



ANALYSIS OF FLUID FLOW IN FRACTURED POROUS MEDIA BY USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

Nguyen Dinh Hai^{1,3}, Tran Anh Tuan^{2,3*}

¹Section of Materials of Construction, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

²Section of Bridge and Tunnel Engineering, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

³Research and Application Center for Technology in Civil Engineering (RACE), University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 26/12/2019

Revised: 27/02/2020

Accepted: 28/02/2020

Published online: 29/02/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.2.7>

* *Corresponding author*

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Abstract. This investigation is concerned with the numerical modeling of the slow viscous flow through the single fracture in a porous material using the boundary element method. In the present work, the hydraulic behavior is described by the 2D Stokes equation for both the cracked and uncracked domains. By combining the decomposition solution method and boundary discretization scheme, we obtain first the velocity field and the other fluid quantities everywhere in the computational domain, then we use these solutions to calculate the effective permeability for fractured porous media. The results for the velocity field determined by the present method are shown to agree well with the numerical ones obtained by the finite element method.

Keywords: fractured porous material, boundary element method, decomposition solution method, effective permeability.

© 2020 University of Transport and Communications



PHÂN TÍCH ĐẶC TRƯNG DÒNG CHẢY TRONG KHE NÚT CỦA VẬT LIỆU RỖNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ BIÊN

Nguyễn Đình Hải^{1,3}, Trần Anh Tuấn^{2,3*}

¹Bộ môn Vật liệu xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

²Bộ môn Cầu hầm, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

³Trung tâm nghiên cứu và ứng dụng công nghệ xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 26/12/2019

Ngày nhận bài sửa: 27/02/2020

Ngày chấp nhận đăng: 28/02/2020

Ngày xuất bản Online: 29/02/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.2.7>

* Tác giả liên hệ

Email: anh-tuan.tran@utc.edu.vn

Tóm tắt. Bài báo này liên quan đến việc mô phỏng số dòng chảy của chất lỏng nhớt trong vết nứt đơn xuất hiện trong môi trường vật liệu rỗng bằng cách sử dụng phương pháp phần tử biên. Trong nghiên cứu này, ứng xử thủy lực tại vết nứt và miền chưa nứt được miêu tả bởi phương trình Stokes trong không gian hai chiều. Bằng cách kết hợp phương pháp phân ly nghiệm số và sơ đồ rời rạc hoá biên miền tính toán, chúng ta thu được trước hết là lời giải cho trường vận tốc và các đặc tính khác của dòng chảy tại mọi nơi trên miền tính toán, sau đó sử dụng kết quả này để xác định độ thấm có hiệu của môi trường rỗng có chứa vết nứt. Kết quả cho trường vận tốc tính toán bằng phương pháp này cho thấy sự phù hợp với kết quả số xác định bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

Từ khóa: vật liệu rỗng bị nứt, phương pháp phần tử biên, phương pháp phân ly nghiệm, độ thấm có hiệu.

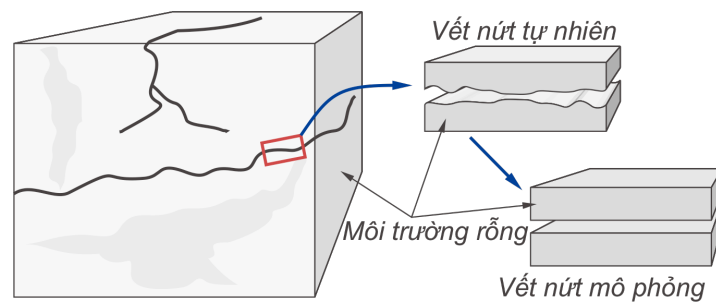
© 2020 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vật liệu tự nhiên hay nhân tạo sử dụng trong lĩnh vực xây dựng nói chung và lĩnh vực

xây dựng công trình giao thông nói riêng đa phần được xác định là loại vật liệu rỗng. Chúng có thể được xem là loại vật liệu gồm hai thành phần: (i) Pha rắn, còn gọi là pha nền hay bộ khung, pha rắn có thể được cấu tạo từ một hay nhiều loại vật liệu có tính chất cơ lý khác nhau. (ii) Pha rỗng nằm xen kẽ trong pha nền và được lấp đầy bởi khí hoặc chất lỏng. Đối với vật liệu rỗng vết nứt xuất hiện ở nhiều cấp độ và với quy mô khác nhau, chúng ảnh hưởng đáng kể đến đặc tính của dòng chảy trong môi trường rỗng này, kéo theo tác động đến tính thấm tổng thể của vật liệu. Do vậy sự hiểu biết về dòng chảy qua vết nứt của môi trường rỗng là một chủ đề nghiên cứu được nhiều nhà khoa học trong các lĩnh vực kỹ thuật quan tâm những năm gần đây.

Bởi vết nứt xuất hiện một ngẫu nhiên nên hình dạng và quy mô cũng rất đa dạng, tùy thuộc vào cấp độ không gian khi xem xét dòng chảy trong vết nứt mà các nghiên cứu trên thế giới có thể vận dụng các mô hình vết nứt khác nhau. Tuy nhiên trong bài báo này nhóm tác giả giới hạn phạm vi nghiên cứu vào mô hình vết nứt đơn dạng kênh phẳng song song, dạng mô hình này đã được nhắc đến trong các công bố của Zimmerman và Bodvarsson [1], của Ranjith và Darlington [2], của Lee và cộng sự [3], của Chen và cộng sự [4], của Liu [5], của Hudson và Liu [6], của Trần Anh Tuấn và Nguyễn Đình Hải [7]. Trong mô hình này các vết nứt tự nhiên sẽ được thay thế bằng vết nứt có độ mở rộng bằng hằng số được miêu tả theo sơ đồ biểu diễn trên hình 1.

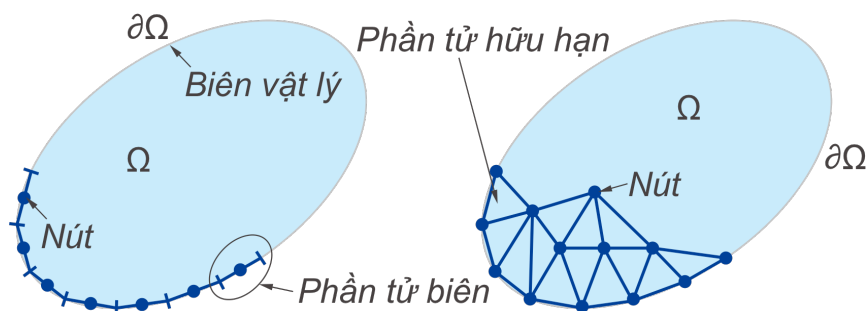


Hình 1. Mô hình dòng chảy trong khe.

Để phân tích đặc trưng của dòng chảy trong môi trường rỗng có chứa vết nứt người ta có thể sử dụng nhiều dạng phương pháp tính toán như mô hình giải tích, mô hình số, mô hình thực nghiệm. Trong nghiên cứu này, nhóm nghiên cứu lựa chọn sử dụng phương pháp phân tử biên để mô phỏng đặc tính của dòng chảy trong khe nứt đơn dạng kênh phẳng song song. Phương pháp này đã thể hiện sự thành công trong việc mô tả dòng chảy của chất lỏng không nén được trong một vài nghiên cứu trước đây, có thể kể đến như nghiên cứu của Higdon [8], của Staben và cộng sự [9-10], của Tlupova và Cortez [11], của Jasen và cộng sự [12]. Phương pháp phân tử biên là một trong những phương pháp số hiệu quả nhất khi xử dụng để giải các phương trình tích phân biên (boundary integral equation – BIE). Trong phương trình tích phân biên của bài toán dòng chảy trường nghiệm được biểu diễn dưới dạng hàm tích phân của các ẩn số bao gồm lực và vận tốc trên biên, các ẩn số này còn được gọi là các giá trị biên. Các giá trị biên này được xác định bằng cách giải một hệ phương trình tuyến tính, hệ này được xây dựng trên cơ sở các điều kiện biên của bài toán dòng chảy chất lỏng. Một khi đã biết các giá trị biên này, các đại lượng đặc trưng cho dòng chảy (như vận tốc và áp suất) tại mọi điểm trên

miền chất lỏng xem xét được tính toán thông qua phương trình tích phân miêu tả nghiệm tương ứng.

Đặc điểm khác biệt cơ bản giữa phương pháp phần tử biên và phương pháp phần tử hữu hạn (một phương pháp phân tích số khá phổ biến hiện nay) đó là khi sử dụng phương pháp phần tử biên người ta chỉ cần rời rạc hoá biên mà không cần chia lưới trên toàn miền tính toán, do vậy trong một số trường hợp việc lập trình phân tích bằng phương pháp này có thể giảm nhẹ được khối lượng công việc cho máy tính. Hình 2 mô tả sự khác biệt căn bản của phương pháp phần tử biên so với phương pháp phần tử hữu hạn.



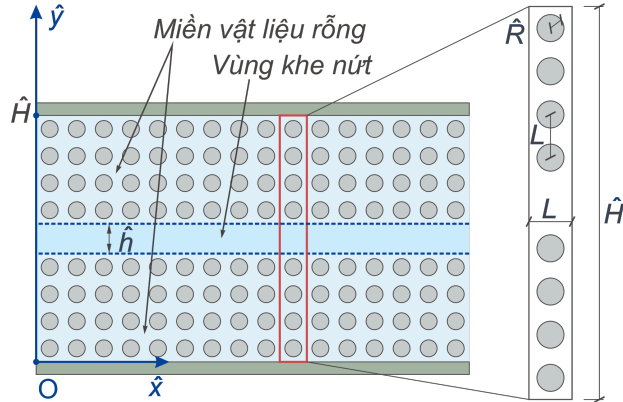
Hình 2. Mô hình rời rạc hoá của phương pháp phần tử biên so với phương pháp PTHH.

2. MÔ HÌNH BÀI TOÁN VÀ THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Từ mô hình khe nứt trong môi trường vật liệu rỗng biểu diễn trên hình 1, chúng ta nhận thấy rằng dòng chảy trong khe nứt là dạng dòng chảy hỗn hợp trong ba miền gồm miền dòng chảy tự do ở giữa (chính là dòng chảy trong khe), bên trên và dưới là hai miền môi trường rỗng. Để mô phỏng miền môi trường rỗng trong không gian hai chiều người ta có thể sử dụng mô hình các hạt không thấm có dạng hình tròn bố trí tuần hoàn, mô hình này cũng đã được sử dụng trong các công bố của Rajesh và cộng sự [13], của Wang [14], của Alcocer và Singh [15], của Matsumura và Jackson [16], của Chamsri và Bennethum [17] và của Fabricius và cộng sự [18]. Trên cơ sở đó mô hình xem xét bài toán được nhóm nghiên cứu đề xuất như mô tả trong hình 3. Trong đó miền tính toán được giới hạn bởi hai bề mặt không thấm đặt tại hai vị trí $\hat{y}=0$ và $\hat{y}=\hat{H}$ trong không gian Cartesian $O-\hat{x}\hat{y}\hat{z}$, khe nứt có độ mở rộng \hat{h} , miền vật liệu rỗng được mô phỏng bởi hệ thống nhân tròn không thấm bố trí tuần hoàn hai chiều dạng vuông với bước tuần hoàn là L (tức là khoảng cách giữa hai nhân tròn liên tiếp theo cả hai phương). Trong mô hình này chiều cao của miền tính toán được biểu diễn như sau

$$\hat{H} = n \times L + \hat{h}, \quad (1)$$

trong đó n là số nhân tuần hoàn theo phương \hat{y} . Dòng chảy chất lỏng qua mô hình này được sinh ra bởi một gradient áp suất có giá trị trung bình (giá trị ở cấp độ vĩ mô) $\langle \nabla \hat{p} \rangle = (-\sigma, 0, 0)$.



Hình 3. Mô hình dòng chảy trong khe nứt của vật liệu rỗng.

Chúng ta nhận thấy rằng dòng chảy có tính chất tuần hoàn theo phương \hat{x} nên không nhất thiết phải xem xét toàn bộ miền tính toán mà chỉ cần quan tâm đến miền tính toán đơn vị đặc trưng Ω với kích thước và hình dạng được biểu diễn trên hình 3 phía bên phải. Để biểu diễn và tính toán các đại lượng dưới dạng không thứ nguyên, chúng ta lần lượt chọn lựa L , $\sigma L^2/\mu$, σ là độ lớn đơn vị của chiều dài, vận tốc và gradient áp suất trong đó μ là độ nhớt của chất lỏng chảy qua môi trường vật liệu rỗng. Phương trình Stokes mô tả dòng chảy dưới dạng không thứ nguyên sẽ được biểu diễn như sau

$$\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla \rho(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad (3)$$

trong đó $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ lần lượt là ký hiệu trường vận tốc và áp suất không thứ nguyên, phương trình (3) mô tả đặc tính không nén được của dòng chất lỏng, trong hai phương trình (2), (3) các ký hiệu $\Delta, \nabla, \nabla \cdot$ lần lượt là các ký hiệu của toán tử Laplace, gradient và divergence.

Hơn nữa dòng chảy của chất lỏng phải thỏa mãn điều kiện không thấm, không trượt tại hai bề mặt (phía trên, phía dưới) và bề mặt của các nhân nằm trong phạm vi miền tính toán U . Điều kiện này được biểu diễn dưới dạng phương trình như sau

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \equiv \partial\Omega^T \cup \partial\Omega^B \cup \sum_{i=1}^n \partial\Omega^{(i)}, \quad (4)$$

trong đó $\partial\Omega^T, \partial\Omega^B, \partial\Omega^{(i)}$ lần lượt là biên trên, biên dưới và biên của nhân tuần hoàn thứ- i trong miền Ω .

Do bài toán xem xét là tuyến tính nên để xác định kết quả của bài toán đặt ra chúng ta trước tiên sử dụng giải pháp phân ly nghiệm số, tức là tách nghiệm ra thành hai thành phần như sau

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^P(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{và} \quad \rho(\mathbf{x}) = p^P(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}), \quad (5)$$

ở đây $\mathbf{u}^P(\mathbf{x}) \equiv (u^P(\mathbf{x}), v^P(\mathbf{x}))$, $p^P(\mathbf{x})$ là trường vận tốc và áp suất của phần dòng chảy đồng nhất cụ thể là của dòng chảy Poiseuille, trong khi đó $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))$, $p(\mathbf{x})$ là trường vận tốc và áp suất của trường dòng chảy nhiễu phát sinh do sự tồn tại của bề mặt trên, dưới và các

nhân tuần hoàn. Trường vận tốc và áp suất của dòng chảy Poiseuille đối với bài toán xem xét trong bài báo này có phương trình biểu diễn dưới đây

$$u^P(\mathbf{x}) = \frac{-y^2}{2} + \frac{H \times y}{2}, \quad v^P(\mathbf{x}) = 0, \quad p^P(x) = -x + p_0, \quad (6)$$

trong đó H, p_0 là chiều cao không thứ nguyên và giá trị áp suất ban đầu đặt tại biên miền chất lỏng tính toán. Trường vận tốc và áp suất nhiễu được thiết lập trên cơ sở sử dụng phương pháp phần tử biên, ở đây có một lưu ý rằng nhờ giải pháp phân ly nghiệm số mà trong bài toán này không cần thiết phải rời rạc hoá toàn bộ biên của miền tính toán mà chỉ cần rời rạc biên trên, biên dưới và biên tại vị trí tiếp xúc với các nhân tuần hoàn, do vậy giảm được đáng kể số lượng phần tử biên, kéo theo việc giảm nhẹ khối lượng tính toán. Theo đó, trường vận tốc và áp suất nhiễu được biểu diễn theo các phương trình tích phân biên như sau

$$\varepsilon(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})] d\mathbf{l}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}_0)p(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})] d\mathbf{l}(\mathbf{x}), \quad (8)$$

trong đó ε là hằng số phụ thuộc vào vị trí điểm \mathbf{x}_0 , $\varepsilon = 1$ nếu \mathbf{x}_0 nằm trong miền chất lỏng tính toán, $\varepsilon = 1/2$ nếu \mathbf{x}_0 nằm trên biên của miền chất lỏng tính toán và $\varepsilon = 0$ nếu \mathbf{x}_0 nằm ngoài miền chất lỏng tính toán, $\mathbf{t}(\mathbf{x}) \equiv (\tau, \eta)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv (u, v)$ lần lượt là vector lực và vận tốc trên biên, $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \equiv (n_x, n_y)$ là vector pháp tuyến đơn vị với biên và hướng ra ngoài miền chất lỏng xem xét. Trong các biểu thức (7-8), $\mathbf{S}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ là hàm tensor Green bậc hai của vận tốc hay còn gọi là Stokeslet, $\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ là hàm tensor ứng suất Green bậc ba hay còn gọi là stresslet, $\mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ là hàm vector Green áp suất liên hợp với Stokeslet và $\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ là hàm tensor ứng suất Green bậc hai liên hợp với stresslet, biểu thức cụ thể của các hàm này được biểu diễn như sau

$$\mathbf{S}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} -A - YA_Y & YA_X \\ YA_X & -A + YA_Y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 4A_{XX} & 4A_{XY} \\ 4A_{XY} & 4A_{YY} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} T_{xxx} & T_{xxy} \\ T_{xyx} = T_{yxx} & T_{xyy} = T_{yyx} \\ T_{yyx} & T_{yyy} \end{bmatrix}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} -4A_X - 2YA_{XY} & -2A_Y + 2YA_{XX} \\ -2A_Y + 2YA_{XX} & 2YA_{XY} \\ 2YA_{XY} & -2A_Y - 2YA_{XX} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 2A_X \\ 2A_Y \end{bmatrix} \quad (10)$$

trong đó $\mathbf{X}(X, Y)$ là vector hiệu của hai vector \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 và

$$A = A(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \ln[\cosh(kY) - \cos(kX)] + \frac{1}{2} \ln 2, \quad (11)$$

$$A_x = \frac{\partial A}{\partial X}, A_y = \frac{\partial A}{\partial Y}, A_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial X^2}, A_{xy} = \frac{\partial^2 A}{\partial X \partial Y}, A_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}. \quad (12)$$

Tiếp đến phương trình tích phân (7) sẽ được tiến hành giải bằng phương pháp phần tử biên theo trình tự cơ bản sau: Toàn bộ biên $\partial\Omega$ được chia thành N phần tử hằng số, gọi tên là Γ_j , khi đó giá trị biên lực và vận tốc là hằng số trên mỗi phần tử. Tiến hành dịch chuyển điểm \mathbf{x}_0 về biên và đặt lần lượt tại các điểm nút $\mathbf{x}_{0i} (i = 1, 2, \dots, N)$, chúng ta thu được $2 \times N$ phương trình với $4 \times N$ ẩn số $\{\tau_j, \eta_j, u_j, v_j\}$ biểu diễn như sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i = & -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \tau_j \int_{\Gamma_j} S_{xx}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) dl_j - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \eta_j \int_{\Gamma_j} S_{yx}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) dl_j \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Gamma_j} [T_{xxx}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i})n_x(\mathbf{x}_j) + T_{xyx}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i})n_y(\mathbf{x}_j)] dl_j \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N v_j \int_{\Gamma_j} [T_{yxx}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i})n_x(\mathbf{x}_j) + T_{yyx}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i})n_y(\mathbf{x}_j)] dl_j, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_i = & -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \tau_j \int_{\Gamma_j} S_{xy}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) dl_j - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \eta_j \int_{\Gamma_j} S_{yy}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i}) dl_j \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Gamma_j} [T_{xyx}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i})n_x(\mathbf{x}_j) + T_{xyy}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i})n_y(\mathbf{x}_j)] dl_j \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N v_j \int_{\Gamma_j} [T_{yyx}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i})n_x(\mathbf{x}_j) + T_{yyy}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{0i})n_y(\mathbf{x}_j)] dl_j \end{aligned} \quad (14)$$

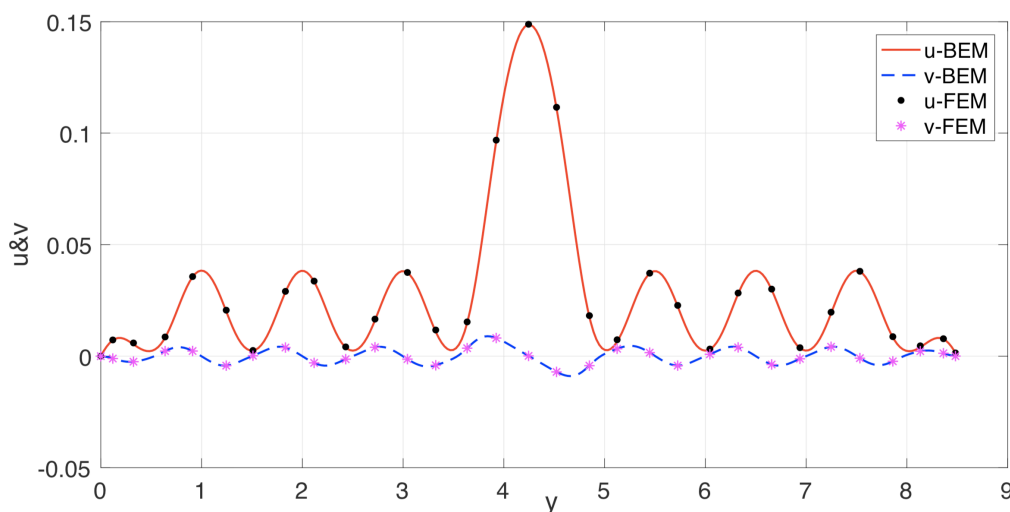
Ngoài ra các giá trị biên phải thỏa mãn phương trình điều kiện biên (4) của bài toán, từ đó chúng suy ra $2 \times N$ phương trình điều kiện biên biểu diễn như sau

$$v_i = 0 \quad \text{và} \quad u_i - \frac{y_i^2}{2} + \frac{Hy_i}{2} = 0. \quad (15)$$

Các phương trình (13), (14) và (15) được kết hợp với nhau để tạo thành một hệ phương trình với số ẩn bằng số phương trình. Sau khi giải được các ẩn số của hệ, chúng ta thu được các giá trị biên $\{\tau_1, \dots, \tau_N, v_1, \dots, v_N, u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_N\}$, thay các giá trị này trở lại phương trình (7), (8) kết hợp với phương trình (5) và (6) chúng ta có thể xác định được trường vận tốc và áp suất tại mọi điểm trên miền chất lỏng.

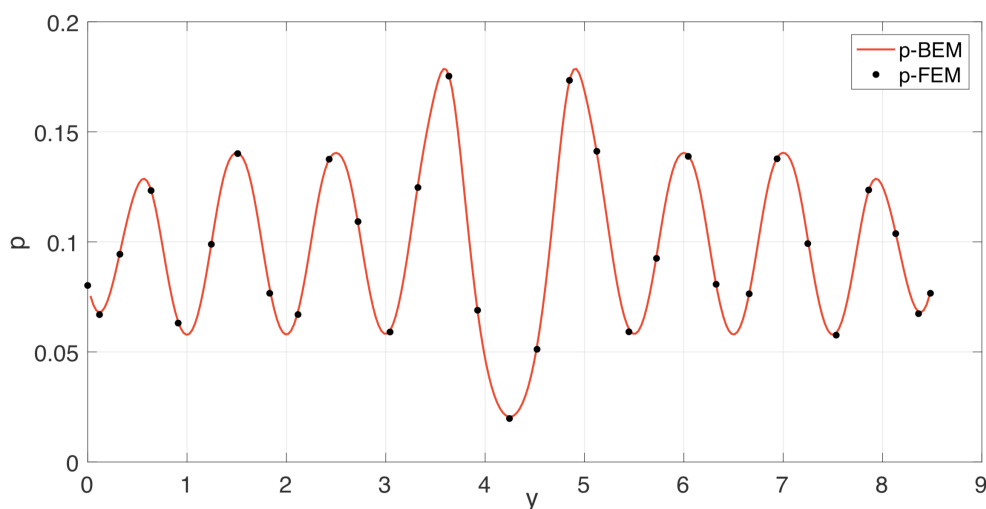
Chúng ta cần nhấn mạnh lại rằng từ phương trình (2) trở về sau bài toán được thiết lập, biến đổi đối với các đại lượng không thứ nguyên nên tất cả các biểu diễn kết quả trên biểu đồ đều không có đơn vị.

3. ỨNG DỤNG SỐ VÀ PHÂN TÍCH



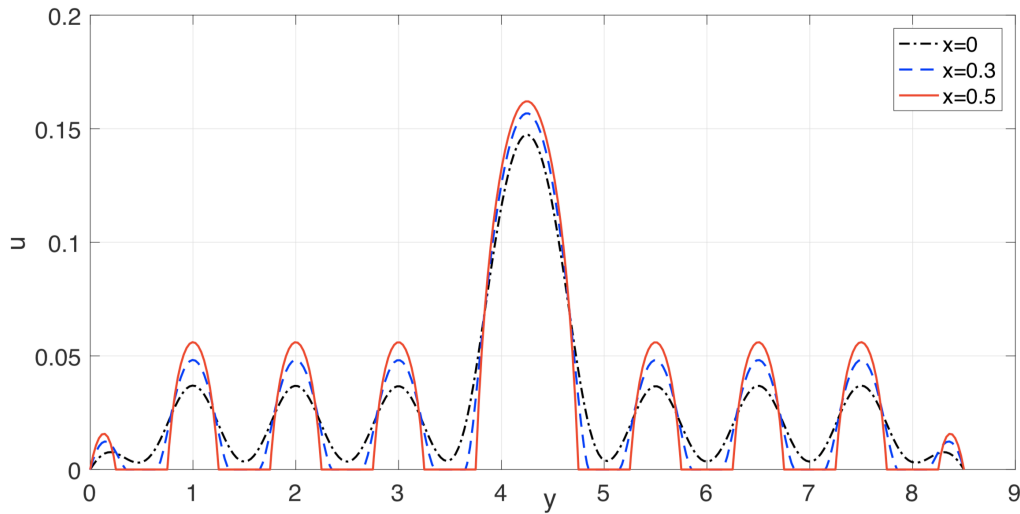
Hình 4. Biến thiên vận tốc ($u&v$) theo phương y tại vị trí $x=0.1$.

Để chứng minh tính hữu hiệu của phương pháp nêu ra trong nghiên cứu này, chúng ta tiến hành giải một vài ví dụ số cụ thể, trong các ví dụ này việc giải số các hệ phương trình nêu ra ở mục 2 được thực hiện với sự hỗ trợ của phần mềm toán học Matlab. Ví dụ đầu tiên xem xét dòng chảy qua môi trường rỗng có khe nứt với độ mở rộng $h=0.5$, số nhân tuần hoàn theo phương y là $n=8$, bán kính nhân tuần hoàn $R=0.25$, để kiểm chứng tính đúng đắn của phương pháp đề xuất nhóm tác giả cũng thực hiện song song việc mô phỏng bài toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Các kết quả thu được từ hai phương pháp được đồng thời biểu diễn trên hình 4 và hình 5, trong đó hình 4 biểu diễn sự biến thiên vận tốc u, v theo phương y còn hình 5 biểu diễn sự biến thiên áp suất, tất cả các giá trị này lấy tại vị trí $x=0.1$, y biến thiên từ 0 đến H . Trong hai hình này, chú thích trên biểu đồ với ký hiệu BEM đại diện cho kết quả từ phương pháp phần tử biên, còn chú thích với ký hiệu FEM là kết quả thu được từ phương pháp phần tử hữu hạn.



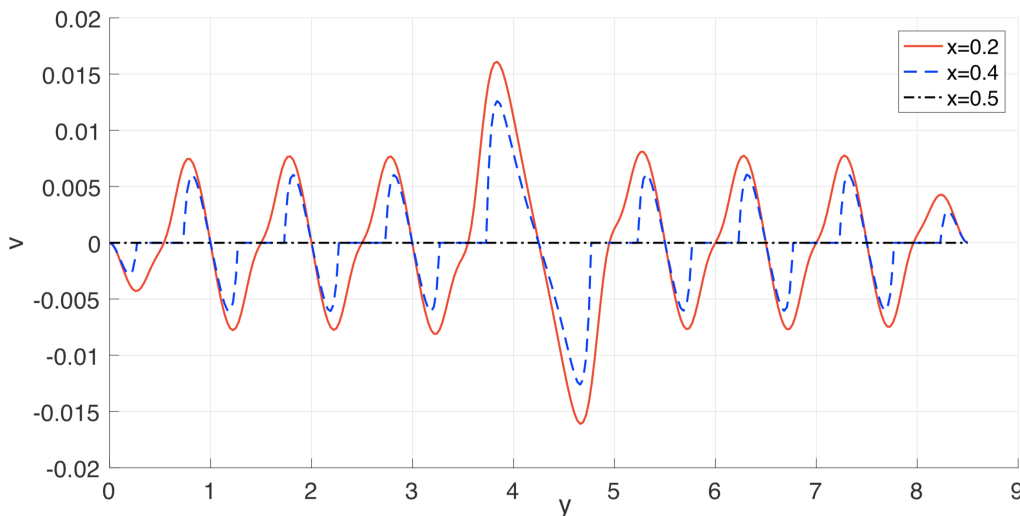
Hình 5. Biến thiên áp suất theo phương y tại vị trí $x=0.1$.

Quan sát các biểu đồ trên hình 4, 5 chúng ta nhận thấy rằng trường vận tốc và áp suất thu được từ phương pháp phần tử biên và phương pháp phần tử hữu hạn là sát nhau chứng tỏ tính chính xác của phương pháp nghiên cứu.

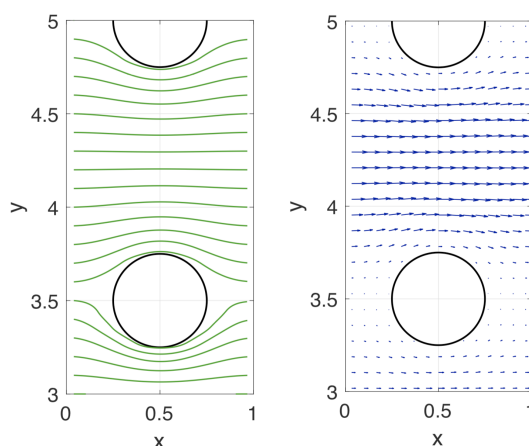


Hình 6. Biến thiên vận tốc u theo phương y tại $x=0, 0.3, 0.5$.

Hình 6 biểu diễn sự biến thiên vận tốc theo phương x tại một số vị trí $x = 0, 0.3, 0.5$, còn hình 7 biểu diễn sự biến thiên vận tốc theo phương y tại các vị trí $x = 0.2, 0.4, 0.5$. Trên hai hình này, những đoạn đi ngang thể hiện vị trí dòng chảy cắt qua các nhân tròn nên vận tốc tại đó bằng không. Hình 8 cung cấp thông tin về đường dòng và trường vận tốc của dòng chảy trong phạm vi từ $y=3$ đến $y=5$ của miền tính toán đơn vị đặc trưng U , về mặt bản chất các thông tin này đều được suy ra từ trường vận tốc tính toán tại tập hợp các điểm trên miền U . Các thông tin cung cấp trên các hình từ 6 đến 8 là khá chi tiết về đặc điểm dòng chảy như vận tốc theo hai phương x, y , áp suất, dạng đường dòng, trường vector vận tốc. Điều này một lần nữa khẳng định có thể sử dụng phương pháp phần tử biên để phân tích đặc trưng dòng chảy của chất lỏng trong môi trường rỗng xuất hiện khe nứt.



Hình 7. Biến thiên vận tốc v theo phương y tại vị trí $x=0.2, 0.4, 0.5$.



Hình 8. Biểu diễn dạng đường dòng (trái) và trường vector vận tốc (phải).

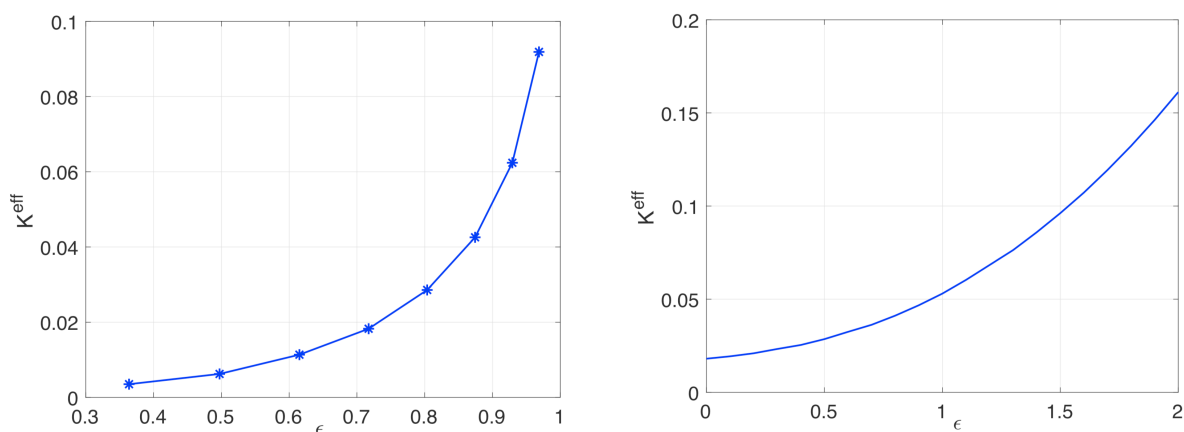
Ví dụ thứ hai hướng đến mục tiêu xác định độ thấm có hiệu theo chiều dọc vết nứt của khối vật liệu rỗng. Từ phương trình thấm Darcy dạng không thứ nguyên biểu diễn dưới đây

$$u(\mathbf{x}_0) = -K\nabla\rho(\mathbf{x}_0), \quad (16)$$

chúng ta có thể suy ra độ thấm tổng thể (độ thấm có hiệu) theo phương vết nứt của toàn bộ khối vật liệu rỗng bằng biểu thức sau

$$K^{eff} = \frac{\langle u(\mathbf{x}_0) \rangle}{\langle \nabla\rho(\mathbf{x}_0) \rangle} \quad \text{với} \quad \langle u(\mathbf{x}_0) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}_0) dS(\mathbf{x}_0). \quad (17)$$

Hình 9 phía trái biểu diễn sự biến thiên độ thấm có hiệu theo độ rỗng của vật liệu rỗng, phía phải thể hiện sự biến thiên của nó khi có sự thay đổi độ mở rộng vết nứt, biểu đồ cho thấy sự phù hợp về xu hướng: khi độ mở rộng vết nứt và độ rỗng tăng lên đồng nghĩa với độ thấm có hiệu của khối vật liệu cũng tăng lên.



Hình 9. Biến thiên độ thấm có hiệu theo độ rỗng (trái) và độ mở rộng khe nứt (phải).

4. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, đặc trưng dòng chảy trong khe nứt của môi trường vật liệu rỗng đã

được phân tích một cách chi tiết bằng phương pháp phần tử biên, chúng cũng được kiểm chứng bằng phương pháp phần tử hữu hạn do vậy kết quả đưa ra có độ tin cậy khá cao. Trong quá trình lập trình số nhóm nghiên cứu đã đưa vào giải pháp phân ly nghiệm số nhằm giảm bớt số lượng phần tử biên phải sử dụng, điều này đem lại sự giảm nhẹ về khối lượng tính toán cho máy tính. Trên cơ sở trường nghiệm vận tốc, độ thấm có hiệu của vật liệu rỗng phát sinh vết nứt đơn được xác định và biểu diễn theo sự biến thiên của độ mở rộng vết nứt và độ rỗng. Nghiên cứu của nhóm tác giả đã chứng minh tính hiệu quả của phương pháp phần tử biên trong việc giải quyết bài toán dòng chảy, đề xuất một sự lựa chọn về phương pháp số cho các nghiên cứu sinh, học viên cao học, sinh viên có thể tìm hiểu và sử dụng trong công việc chuyên môn của cá nhân.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2017.310.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. R. W. Zimmerman, G. S. Bodvarsson, Hydraulic conductivity of rock fractures, *Transport in Porous Media*, 23 (1996) 1–30. <https://doi.org/10.1007/BF00145263>
- [2]. P. G. Ranjith, W. Darlington, Nonlinear single-phase flow in real rock joints, *Water Resources Research*, 43 (2007) w09502 1–9. <https://doi.org/10.1029/2006WR005457>
- [3]. H. B. Lee, I. W. Yeo, K. K. Lee, Water flow and slip on NAPL-wetted surfaces of a parallel-walled fracture, *Geophysical Research Letters*, 34 (2007) L19401 1–5. <https://doi.org/10.1029/2007GL031333>
- [4]. Z. Chen, J. Qian, H. Zhan, Z. Zhou, J. Wang, Y. Tan, Effect of roughness on water flow through a synthetic single rough fracture, *Environ. Earth Sci.*, 76 (2017) 186. <https://doi.org/10.1007/s12665-017-6470-7>
- [5]. E. Liu, Effects of fracture aperture and roughness on hydraulic and mechanical properties of rocks: implication of seismic characterization of fractured reservoirs, *Journal of Geophysics and Engineering*, 2 (2005) 38–47. <https://doi.org/10.1088/1742-2132/2/1/006>
- [6]. J. A. Hudson, E. Liu, Effective elastic properties of heavily faulted structures, *Geophysics*, 64 (1999) 479–485. <http://dx.doi.org/10.1190/1.1444553>
- [7]. Trần Anh Tuấn, Nguyễn Đình Hải, Dòng chảy Stokes trên bề mặt gồ ghề có chiều dài trượt cục bộ biến thiên theo hàm số cosine, *Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải* 70 (2019) 279–288. <https://doi.org/10.25073/tcsj.70.4.5>
- [8]. J. J. L. Higdon, Stokes flow in arbitrary two-dimensional domains: shear flow over ridges and cavities, *J. Fluid Mech.*, 159 (1985) 195–226. <https://doi.org/10.1017/S0022112085003172>
- [9]. M. E. Staben, A. Z. Zinchenko and R. H. Davis, Motion of a particle between two parallel plane walls in low-Reynolds-number Poiseuille flow, *Phys. Fluids.*, 15 (2003) 1711-1733. <https://doi.org/10.1063/1.1568341>
- [10]. M. E. Staben, K. P. Galvinb, R. H. Davis, Low-Reynolds- number motion of a heavy sphere between two parallel plane walls, *Chem. Eng. Sci.*, 61 (2006) 1932–1945. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2005.10.041>

- [11]. S. Tlupova, R. Cortez, Boundary integral solutions of coupled Stokes and Darcy flows, *J. Comput. Phys.*, 228 (2009) 158–179. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.09.011>
- [12]. P. J. A. Janssen, H. E. H. Meijer, P. D. Anderson, Stability and breakup of confined threads, *Phys. Fluids.*, 24 (2012) 012102. <https://doi.org/10.1063/1.3677682>
- [13]. G. Rajesh, R. B. Bhagat, K. A. Fichthorn, Reactive Flow in a Porous Medium: Formulation for Spatially Periodic Hexagonally Packed Cylinders, *Journal of Applied Mechanics*, 67 (2000) 749 - 757. <https://doi.org/10.1115/1.1312803>
- [14]. C. Y. Wang, Stokes flow through a rectangular array of circular cylinders, *Fluid Dynamics Research*. 29 (2001) 65-80. [https://doi.org/10.1016/S0169-5983\(01\)00013-2](https://doi.org/10.1016/S0169-5983(01)00013-2)
- [15]. F. J. Alcocer, P. Singh, Permeability of periodic arrays of cylinders for viscoelastic flows, *Physics of Fluids*, 14 (2002) 2578-2581. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1483301>
- [16]. Y. Matsumura, T. L. Jackson, Numerical simulation of fluid flow through random packs of cylinders using immersed boundary method, *Physics of Fluids*. 26 (2014) 043602. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4870246>
- [17]. K. Chamsri, L. S. Bennethum, Permeability of Fluid Flow through a Periodic Array of Cylinders, *Applied Mathematical Modelling*. 39 (2015) 224-254. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.05.024>
- [18]. J. Fabricius, J. G. I. Hellstrom, T. S. Ludstrom, E. Miroshnikova, P. Wall, Darcy's Law for Flow in a Periodic Thin Porous Medium Confined Between Two Parallel Plates, *Transp. Porous Med.*, 115 (2016) 473-493. <https://doi.org/10.1007/s11242-016-0702-2>