



AN ANALYTICAL SOLUTION FOR FRP-STRENGTHENED BEAMS UNDER LOAD AND THERMAL EFFECTS

Phạm Văn Phê^{1,2*}, Nguyễn Xuân Huy^{2,3}

¹Faculty of Civil Engineering, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.

²Research and Application center for technology in Civil Engineering (RACE), University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Vietnam.

³Faculty of Construction Engineering, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 29/12/2019

Revised: 24/02/2020

Accepted: 25/02/2020

Published online: 29/02/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.2.3>

* *Corresponding author*

Email: phe.phamvan@utc.edu.vn

Abstract. The present paper develops a finite difference formulation for the prediction of the interfacial shear and peeling stresses of orthotropic FRP-strengthened beams subjected to load and thermal effects. Four interfacial stress fields are assumed as unknown functions of the longitudinal coordinate. Based on infinitesimal force equilibrium conditions and shear flow equilibrium conditions, three stresses of a plane stress state (transverse shear, transverse normal, and longitudinal normal stresses) can be expressed in terms of resultant forces. A set of compatibility equations and the corresponding boundary conditions are then obtained from a variation principle of complementary strain energy and solved by a finite difference technique. Peak values of the interfacial stresses occurring near the plate ends predicted by the present solution are in excellent agreements when compared to available numerical solutions.

Keywords: Beam strengthening, FRP, interfacial shear stresses, interfacial peeling stresses, complementary strain energy



MÔ HÌNH PHÂN TÍCH ỨNG XỬ CỦA DẦM GIA CƯỜNG BẰNG FRP CHỊU TẢI TRỌNG CƠ-NHIỆT

Phạm Văn Phê^{1,2*}, Nguyễn Xuân Huy^{2,3}

¹Khoa Công trình, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội

²Trung tâm nghiên cứu và ứng dụng công nghệ xây dựng (RACE), Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội

³Khoa Kỹ thuật xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 29/12/2019

Ngày nhận bài sửa: 24/02/2020

Ngày chấp nhận đăng: 25/02/2020

Ngày xuất bản Online: 29/02/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.71.2.3>

* Tác giả liên hệ

Email: phe.phamvan@utc.edu.vn

Tóm tắt. Bài báo phát triển một mô hình sai phân hữu hạn để dự đoán ứng suất cắt và ứng suất pháp ở bề mặt dính kết vật liệu của các dầm gia cường bằng tấm dán FRP chịu tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt. Bốn trường ứng suất ở hai bề mặt lớp dính kết được giả thiết là hàm của các tọa độ dọc trục. Dựa trên các điều kiện cân bằng lực và các phương trình cân bằng ứng suất vi mô, ba trường ứng suất của một trạng thái ứng suất phẳng được diễn giải theo các hợp lực. Nguyên lý biến phân của năng lượng bù được áp dụng để thu được các phương trình tương thích của các ứng suất. Kết quả ứng suất pháp và ứng suất tiếp lớn nhất xảy ra gần mép tấm FRP dự đoán dựa trên nghiên cứu hiện tại là phù hợp tốt với các lời giải số bằng phần mềm thương mại ABAQUS.

Từ khóa: Gia cường dầm, FRP, ứng suất bề mặt, ứng suất tiếp, ứng suất cắt, năng lượng bù

© 2020 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Việc sử dụng vật liệu FRP để gia cường dầm (thép, gỗ, bê tông cốt thép) tạo thành dầm composite đã được nghiên cứu từ khá lâu. Bên cạnh những ưu điểm về khả năng tăng cường sức kháng và khả năng thi công thuận tiện, việc đánh giá ứng xử của loại dầm composite này là điều rất khó khăn. Một số nghiên cứu chỉ ra rằng ngay cả khi các vật liệu vẫn ở giai đoạn đàn hồi, mặt cắt ngang của dầm nhiều lớp này cũng không trở lại trạng thái phẳng ban đầu sau

khi bị biến dạng [1,2,3]. Chính vì vậy, các phương pháp truyền thống dựa trên giả thiết mặt cắt phẳng sẽ cho kết quả sai lệch khi xác định chuyển vị, ứng suất cắt tại mặt tiếp xúc hay tải trọng gây mất ổn định [4]. Để giải quyết vấn đề này, nhiều mô hình tính toán có xét đến sự tương tác từng phần (partial interaction) được phát triển để dự đoán, đánh giá ứng xử của kết cấu dầm nhiều lớp (Lý thuyết biến dạng cắt [2], Phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên biến dạng cắt [5], [6], [7]). Bên cạnh đó, các nghiên cứu thực nghiệm và mô phỏng số được của Haghani và đồng nghiệp [8], Wu và các đồng nghiệp [9-11] đều cho thấy cho thấy, ứng suất tiếp và ứng suất pháp (peeling stress) tại mặt tiếp xúc giữa các vật liệu không tuyến tính theo chiều dài. Giá trị lớn nhất của ứng suất tiếp xuất hiện ở gần cuối đoạn dính bám có thể gây bong tách giữa các lớp vật liệu. Đồng thời, có nhiều nghiên cứu lý thuyết đã được xây dựng để dự đoán ứng suất tiếp và ứng suất nhỏ bật của dầm nhiều lớp. Tuy nhiên, ảnh hưởng của nhiệt độ chưa được xem xét đến trong các nghiên cứu hiện tại. Nội dung bài báo này là đề xuất một mô hình phân tích ứng xử dầm được gia cường bằng FRP có xét tới ảnh hưởng của nhiệt độ. Sau phần giới thiệu chi tiết mô hình phân tích, một ví dụ được trình bày làm rõ ứng xử của dầm composite khi chịu đồng thời tải trọng cơ- nhiệt.

2. XÂY DỰNG MÔ HÌNH DẦM GIA CƯỜNG FRP CHỊU TẢI TRỌNG CƠ- NHIỆT

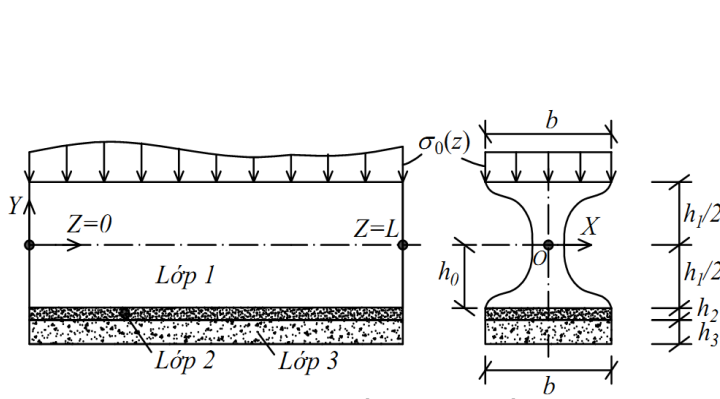
2.1. Giả thiết

Xét hệ dầm có 3 lớp chịu lực phân bố $\sigma_0(z)$ (Hình 1) và số gia nhiệt độ ΔT . Lớp 1 có tiết diện đối xứng theo hai phương, trong đó chiều cao tiết diện là h_1 , bề rộng tiết diện $b(y_1)$ là hàm phụ thuộc vào tọa độ y_1 . Lớp 2 và 3 có tiết diện hình chữ nhật với các kích thước lần lượt là $b \times h_2$ và $b \times h_3$. Các giả thiết tính toán: Dầm chịu tác động của tải trọng cơ-nhiệt; Dính bám giữa các lớp vật liệu là hoàn hảo. Trạng thái ứng suất phẳng được áp dụng cho các vật liệu. Đồng thời, các vật liệu được giả thiết là đàn hồi tuyến tính trục hướng với mô đun đàn hồi dọc trục E_{zi} , mô đun đàn hồi theo phương ngang E_{yi} , mô đun cắt G_i , với $i=1,2,3$. Đối với vật liệu bê tông cốt thép, giả thiết kết cấu bê tông chưa xuất hiện vết nứt. Đối với vật liệu thép, giả thiết ứng suất trong thép chưa bị chảy.

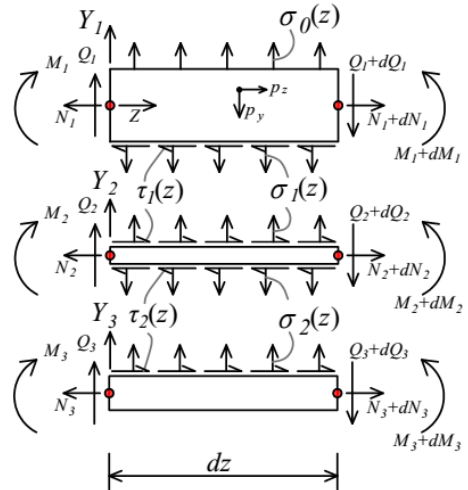
2.2. Phát triển trường ứng suất tĩnh cho phép.

Xét một phân tố vô cùng bé dz của dầm 3 lớp, và 3 lớp vật liệu được tách biệt như trên Hình 2. Ba hệ tọa độ theo phương đứng $Y_i -$ với $i=1,2,3$ được lựa chọn cho mỗi lớp vật liệu. Các ứng suất tiếp và ứng suất pháp ở bề mặt tiếp giáp lớp 1 và lớp 2 được ký hiệu lần lượt là $\tau_1(z)$, $\sigma_1(z)$, trong khi các ứng suất giữa lớp 2 và lớp 3 lần lượt là $\tau_2(z)$, $\sigma_2(z)$. Hợp lực dọc trục, lực cắt và mô men uốn của các lớp tại tiết diện $z -$ và $(z + dz) -$ lần lượt là N_i , Q_i , M_i (với $i=1,2,3$). Bằng cách thực hiện điều kiện cân bằng lực $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_x = 0$ cho ba phân tố vô cùng bé, ta xác định được 9 phương trình cân bằng tĩnh học sau:

$$\begin{aligned} dN_1(z) &= b\tau_1(z)dz; dN_2 = b[-\tau_1(z) + \tau_2(z)]dz; dN_3 = -b\tau_2(z)dz; \\ dQ_1(z) &= [b\bar{\sigma}_0(z) - b\sigma_1(z)]dz; dQ_2 = b[\sigma_1(z) - \sigma_2(z)]dz; dQ_3 = b\sigma_2(z)dz; \\ dM_1(z) &= [Q_1(z) + (bh_1/2)\tau_1(z)]dz; dM_2 = \{Q_2(z) + (bh_2/2)[\tau_1(z) + \tau_2(z)]\}dz; \\ dM_3 &= [Q_3(z) + (bh_3/2)\tau_2(z)]dz; \end{aligned} \quad (1a-k)$$



Hình 1. Hình dạng dầm và mặt cắt ngang.



Hình 2. Phân tử vô cùng bé của dầm liên hợp.

Từ phương trình (1a-k), bằng cách lấy tích phân theo \$z\$ từ 0 đến \$z\$ cho cả 9 phương trình, sẽ xác định được hợp lực tại vị trí tiết diện \$z\$ như sau:

$$\begin{aligned}
 N_1(z) &= N_1(0) + \int_0^z b\tau_1(z) dz; & Q_1(z) &= Q_1(0) + b \int_0^z \bar{\sigma}_0(z) dz - b \int_0^z \sigma_1(z) dz; \\
 M_1(z) &= M_1(0) + \int_0^z \left[Q_1(0) + b \int_0^z \bar{\sigma}_0(z) dz \right] dz - b \int_0^z \int_0^z \sigma_1(z) dz dz + \frac{bh_1}{2} \int_0^z \tau_1(z) dz; \\
 N_2(z) &= N_2(0) - b \int_0^z \tau_1(z) dz + b \int_0^z \tau_2(z) dz; & Q_2(z) &= Q_2(0) + b \int_0^z \sigma_1(z) dz - b \int_0^z \sigma_2(z) dz; & (2a-k) \\
 M_2(z) &= M_2(0) + \int_0^z Q_2(0) dz + b \int_0^z \int_0^z [\sigma_1(z) - \sigma_2(z)] dz dz + \frac{bh_2}{2} \int_0^z [\tau_1(z) + \tau_2(z)] dz; \\
 N_3(z) &= N_3(0) - b \int_0^z \tau_2(z) dz; & Q_3(z) &= Q_3(0) + b \int_0^z \sigma_2(z) dz; \\
 M_3(z) &= M_3(0) + \int_0^z Q_3(0) dz + b \int_0^z \int_0^z \sigma_2(z) dz dz + \frac{bh_3}{2} \int_0^z \tau_2(z) dz
 \end{aligned}$$

Trường ứng suất pháp dọc trục của các lớp vật liệu được giả thiết có dạng như sau:

$$\sigma_{zi}(y, z) = N_i(z)/A_i - y_i M_i(z)/I_i \quad (3)$$

Với \$i=1,2,3\$; \$A_i\$ là diện tích tiết diện của lớp vật liệu thứ \$i\$, \$I_i\$ là mô men quán tính với trục tọa độ \$X_i\$; \$y_i\$ là tọa độ thay đổi từ \$-h_i/2\$ đến \$h_i/2\$. Từ phương trình (2a-k), bằng cách thay vào phương trình (3), sẽ xác định được các ứng suất pháp tại mỗi lớp vật liệu như sau:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z1}(y_1, z) &= F_{z1}(y_1, z) + \left(-\frac{bh_1 y_1}{2I_1} + \frac{b}{A_1} \right) \int_0^z \tau_1 dz + \frac{by_1}{I_1} \int_0^z \int_0^z \sigma_1 dz dz; & \sigma_{z2}(y_2, z) &= F_{z2}(y_2, z) \\
 &+ \left(\frac{-A_2 y_2}{2I_2} - \frac{b}{A_2} \right) \int_0^z \tau_1 dz + \left(\frac{-A_2 y_2}{2I_2} + \frac{b}{A_2} \right) \int_0^z \tau_2 dz - \frac{by_2}{I_2} \int_0^z \int_0^z [\sigma_2 - \sigma_1] dz dz; & \sigma_{z3}(y_3, z) & \\
 &= F_{z3}(y_3, z) - \left(\frac{b}{A_3} + \frac{A_3 y_3}{2I_3} \right) \int_0^z \tau_2 dz - \frac{by_3}{I_3} \int_0^z \int_0^z \sigma_2 dz dz
 \end{aligned} \quad (4a-c)$$

Với các số hạng đã biết được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}
 F_{z_1}(y_1, z) &= N_1(0)/A_1 - \left[M_1(0) + \int_0^z Q_1(0) dz + b \int_0^z \int_0^z \bar{\sigma}_0(z) dz dz \right] y_1 / I_1; \\
 F_{z_2}(y_2, z) &= N_2(0)/A_2 - \left[M_2(0) + \int_0^z Q_2(0) dz \right] y_2 / I_2; \\
 F_{z_3}(y_3, z) &= N_3(0)/A_3 - \left[M_3(0) + \int_0^z Q_3(0) dz \right] y_3 / I_3;
 \end{aligned}
 \tag{5a-c}$$

Với trường ứng suất được giả thiết trong phương trình (4a-c) được cân bằng tĩnh học, có hai điều kiện cân bằng cần được thỏa mãn:

$$\begin{aligned}
 \partial [b(y_i) \tau_i(y_i, z)] / \partial y_i + \partial [b(y_i) \sigma_{zi}(y_i, z)] / \partial z &= b(y_i) p_z(y_i, z) \\
 \partial [b(y_i) \sigma_{yi}(y_i, z)] / \partial y_i + \partial [b(y_i) \tau_i(y_i, z)] / \partial z &= b(y_i) p_y(y_i, z)
 \end{aligned}
 \tag{6a-b}$$

Trong nghiên cứu này, lực khối (body force) $p_z(y_i, z)$ và $p_y(y_i, z)$ được bỏ qua. Từ phương trình (4a-c), bằng cách lần lượt thay thế vào phương trình (6a-c) và đặt $i=1, i=2, i=3$, ba thành phần ứng suất của trạng thái ứng suất phẳng trong mỗi lớp vật liệu có được là

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zi}(y_i, z) &= \mathbf{f}_{zi}(y_i)_{1 \times 4}^T \mathbf{H}(\mathbf{z})_{4 \times 1} + F_{zi}(y_i, z) \\
 \tau_i(y_i, z) &= \mathbf{f}_{\tau i}(y_i)_{1 \times 4}^T \mathbf{H}'(\mathbf{z})_{4 \times 1} + F_{\tau i}(y_i, z) \\
 \sigma_{yi}(y_i, z) &= \mathbf{f}_{yi}(y_i)_{1 \times 4}^T \mathbf{H}''(\mathbf{z})_{4 \times 1} + F_{yi}(y_i, z)
 \end{aligned}
 \tag{7a-c}$$

Ở đây $\langle \mathbf{H}(\mathbf{z}) \rangle_{1 \times 4}^T = b \langle A(z) \ B(z) \ C(z) \ D(z) \rangle$, $A(z) = \int_0^z \tau_1(z) dz$; $C(z) = \int_0^z \tau_2(z) dz$; $B(z) = \int_0^z \int_0^z \sigma_1(z) dz dz$; và $D(z) = \int_0^z \int_0^z \sigma_2(z) dz dz$. Các hàm vector của trục tọa độ theo phương ngang và các đặc trưng tiết diện được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{z1}(y_1)_{1 \times 4}^T &= \langle (1/A_1 - h_1 y_1 / 2I_1) \ (y_1 / I_1) \ 0 \ 0 \rangle \\
 \mathbf{f}_{\tau 1}(y_1)_{1 \times 4}^T &= [1/b(y_1)] \left\langle \int_{y_1}^{h_1/2} (1/A_1 - h_1 y_1 / 2I_1) b(y_1) dy_1 \ \middle| \ \int_{y_1}^{h_1/2} (y_1 b(y_1) / I_1) dy_1 \ \middle| \ 0 \ \middle| \ 0 \right\rangle \\
 \mathbf{f}_{y1}(y_1)_{1 \times 4}^T &= [1/b(y_1)] \left\langle \int_{y_1}^{h_1/2} \int_{y_1}^{h_1/2} (1/A_1 - h_1 y_1 / 2I_1) b(y_1) dy_1 dy_1 \ \middle| \ \int_{y_1}^{h_1/2} \int_{y_1}^{h_1/2} (y_1 b(y_1) / I_1) dy_1 dy_1 \ \middle| \ 0 \ \middle| \ 0 \right\rangle \\
 \mathbf{f}_{z2}(y_2)_{1 \times 4}^T &= (1/b) \left\langle -(1/h_2 + 6y_2/h_2^2) \ \middle| \ -12y_2/h_2^3 \ \middle| \ (1/h_2 - 6y_2/h_2^2) \ \middle| \ 12y_2/h_2^3 \right\rangle; \\
 \mathbf{f}_{\tau 2}(y_2)_{1 \times 4}^T &= (1/b) \left\langle 1 - \int_{y_2}^{h_2/2} \left(\frac{1}{h_2} + \frac{6y_2}{h_2^2} \right) dy_2 \ \middle| \ - \int_{y_2}^{h_2/2} \frac{12y_2}{h_2^3} dy_2 \ \middle| \ \int_{y_2}^{h_2/2} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{6y_2}{h_2^2} \right) dy_2 \ \middle| \ \int_{y_2}^{h_2/2} \frac{12y_2}{h_2^3} dy_2 \right\rangle; \\
 \mathbf{f}_{y2}(y_2)_{1 \times 4}^T &= (1/b) \left\langle \int_{y_2}^{h_2/2} dy_2 - \int_{y_2}^{h_2/2} \int_{y_2}^{h_2/2} (1/h_2 + 6y_2/h_2^2) dy_2 dy_2 \ \middle| \ 1 - \int_{y_2}^{h_2/2} \int_{y_2}^{h_2/2} 12y_2/h_2^3 dy_2 dy_2 \ \middle| \dots \right. \\
 &\quad \left. \middle| \ \int_{y_2}^{h_2/2} \int_{y_2}^{h_2/2} (1/h_2 - 6y_2/h_2^2) dy_2 dy_2 \ \middle| \ \int_{y_2}^{h_2/2} \int_{y_2}^{h_2/2} 12y_2/h_2^3 dy_2 dy_2 \right\rangle \\
 \mathbf{f}_{z3}(y_3)_{1 \times 4}^T &= -(1/b) \left\langle 0 \ 0 \ (1/h_3 + 6y_3/h_3^2) \ 12y_3/h_3^3 \right\rangle; \\
 \mathbf{f}_{\tau 3}(y_3)_{1 \times 4}^T &= (1/b) \left\langle 0 \ \middle| \ 0 \ \middle| \ 1 - \int_{y_3}^{h_3/2} (1/h_3 + 6y_3/h_3^2) dy_3 \ \middle| \ - \int_{y_3}^{h_3/2} (12y_3/h_3^3) dy_3 \right\rangle; \\
 \mathbf{f}_{y3}(y_3)_{1 \times 4}^T &= (1/b) \left\langle 0 \ \middle| \ 0 \ \middle| \ \int_{y_3}^{h_3/2} dy_3 - \int_{y_3}^{h_3/2} \int_{y_3}^{h_3/2} (1/h_3 + 6y_3/h_3^2) dy_3 dy_3 \ \middle| \ 1 - \int_{y_3}^{h_3/2} \int_{y_3}^{h_3/2} (12y_3/h_3^3) dy_3 dy_3 \right\rangle
 \end{aligned}$$

Trong đó, hàm ứng suất được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} F_{\tau_1}(y_1, z) &= -\left[1/b(y_1)\right] \int_{y_1}^{h_1/2} y_1 b(y_1) \left\{ \left[Q_1(0) + b \int_0^z \bar{\sigma}_0(z) dz \right] / I_1 \right\} dy_1; \quad F_{y_3}(y_3, z) = 0; \\ F_{y_1}(y_1, z) &= \left[1/b(y_1)\right] \left[b - (b/I_1) \int_{y_1}^{h_1/2} \int_{y_1}^{h_1/2} y_1 b(y_1) dy_1 dy_1 \right] \bar{\sigma}_0(z); \quad F_{y_2}(y_2, z) = 0; \\ F_{\tau_2}(y_2, z) &= -\left[\int_{y_2}^{h_2/2} (y_2/I_2) dy_2 \right] Q_2(0); \quad F_{\tau_3}(y_3, z) = -\left[\int_{y_3}^{h_3/2} (y_3/I_3) dy_3 \right] Q_3(0); \end{aligned} \quad (7a-b)$$

Với $A_2 = bh_2$; $I_2 = bh_2^3/12$; $A_3 = bh_3$; $I_3 = bh_3^3/12$;

2.3. Các phương trình tương thích và các điều kiện biên:

Tổng năng lượng biến dạng bổ sung $U^*(\sigma_z, \sigma_y, \tau)$ được tạo nên từ ứng suất pháp dọc trục, ứng suất pháp theo phương ngang và ứng suất tiếp được biểu diễn như sau:

$$U^* = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \int_L \int_{A_i} \{ \sigma_{zi} \varepsilon_{zi} + \tau_i \gamma_i + \sigma_{yi} \varepsilon_{yi} \} dA_i dz \quad (9)$$

Với mỗi lớp vật liệu, các biến dạng tỷ lệ với ứng suất thông qua định luật Hooke 2D như sau:

$$\varepsilon_{zi} = \sigma_{zi}/E_{zi} - \mu_{zi} \sigma_{yi}/E_{zi} + \alpha_i \Delta T; \quad \gamma_i = \tau_i/G_i; \quad \varepsilon_{yi} = \sigma_{yi}/E_{yi} - \mu_{yi} \sigma_{zi}/E_{yi} + \alpha_i \Delta T; \quad (10a-c)$$

Từ phương trình (10a-c), bằng cách thay vào phương trình (9), và từ phương trình (7a-c) thay thế vào phương trình (9)- sau đó thực hiện phép lấy biến phân với ứng suất và thực hiện các tích phân từng phần, biến phân của năng lượng bù thu được là:

$$\begin{aligned} \delta U^* &= \int_L \delta \mathbf{H}(\mathbf{z})_{1 \times 4}^T \left\{ [\mathbf{a}_5]_{4 \times 4} \mathbf{H}''''(\mathbf{z})_{4 \times 1} + [\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_3]_{4 \times 4} \mathbf{H}''(\mathbf{z})_{4 \times 1} + [\mathbf{a}_1]_{4 \times 4} \mathbf{H}(\mathbf{z})_{4 \times 1} + \mathbf{\eta}_1(z)_{4 \times 1} - \mathbf{\eta}'_2(z)_{4 \times 1} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{\eta}''_3(z)_{4 \times 1} \right\} dz + \delta \mathbf{H}(\mathbf{z})_{1 \times 4}^T \left\{ -[\mathbf{a}_5]_{4 \times 4} \mathbf{H}''''(\mathbf{z})_{4 \times 1} + [\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4]_{4 \times 4} \mathbf{H}'(\mathbf{z})_{4 \times 1} + \{ \mathbf{\eta}_2(z) - \mathbf{\eta}'_3(z) \}_{4 \times 1} \right\} \Big|_0^L + \\ &\quad + \delta \mathbf{H}'(\mathbf{z})_{1 \times 4}^T \left\{ [\mathbf{a}_5]_{4 \times 4} \mathbf{H}''(\mathbf{z})_{4 \times 1} + [\mathbf{a}_4]_{4 \times 4} \mathbf{H}(\mathbf{z})_{4 \times 1} + \{ \mathbf{\eta}_3(z) \}_{4 \times 1} \right\} \Big|_0^L \end{aligned}$$

Bằng cách đặt điều kiện $\delta U^* = 0$, bốn phương trình tương thích thu được là:

$$[\mathbf{a}_5]_{4 \times 4} \mathbf{H}''''(\mathbf{z})_{4 \times 1} + [\mathbf{a}_{243}]_{4 \times 4} \mathbf{H}''(\mathbf{z})_{4 \times 1} + [\mathbf{a}_1]_{4 \times 4} \mathbf{H}(\mathbf{z})_{4 \times 1} + \{ \mathbf{\eta}(z) \}_{4 \times 1} = \{ \mathbf{0} \}_{4 \times 1} \quad (11)$$

Và 16 điều kiện cân bằng tại tọa độ $z=0, L$ được xác định $\mathbf{H}(0)_{1 \times 4}^T = \{ \mathbf{0} \}$, $\mathbf{H}'(0)_{1 \times 4}^T = \{ \mathbf{0} \}$, $\mathbf{H}(L)_{1 \times 4}^T = \langle A(L) \ B(L) \ C(L) \ D(L) \rangle$; $\mathbf{H}'(L)_{1 \times 4}^T = \langle 0 \ B'(L) \ 0 \ D'(L) \rangle$; Trong đó, các ma trận xây dựng nên tính đàn hồi của kết cấu được triển khai:

$$[\mathbf{a}_1]_{4 \times 4} = \sum_{i=1}^3 (1/E_{zi}) \int_{A_i} \left[\mathbf{f}_{zi}(y_i)_{4 \times 1} \mathbf{f}_{zi}(y_i)_{1 \times 4}^T \right] dA_i; \quad [\mathbf{a}_2]_{4 \times 4} = -\sum_{i=1}^3 (\mu_{zi}/E_{zi}) \int_{A_i} \left[\mathbf{f}_{zi}(y_i)_{4 \times 1} \mathbf{f}_{yi}(y_i)_{1 \times 4}^T \right] dA_i;$$

$$[\mathbf{a}_3]_{4 \times 4} = \sum_{i=1}^3 (1/G_i) \int_{A_i} \left[\mathbf{f}_{\tau i}(y_i)_{4 \times 1} \mathbf{f}_{\tau i}(y_i)_{1 \times 4}^T \right] dA_i; \quad [\mathbf{a}_4]_{4 \times 4} = -\sum_{i=1}^3 (\mu_{zi}/E_{zi}) \int_{A_i} \left[\mathbf{f}_{yi}(y_i)_{4 \times 1} \mathbf{f}_{zi}(y_i)_{1 \times 4}^T \right] dA_i;$$

$$[\mathbf{a}_5]_{4 \times 4} = \sum_{i=1}^3 (1/E_{yi}) \int_{A_i} \left[\mathbf{f}_{yi}(y_i)_{4 \times 1} \mathbf{f}_{yi}(y_i)_{1 \times 4}^T \right] dA_i; \quad [\mathbf{a}_{243}]_{4 \times 4} = [\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_3]_{4 \times 4};$$

Thành phần chuyển vị tương đương do năng lượng sinh ra liên quan đến tải trọng và nhiệt độ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \{ \mathbf{\eta}(z) \}_{4 \times 1} &= \{ \mathbf{\eta}_1(z) - \mathbf{\eta}'_2(z) + \mathbf{\eta}''_3(z) \}_{4 \times 1}; \quad \{ \mathbf{\eta}_1(z) \}_{4 \times 1} = \sum_{i=1}^3 (1/E_{zi}) \int_{A_i} \left[\mathbf{f}_{zi}(y_i)_{4 \times 1} F_{zi}(y_i, z) \right] dA_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 (\mu_{zi}/E_{zi}) \int_{A_i} \left[\mathbf{f}_{zi}(y_i)_{4 \times 1} F_{yi}(y_i, z) \right] dA_i + \sum_{i=1}^3 (1/2) \int_{A_i} \mathbf{f}_{zi}(y_i)_{4 \times 1} \alpha_i \Delta T dA_i; \\ \{ \mathbf{\eta}_2(z) \}_{4 \times 1} &= \sum_{i=1}^3 (1/G_i) \int_{A_i} \left[\mathbf{f}_{\tau i}(y_i)_{4 \times 1} F_{\tau i}(y_i, z) \right] dA_i; \quad \{ \mathbf{\eta}_3(z) \}_{4 \times 1} = \sum_{i=1}^3 (1/E_{yi}) \int_{A_i} \left[\mathbf{f}_{yi}(y_i)_{4 \times 1} F_{yi}(y_i, z) \right] dA_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 (\mu_{zi}/E_{zi}) \int_{A_i} \left[\mathbf{f}_{yi}(y_i)_{4 \times 1} F_{zi}(y_i, z) \right] dA_i + \sum_{i=1}^3 (1/2) \int_{A_i} \mathbf{f}_{yi}(y_i)_{4 \times 1} \alpha_i \Delta T dA_i; \end{aligned} \quad (12a-c)$$

Và $A(L) = [N_1(L) - N_1(0)]/b$, $bB(L) = -M_1(L) + M_1(0) + \int_0^L [Q_1(0) + b \int_0^z \bar{\sigma}_0(z) dz] dz + h_1 [N_1(L) - N_1(0)]/2$, $C(L) = [-N_3(L) + N_3(0)]/b$, $bD(L) = M_3(L) - M_3(0) + \int_0^L Q_3(0) dz + h_3 [N_3(L) - N_3(0)]/2$, $B'(L) = [-Q_1(L) + Q_1(0)]/b + \int_0^L \bar{\sigma}_0(z) dz$, $D'(L) = 0$ đã được xác định.

2.4. Công thức sai phân hữu hạn

Kỹ thuật sai phân hữu hạn sẽ chuyển các phương trình vi phân và điều kiện biên thành một tổ hợp các phương trình đại số. Điều này có thể đạt được bằng cách rời rạc các miền thành các điểm, thường được lấy đều (bằng nhau). Các biến $\mathbf{H}(\mathbf{z})_{1 \times 4}^T = \langle A(z) \ B(z) \ C(z) \ D(z) \rangle$ của miền một chiều $0 \leq z \leq L$ được chia thành n đoạn, có khoảng cách như nhau $\Delta = L/n$. Với mỗi điểm $i = 1, 2, \dots, (n+1)$, giá trị của biến $\mathbf{H}(\mathbf{z})_{1 \times 4}^T$ tại điểm $z = z_i$ cho trước được xác định bằng $\mathbf{H}(\mathbf{z}_i)_{1 \times 4}^T = \langle A(z_i) \ B(z_i) \ C(z_i) \ D(z_i) \rangle$. Dựa trên phương pháp sai phân trung tâm tương đương của tác giả LeVeque (2007), đạo hàm bậc hai và bậc bốn của $\mathbf{H}(\mathbf{z})_{1 \times 4}^T$ có thể được biểu diễn thành các biểu thức đại số, tại các điểm lân cận như sau:

$$\mathbf{H}'(\mathbf{z}_i)_{4 \times 1} = \left[-\mathbf{H}(\mathbf{z}_{i-1})_{4 \times 1} + \mathbf{H}(\mathbf{z}_{i+1})_{4 \times 1} \right] / 2\Delta; \quad \mathbf{H}''(\mathbf{z}_i)_{4 \times 1} = \left[\mathbf{H}(\mathbf{z}_{i-1})_{4 \times 1} - 2\mathbf{H}(\mathbf{z}_i)_{4 \times 1} + \mathbf{H}(\mathbf{z}_{i+1})_{4 \times 1} \right] / \Delta^2;$$

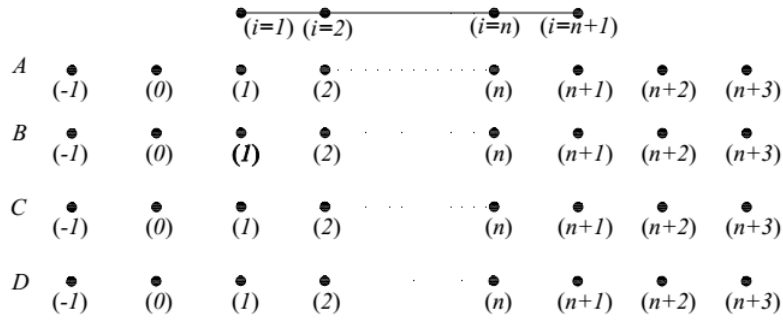
$$\mathbf{H}''''(\mathbf{z}_i)_{4 \times 1} = \left[\mathbf{H}(\mathbf{z}_{i-2})_{4 \times 1} - 4\mathbf{H}(\mathbf{z}_{i-1})_{4 \times 1} + 6\mathbf{H}(\mathbf{z}_i)_{4 \times 1} - 4\mathbf{H}(\mathbf{z}_{i+1})_{4 \times 1} + \mathbf{H}(\mathbf{z}_{i+2})_{4 \times 1} \right] / \Delta^4$$

Do các phương trình điều kiện tương thích trong phương trình (11) kể đến đạo hàm bậc bốn của $\mathbf{H}(\mathbf{z})_{1 \times 4}^T = \langle A(z) \ B(z) \ C(z) \ D(z) \rangle$, dẫn đến mỗi tổ hợp bốn hàm $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ sẽ được rời rạc thành $(n+1)+4$ giá trị chưa biết. Tổng cộng, có $4(n+1)+16$ giá trị rời rạc chưa xác định.

Để xác định các ẩn số này, $4(n+1)+16$ công thức độc lập sẽ được xây dựng dựa trên $4(n+1)$ công thức tương thích rời rạc hóa từ phương trình (11) và 16 điều kiện biên:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{\Delta^4} \mathbf{a}_5 \right]_{4 \times 4} \mathbf{H}(\mathbf{z}_{i-2})_{4 \times 1} + \left[\frac{1}{\Delta^2} \mathbf{a}_{243} - \frac{4}{\Delta^4} \mathbf{a}_5 \right]_{4 \times 4} \mathbf{H}(\mathbf{z}_{i-1})_{4 \times 1} + \left[\mathbf{a}_1 - \frac{2}{\Delta^2} \mathbf{a}_{243} + \frac{6}{\Delta^4} \mathbf{a}_5 \right]_{4 \times 4} \mathbf{H}(\mathbf{z}_i)_{4 \times 1} \\ + \left[\frac{1}{\Delta^2} \mathbf{a}_{243} - \frac{4}{\Delta^4} \mathbf{a}_5 \right]_{4 \times 4} \mathbf{H}(\mathbf{z}_{i+1})_{4 \times 1} + \left[\frac{1}{\Delta^4} \mathbf{a}_5 \right]_{4 \times 4} \mathbf{H}(\mathbf{z}_{i+2})_{4 \times 1} + \{ \boldsymbol{\eta}(z_i) \}_{4 \times 1} = \{ \mathbf{0} \}_{4 \times 1} \\ \mathbf{H}(\mathbf{z}_1)_{4 \times 1} = \{ \mathbf{0} \}_{4 \times 1} \\ -\mathbf{H}(\mathbf{z}_0)_{4 \times 1} + \mathbf{H}(\mathbf{z}_2)_{4 \times 1} = \{ \mathbf{0} \}_{4 \times 1} \\ \mathbf{H}(\mathbf{z}_{n+1})_{4 \times 1} = \mathbf{H}(L)_{4 \times 1} \\ -\mathbf{H}(\mathbf{z}_n)_{4 \times 1} + \mathbf{H}(\mathbf{z}_{n+2})_{4 \times 1} = \mathbf{H}'(L)_{4 \times 1} \end{array} \right. \quad (12)$$

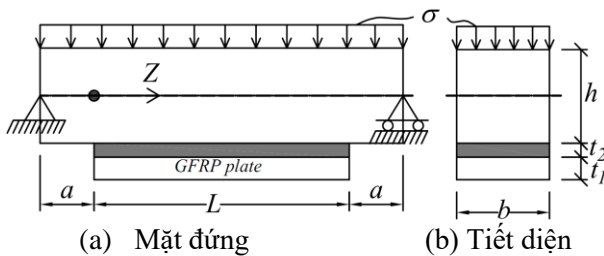
Trong đó $i = 1, 2, \dots, (n+1)$.



Hình 3. Sự phân tách trong phương pháp sai phân hữu hạn.

3. VÍ DỤ MINH HỌA

Mục tiêu của ví dụ tính toán này là đánh giá khả năng của mô hình đã phát triển Dầm gỗ chiều dài 4m, có tiết diện hình chữ nhật đặc ($b \times h = 200 \times 200 \text{mm}$), chịu áp lực có giá trị $\sigma = 0.05 \text{MPa}$ (Hình 4). Dầm được tăng cường bằng 1 tấm GFRP có chiều dày 9,5 mm qua một lớp keo có chiều dày 1mm (trên đoạn chiều dài tăng cường L). Có hai trường hợp $a = 0.5 \text{m}$ và 1.0m được sử dụng trong đánh giá này. Ứng suất tiếp và ứng suất pháp ở bề mặt dính bám dựa trên nghiên cứu hiện tại và lời giải phần tử hữu hạn 3D FEA trên phần mềm thương mại ABAQUS sẽ được so sánh.

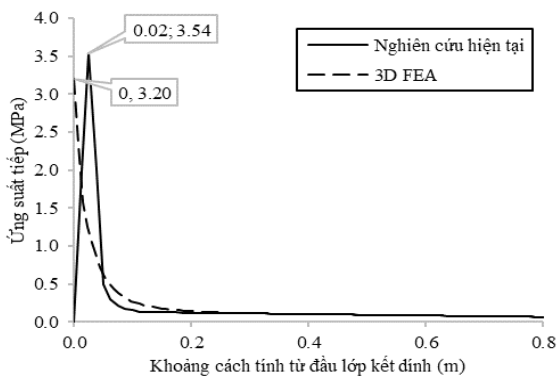


Hình 4. Ví dụ dầm gỗ dán tấm FRP.

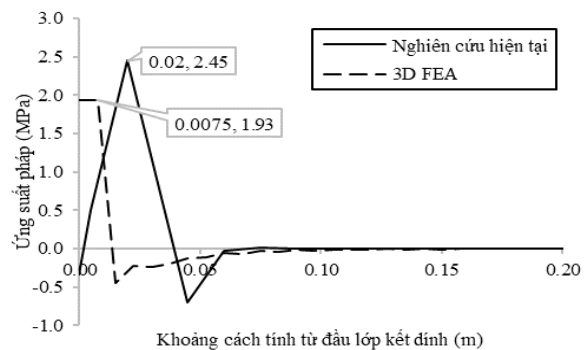
Bảng 1. Đặc tính gỗ, keo, GFRP.

Vật liệu	E_z (GPa)	E_y (GPa)	μ_{zy}	G_{yz} (GPa)
Gỗ	11.4	1.482	0.35	1.243
Keo	3.18	3.18	0.30	1.223
GFRP	19.3	8.873	0.295	2.834

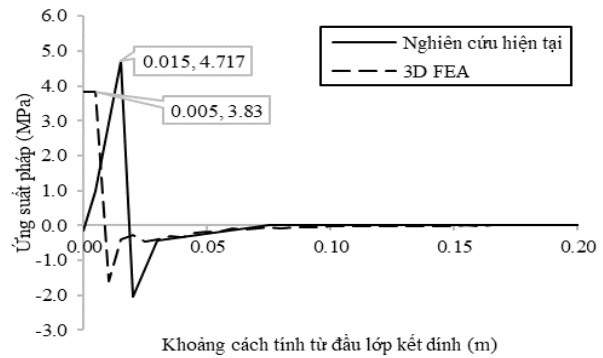
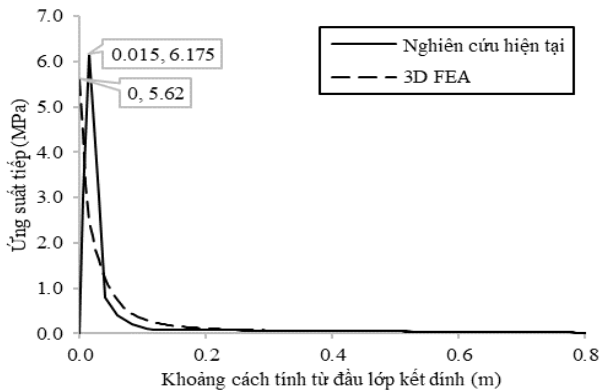
Hình 5



(a) Ứng suất tiếp (MPa), $a=0.5 \text{m}$



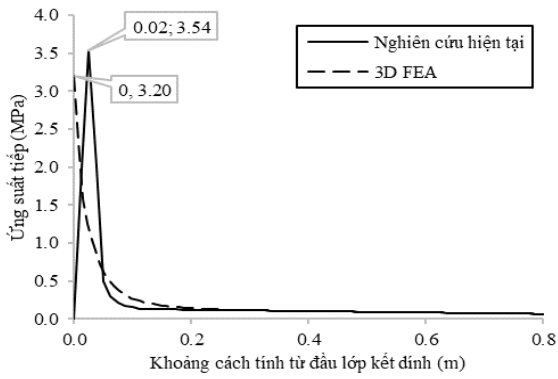
(b) Ứng suất pháp (MPa), $a=0.5 \text{m}$



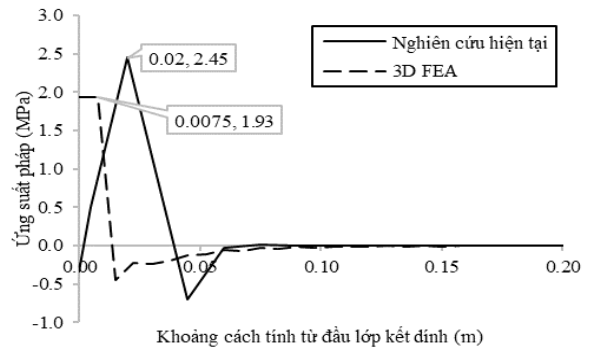
(c) Ứng suất tiếp (MPa), $a=1.0m$

(d) Ứng suất pháp (MPa), $a=1.0m$

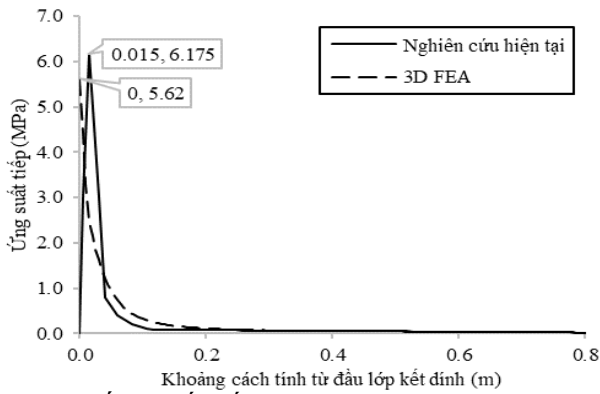
a-d thể hiện ứng suất tiếp và ứng suất pháp trên bề mặt gỗ-chất kết dính dọc theo chiều dài dính bám, được xác định dựa trên nghiên cứu hiện tại và theo lời giải 3D FEA, đối với 2 trường hợp $a = 0.5m$ và $1.0m$. Trong trường hợp $a = 0,5m$, giá trị lớn nhất của ứng suất tiếp và ứng suất pháp theo phương pháp này lần lượt là 3,54 và 2,45 MPa, trong khi kết quả tương ứng trong mô hình 3D FEA lần lượt là 3,20 và 1,93 MPa. Kết quả so sánh cho thấy, giá trị đỉnh của ứng suất tiếp và ứng suất nhỏ nhất trong nghiên cứu này lớn hơn 9,6 và 15,1% so với kết quả từ mô hình 3D FEA. Trong trường hợp $a = 1,0m$, giá trị lớn nhất của ứng suất tiếp và ứng suất pháp theo phương pháp này lần lượt là 6,18 và 4,72 MPa, trong khi kết quả ở mô hình 3D FEA lần lượt là 5,62 và 3,83 MPa, tương ứng với mức chênh lệch là 9,1 và 18,9%. Một số kết luận có thể được rút ra gồm: (1) khi chiều dài tấm GFRP tăng cường L ngắn hơn, giá trị đỉnh của ứng suất tiếp và ứng suất pháp sẽ lớn hơn; (2) Giá trị đỉnh của các ứng suất lớn nhất ở khu vực cuối đoạn dính bám; (3) Nghiên cứu này đưa ra giá trị ứng suất tiếp bằng không ($=0$) tại các điểm cuối đoạn dính bám (ở tọa độ $Z=0$), trong khi mô hình 3D FEA dự đoán giá trị đỉnh ngay tại điểm cuối; Do ở mặt ngoài lớp kết dính, các ứng suất tiếp phải bằng 0 do không có tải trọng ứng suất cắt (shear tractions) tác dụng, nên lời giải 3D FEA bị mất cân bằng ở vị trí này. Vì lời giải 3D FEA là lời giải số- lời giải xấp xỉ dựa trên giả thiết hàm chuyển vị và sự liên tục của biến dạng ở bề mặt biên vật liệu. Sự liên tục về biến dạng, trong khi khác biệt về mô-đun đàn hồi của các vật liệu khác nhau sẽ dẫn đến sự mất cân bằng ứng suất trong mô hình 3D FEA. Để đạt được sự cân bằng xấp xỉ, lưới phần tử hữu hạn phải rất mịn. Tuy nhiên, lưới mịn sẽ tốn nhiều thời gian chạy và thời gian xử lý lưới để loại bỏ các phần tử méo mó, gây nhiễu (distorted elements through a patch test). Ngược lại, lý thuyết hiện tại khắc phục được điểm yếu này dựa trên sự cân bằng ứng suất ở bề mặt biên vật liệu mà không liên quan gì tới lưới phần tử. (4) giá trị đỉnh của các ứng suất được tính theo phương pháp đã trình bày cũng lớn hơn so với kết quả của mô hình 3D FEA. Kết quả mô hình 3D FEA dựa trên nguyên lý năng lượng biến dạng tính sẽ tạo nên độ cứng lớn hơn cho kết cấu, và làm giảm giá trị chuyển vị của các nút.



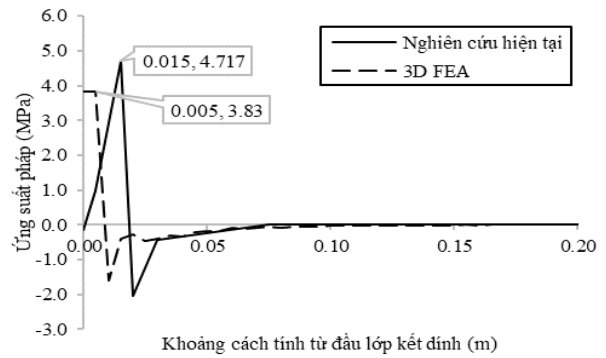
(e) Ứng suất tiếp (MPa), a=0.5m



(f) Ứng suất pháp (MPa), a=0.5m



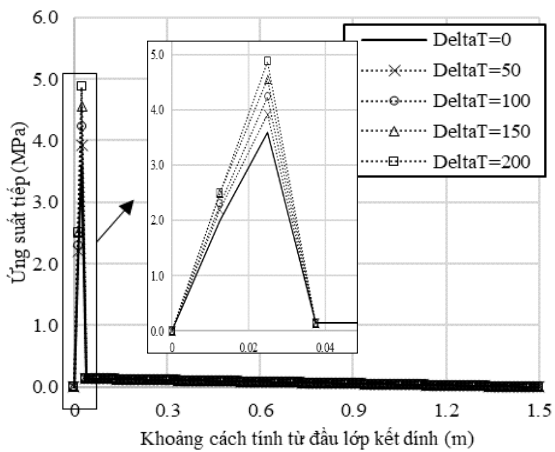
(g) Ứng suất tiếp (MPa), a=1.0m



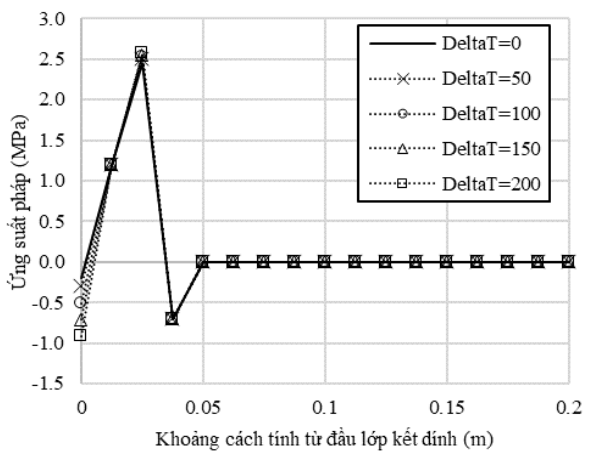
(h) Ứng suất pháp (MPa), a=1.0m

Hình 5. Ứng suất tiếp và ứng suất pháp ở bề mặt lớp dính kết.

Phần tiếp theo sẽ đánh giá sự ảnh hưởng của nhiệt độ tới ứng suất tiếp và ứng suất pháp ở bề mặt liên kết giữa chất kết dính và dầm gỗ. Ở đây, các hệ số dẫn nở nhiệt là $\alpha_{go} = 2.7 \times 10^{-6}$, $\alpha_{GFRP} = 3.7 \times 10^{-6}$, $\alpha_{ad} = 73.8 \times 10^{-6} (1/^\circ C)$. Các số gia nhiệt độ là $\Delta T = 0^\circ C, 50^\circ C, 100^\circ C, 150^\circ C, 200^\circ C$. Hình 6a-b trình bày sự phân bố của ứng suất tiếp và ứng suất pháp ở bề mặt dính bám dựa trên nghiên cứu hiện tại. Ta quan sát được rằng, khi số gia nhiệt độ tăng, đỉnh của ứng suất tiếp cũng tăng. Không giống như ứng suất tiếp, ảnh hưởng của nhiệt độ tới ứng suất pháp quan sát được là không đáng kể.



(a) Ứng suất tiếp, a=0.5m



(b) Ứng suất pháp, a=0.5m

Hình 6. Ảnh hưởng của nhiệt độ thay đổi tới ứng suất ở bề mặt lớp dính kết.

Bảng 2. Ảnh hưởng của sự thay đổi nhiệt độ tới ứng suất tiếp và ứng suất pháp lớn nhất.

ΔT	Ứng suất tiếp		Ứng suất pháp	
	Giá trị (MPa)	% tăng	Giá trị (MPa)	% tăng
0	3.54	0.0	2.45	0.0
50	3.92	10.6	2.51	2.4
100	4.24	19.7	2.53	3.3
150	4.56	28.7	2.55	4.1
200	4.87	37.7	2.57	4.9

Bảng 2 trình bày sự thay đổi của giá trị ứng suất lớn nhất khi số gia nhiệt độ thay đổi từ 0 tới 200°C. Giá trị ứng suất tiếp ở đỉnh là 3.54 MPa với $\Delta T = 0^\circ C$, là 3.92 MPa với $\Delta T = 50^\circ C$, là 4.24 MPa với $\Delta T = 100^\circ C$, là 4.56 MPa với $\Delta T = 150^\circ C$, và là 4.87 MPa với $\Delta T = 200^\circ C$. Giá trị ứng suất tiếp tăng so với khi không có nhiệt độ tương ứng là 10,6; 19,7; 28,7 và 37,7%. Điều này phản ánh giá trị ứng suất tiếp bị ảnh hưởng lớn bởi sự thay đổi của nhiệt độ.

4. KẾT LUẬN

Nghiên cứu hiện tại đã phát triển thành công một mô hình để phân tích ứng suất dầm gia cường tấm dán GFRP. Ứng suất pháp và ứng suất tiếp ở bề mặt lớp kết dính có sự tập trung cao ở đầu lớp kết dính. Nghiên cứu hiện tại thỏa mãn sự cân bằng của ứng suất tiếp ở bề mặt vật liệu, để khắc phục được sự mất bằng của ứng suất này trong các lời giải số xấp xỉ. Khi so sánh với lời giải 3D FEA trong phần mềm ABAQUS, nghiên cứu hiện tại cho kết quả cao hơn một chút. Dựa trên nghiên cứu hiện tại, ảnh hưởng của nhiệt độ tới ứng suất bề mặt lớp kết dính được đánh giá là lớn. Thời gian sử dụng để tính toán đối với một mô hình 3D FEA trong phần mềm ABAQUS là 4,21 giờ trên máy tính. Còn nghiên cứu hiện tại thực hiện trên phần mềm Matlab chỉ tiêu tốn 26 giây trên cùng máy tính đó. Đồng thời, nghiên cứu hiện tại cũng yêu cầu ít công sức để mô phỏng và xử lý kết quả khi so sánh với mô hình 3D FEA.

LỜI CẢM ƠN

Các tác giả chân thành cảm ơn Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tài trợ cho cho nghiên cứu này trong khuôn khổ đề tài mã số B2019- GHA- 01.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] G. Ranzi, A. Zona, A steel-concrete composite beam model with partial interaction including the shear deformability of the steel component, Journal of Eng. Struct., 29 (2007) 3026–3041. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.02.007>
- [2] P. V. Pham, Stress-Deformation Theories for the Analysis of Steel Beams Reinforced with GFRP Plates, Master of Science Thesis, Depart. Civil Eng., University of Ottawa, Canada, 2013. <http://dx.doi.org/10.20381/ruor-3413>
- [3] P. V. Pham, Mohareb, M., Fam, A., Finite element formulation for the analysis of multilayered beams based on the principle of stationary complementary strain energy, J. of Engineering Structures, 167 (2018) 287-307. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.04.014>
- [4] W. Wenwei, L. Guo, Experimental study and analysis of RC beams strengthened with CFRP laminates under sustaining load, Internal journal of solids and structures, 43 (2006) 1372-1387.

<https://doi.org/10.1016/j.ijstr.2005.03.076>

[5] D. Linghoff, M. Al-Emrani, R. Kliger, Performance of steel beams strengthened with CFRP laminate – Part 1: Laboratory tests, Composites: Part B, 41 (2010) 509-515. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2009.05.008>

[6] D. Linghoff, M. Al-Emrani, Performance of steel beams strengthened with CFRP laminate – Part 2: FE analyses, Composites: Part B, 41 (2010) 516-522. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2009.07.002>

[7] R. Xu, Y. Wu, Static, dynamic, and buckling analysis of partial interaction composite members using Timoshenko's beam theory, Int. journal of mechanical sciences, 49 (2007) 1139-1155. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.02.006>

[8] R. Haghani, M. Al Emrani, A new design model for adhesive joints used to bond FRP laminates to steel beams, Part B: Experimental verification, Constr.& Build. Mat., 34 (2012) 686-694. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2011.12.005>

[9] X.-F.Wu, M.ASCE, R.A. Jensen, Semianalytic stress-function variational approach for the interfacial stresses in bonded joints, Journal of Engineering mechanics, 140 (2014) 1-11. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000803](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000803)

[10] X.-F.Wu, Y. Zhao, Stress-function variational method for interfacial stress analysis of adhesively bonded joints, Int. J. of Solids and Structures, 50 (2013) 4305-4319. <https://doi.org/10.1016/j.ijstr.2013.09.002>

[11] X.-F.Wu, R.A. Jensen, Semianalytic stress-function variational approach for the interfacial stresses in bonded joints, Journal of engineering mechanics. 140 (2014) 1-11. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000803](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000803)