Cullimore, I.D. Flett, J.W. Smith, Flexure of Steel Bridge Deck Plate with Asphalt Surfacing, ABSE Periodical. Bristol: University of Bristol., 1(1983) 58–83.
- [2]. S. Bild, Durability design criteria for bituminous pavements on orthotropic steel bridge decks, Can. J. Civ. Eng., 14 (1987) 41-48. DOI: 10.1139/187-006
- [3]. R. C. Battista, M. S. Pfeil, Fatigue cracks induced by traffic loading on steel bridges's slender orthotropic decks, Transactions on Modelling and Simulation, 21 (1999) 38-46.
- [4]. N. Nakanishi, T. Okochi, The Structural Evaluation for an Asphalt Pavement on a Steel Plate Deck, Proceedings of the First International Conference, World of Asphalt Pavement (AAPA), Sydney, Australia 112-123, 2000.
- [5]. T. W. Kim, J. Baek, H. J. Lee, S. Y. Lee, Effect of pavement design parameters on the behaviour of orthotropic steel bridge deck pavements under traffic loading, International Journal of Pavement Engineering, 15 (2014) 471-482. <https://doi.org/10.1080/10298436.2013.839790>
- [6]. Nguyễn Ngọc Long, Ngô Văn Minh, Trần Thị Kim Đăng, Nguyễn Đắc Đức, Lê Đình Long, Các dạng hư hỏng điển hình của kết cấu áo đường mềm trên mặt cầu thép bản trục hướng, Tạp chí Giao thông vận tải, 2015
- [7]. X. Li, Y. Chen, New composite pavement system for orthotropic steel bridge decks, Proceedings of GeoHuman international conference, Huan, China, 75-84, 2009.
- [8]. S. Pouget, C. Sauzeat, H. Di Benedetto, F. Orlard, Numerical simulation of the five-point bending test designed to study bituminous wearing courses on orthotropic steel bridge, Materials and Structures, 43 (2010) 319-330. <https://doi.org/10.1617/s11527-009-9491-1>
- [9]. C. Huet, Etude par une méthode d'impédance du comportement viscoélastique des

matériaux hydrocarbonés, Thèse de doctorat d'ingénieur, Faculté des sciences de Paris, [in french], 1963.

[10]. F. Olard, H. Di Benedetto, General “2S2P1D” model and relation between the linear viscoelastic behaviors of bituminous binders and mixes, *Road Materials and Pavements Design*, 4 (2003) 185-244. <https://doi.org/10.1080/14680629.2003.9689946>

[11]. H. M. Yin, W.G. Buttlar, G.H. Paulino, H. Di Benedetto, Assessment of existing micromechanical models for asphalt mastics considering viscoelastic effects, *Road Materials and Pavement Design*, 9 (2008) 31-57.

[12]. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The finite element method, fifth edition Volume 2: Solid mechanics*, Butterworth Heinemann, Oxford, 2000.

[13]. R. Lakes, *Viscoelastic materials*, Cambridge University press, New York, 2009.

[14]. J. Lemaitre, J. L. Chaboche, *Mechanics of solid materials*, Cambridge university press, New York, 2009.

[15]. M. Asim, R. Khan, A. Ahmed, Q. Ali, Numerical modeling of nonlinear behavior of asphalt concrete, *International Journal of Advance Engineering and Research Development*, 5 (2018) 1-5. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2019.103367>

[16]. G. Hameau, C. Puch, A.M. Ajour, Comportement à la Fatigue en Flexion sous Moment Négatif, (in French), *Bulletin de liaison des Ponts et Chaussées* 111, 1981.

[17]. Nguyễn Quang Tuấn, Hoàng Việt Hải, Trần Anh Tuấn, Trần Thị Cẩm Hà, Đánh giá trạng thái biến dạng của kết cấu bản mặt cầu trục hướng có lớp phủ bê tông nhựa bằng thí nghiệm uốn 5 điểm, *Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải*, 5 (2019) 58-61.