



EFFECTIVE ELASTIC PROPERTIES OF LAYERED COMPOSITE WITH PERFECT INTERFACES

Nguyen Dinh Hai^{1,3}, Tran Anh Tuan^{2,3}

¹*Section of Building Materials, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.*

²*Section of Bridge and Tunnel Engineering Department, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.*

³*Research and application center for technology in civil engineering (RACE) - University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.*

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 21/11/2019

Revised: 25/12/2019

Accepted: 3/1/2020

Published online: 16/1/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.5.9>

* *Corresponding author*

Email: nguyendinhhai.1986@utc.edu.vn

Abstract. The paper focuses on the calculation of the effective elastic properties of elastic layered composite where the interfaces between was assumed perfectly smooth. Under perfect interfaces assumption, the displacement vector and the normal component of stress tensor are continuous across the interfaces. To achieve this objective, the homogenization technique of the laminated composite is applied. This technique is based on the partially inversed and reversed behaviour law technique. This allows the determination of the rigidity tensor eventually resulting in the classification of laminate's behaviour. The analytical results obtained for the effective elasticity tensor are compared with the Voigt and the Reuss Limits.

Keywords: Homogenization, layered material, elasticity tensor, perfect interface.



TÍNH CHẤT ĐÀN HỒI HIỆU QUẢ CỦA VẬT LIỆU XẾP LỚP VỚI MẶT PHÂN GIỚI HOÀN HẢO

Nguyễn Đình Hải^{1,3}, Trần Anh Tuấn^{2,3}

¹Bộ môn Vật liệu xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.

²Bộ môn Cầu hầm, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.

³Trung tâm nghiên cứu và ứng dụng công nghệ trong xây dựng (RACE), Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội.

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 21/11/2019

Ngày nhận bài sửa: 25/12/2019

Ngày chấp nhận đăng: 3/1/2020

Ngày xuất bản Online: 16/1/2020

<https://doi.org/10.25073/tcsj.70.5.9>

* Tác giả liên hệ

Email: nguyendinhhai.1986@utc.edu.vn

Tóm tắt. Nghiên cứu này tập trung thực hiện các phép toán nhằm để xác định tensor hệ số đàn hồi hiệu quả của vật tổng hợp xếp lớp với liên kết giữa các lớp là trơn và hoàn hảo. Với giả thuyết liên kết giữa các lớp hoàn hảo cho thấy vector chuyển vị và thành phần pháp tuyến của tensor ứng suất là liên tục khi đi qua mặt phân giới giữa các lớp. Để xác định được tensor hệ số đàn hồi hiệu quả của loại composite này phương pháp đồng nhất hoá vật liệu đa lớp sẽ được áp dụng. Phương pháp này dựa trên kỹ thuật nghịch đảo và đảo ngược từng phần luật ứng xử của vật liệu, nó cho phép xác định tensor hệ số đàn hồi hiệu quả của vật liệu tổng hợp. Nghiệm giải tích của bài toán sẽ được kiểm chứng với các giới hạn Voigt và Reuss.

Từ khóa: Đồng nhất hoá, vật liệu đa lớp, tensor hệ số đàn hồi, mặt phân giới hoàn hảo.

© 2019 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vật liệu xếp lớp là một loại vật liệu đa thành phần được cấu tạo bởi nhiều lớp xếp chồng lên nhau trong không gian [1,5, 9, 10]. Vật liệu xếp lớp được tạo ra với mục đích kết hợp tối đa ưu điểm của từng lớp vật liệu để có được vật liệu tổng hợp có khả năng chịu lực tốt nhất

đáp ứng nhu cầu sử dụng đặt ra. Trên thực tế vật liệu xếp lớp được ứng dụng phổ biến trong lĩnh vực xây dựng nói chung và trong ngành xây dựng công trình giao thông nói riêng. Cụ thể như kết cấu mặt đường, mặt cầu, kết cấu tăng cường dầm trong các công trình cầu đường hay kết cấu vật liệu cách âm cách nhiệt trong xây dựng dân dụng.

Đối với quá trình phân tích kết cấu, trong nhiều trường hợp để đơn giản hoá người ta mong muốn xem xét vật liệu xếp lớp dưới dạng một loại vật liệu đồng nhất và chỉ cần quan tâm đến các tính chất tổng thể (tính chất hiệu quả) của nó. Tính chất tổng thể này phụ thuộc chặt chẽ vào các đặc tính của từng vật liệu thành phần cũng như liên kết giữa các lớp vật liệu. Tính chất hiệu quả của vật liệu xếp lớp có thể được xác định bằng nhiều phương pháp như thí nghiệm, mô phỏng, đồng nhất hoá Trong nghiên cứu này nhóm tác giả sử dụng phương pháp giải tích [1, 3, 7, 10] với các thông số đầu vào là tính chất của vật liệu thành phần, tính chất của liên kết giữa các lớp vật liệu, chiều dày của các lớp vật liệu và phương xếp lớp để xác định tensor hệ số đàn hồi tổng thể của vật liệu xếp lớp. Phương pháp giải tích sử dụng ở đây chính là một phép đồng nhất hoá vật liệu xếp lớp [1, 10] cho phép xác định nghiệm giải tích tường minh tensor hệ số đàn hồi của vật liệu xếp lớp.

2. MÔ TẢ BÀI TOÁN CƠ HỌC – VẬT LIỆU XẾP LỚP

2.1. Bài toán cơ học cục bộ

Xét một vật liệu composite Ω bao gồm ba tấm $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, $\Omega^{(3)}$ được xếp chồng lên nhau thứ tự từ trên xuống dưới theo trục x_3 , chiều dày của 3 lớp lần lượt là h_1 , h_2 , h_3 ; chiều dài và rộng của ba tấm bằng nhau và có giá trị lần lượt là b , a (xem Hình 1).

Các vật liệu cấu thành nên $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$ và $\Omega^{(3)}$ được giả sử là đàn hồi tuyến tính và không đồng nhất theo phương x_3 nhưng đồng nhất theo hai phương x_1 và x_2 . Định luật Hooke tổng quát [7, 10, 11] được viết như sau:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \mathbb{L}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

với $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ lần lượt là tensor biến dạng và tensor ứng suất trong tấm α tại tọa độ \mathbf{x} , $\mathbb{L}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ là tensor hệ số đàn hồi (tensor hệ số đàn hồi) bậc 4 của tấm α , tensor này có đặc tính đối xứng như sau [2, 11]

$$L_{ijkl}^{(\alpha)} = L_{jikl}^{(\alpha)} = L_{klij}^{(\alpha)} \quad (2)$$

Kể từ đây ta qui định các chỉ số i, j, k, l chạy từ 1 đến 3 ứng với ba chiều của không gian, trong khi đó chỉ số α chạy từ 1 đến 3 ứng với ba lớp của vật liệu. Khi các vật liệu cấu thành nên composite là đàn hồi đẳng hướng thì tensor bậc bốn $\mathbb{L}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ có thể biểu diễn dạng ma trận 6x6 thông qua qui ước Voigt [2] như sau:

$$\mathbb{L}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \lambda^{(\alpha)} + 2\mu^{(\alpha)} & \lambda^{(\alpha)} & \lambda^{(\alpha)} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{(\alpha)} & \lambda^{(\alpha)} + 2\mu^{(\alpha)} & \lambda^{(\alpha)} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{(\alpha)} & \lambda^{(\alpha)} & \lambda^{(\alpha)} + 2\mu^{(\alpha)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu^{(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^{(\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^{(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ở dạng tổng quát

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & L_{1133} & \sqrt{2}L_{3323} & \sqrt{2}L_{3313} & \sqrt{2}L_{3312} \\ L_{2211} & L_{2222} & L_{2233} & \sqrt{2}L_{2223} & \sqrt{2}L_{2213} & \sqrt{2}L_{2212} \\ L_{3311} & L_{3322} & L_{3333} & \sqrt{2}L_{3323} & \sqrt{2}L_{3313} & \sqrt{2}L_{3312} \\ \sqrt{2}L_{2311} & \sqrt{2}L_{2322} & \sqrt{2}L_{2333} & 2L_{2323} & 2L_{2313} & 2L_{2312} \\ \sqrt{2}L_{1311} & \sqrt{2}L_{1311} & \sqrt{2}L_{1333} & 2L_{1323} & 2L_{1313} & 2L_{1312} \\ \sqrt{2}L_{1211} & \sqrt{2}L_{1222} & \sqrt{2}L_{1233} & 2L_{1223} & 2L_{1213} & 2L_{1212} \end{bmatrix}$$

Với λ là hệ số Lamé thứ nhất và μ là mô đun cắt của vật liệu chúng có mối liên hệ với mô đun đàn hồi và hệ số Poisson theo các công thức sau:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Tensor biến dạng được xác định thông qua vector chuyển vị $\mathbf{u}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ theo công thức sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) + \nabla^T \mathbf{u}^{(\alpha)}(\mathbf{x})] \quad (3)$$

Phương trình chuyển động được viết như sau:

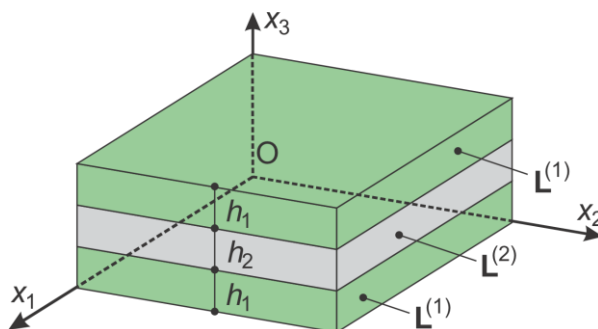
$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4)$$

Gọi $\Gamma^{(1)}$ là mặt phân giới giữa tấm $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, và $\Gamma^{(2)}$ là mặt phân giới giữa tấm $\Omega^{(2)}$, $\Omega^{(3)}$. Giả sử mặt phân giới $\Gamma^{(j)}$ (với $j = 1, 2$) là hoàn hảo thì chuyển vị và thành phần pháp tuyến của tensor ứng suất phải liên tục khi đi qua nó:

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{0}, [\mathbf{u}] = 0 \quad (5)$$

trong trường hợp này vector pháp tuyến đơn vị \mathbf{n} trùng với phương x_3 :

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$



Hình 1. Vật liệu xếp lớp với mặt phân giới hoàn hảo.

2.2. Đồng nhất hoá vật liệu đàn hồi tuyến tính xếp lớp

Hai toán tử chiếu trực giao [1, 3, 4, 6] được định nghĩa như sau:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ và } \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} - \mathbf{N}(\mathbf{x}) \quad (7)$$

với $\mathbf{x} \in \Gamma^{(j)}$ và \mathbf{I} là tensor đơn vị bậc hai, $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ là phép chiếu dọc theo phương vector pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ lên mặt $\Gamma^{(j)}$ và $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ là phép chiếu lên mặt tiếp tuyến với $\Gamma^{(j)}$ tại điểm \mathbf{x} .

Hai toán tử chiếu trong bài toán đàn hồi [3, 4, 6] được xác định như sau:

$$\mathbb{P}^\perp = \mathbf{I} \otimes \mathbf{N}, \mathbb{P}^\parallel = \mathbf{I} \otimes \mathbf{T} \quad (8)$$

với phép tích tensor \otimes được định nghĩa trong công bố [4], hai toán tử chiếu được viết dưới dạng chỉ số như sau:

$$P_{ijkl}^\perp = \frac{1}{2} (n_i \delta_{jk} n_l + n_i \delta_{jl} n_k + n_j \delta_{il} n_l + n_j \delta_{il} n_k) - n_i n_j n_k n_l \quad (9)$$

$$P_{ijkl}^\parallel = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - P_{ijkl}^\perp \quad (10)$$

theo [1], các phép chiếu lên mặt song song và vuông góc với vector pháp tuyến cho ta kết quả sau:

$$\mathbb{P}^\perp : \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{P}^\perp : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (11)$$

$$\mathbb{P}^\parallel : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{P}^\parallel : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (12)$$

từ các phương trình 11 và 12 và 6 ta rút ra

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}(x) \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}(x) \\ \sigma_{31}(x) & \sigma_{32}(x) & \sigma_{33}(x) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x) & \varepsilon_{12}(x) & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21}(x) & \varepsilon_{22}(x) & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Để thuận tiện cho việc tính toán ta chia ma trận độ cứng \mathbf{L} thành 4 ma trận con như sau:

$$\mathbf{C}_{33} = \begin{bmatrix} L_{3333} & \sqrt{2}L_{3332} & \sqrt{2}L_{3331} \\ \sqrt{2}L_{3332} & 2L_{3232} & 2L_{3231} \\ \sqrt{2}L_{3331} & 2L_{3231} & 2L_{3131} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{C}_{31} = \mathbf{C}_{13}^T = \begin{bmatrix} L_{3311} & L_{3322} & \sqrt{2}L_{3312} \\ \sqrt{2}L_{1132} & 2L_{2232} & 2L_{1232} \\ \sqrt{2}L_{1131} & 2L_{2231} & 2L_{1231} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & \sqrt{2}L_{1112} \\ L_{1122} & L_{2222} & \sqrt{2}L_{2212} \\ \sqrt{2}L_{1112} & \sqrt{2}L_{2212} & 2L_{1212} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Khi phương xếp lớp $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_3$, từ các phương trình 11, 12 và 13 ta nhận thấy các thành phần là hằng số của tensor ứng suất và biến dạng là: $\sigma_{11}, \sqrt{2}\sigma_{12}, \sigma_{22}, \varepsilon_{33}, \sqrt{2}\varepsilon_{13}, \sqrt{2}\varepsilon_{23}$. Giải phương trình chuyển động 4, chuyển các thành phần bất biến sang vế trái và sử dụng bốn khối ma trận con theo [1] ta thu được tensor hệ số đàn hồi hiệu quả của vật liệu đa lớp như sau:

$$\mathbf{C}_{33}^* = \langle \mathbf{C}_{33}^{-1} \rangle^{-1}, \quad (17)$$

$$\mathbf{C}_{31}^* = \langle \mathbf{C}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{C}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{31} \rangle, \quad (18)$$

$$\mathbf{C}_{11}^* = \langle \mathbf{C}_{11} - \mathbf{C}_{13} \mathbf{C}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{31} \rangle + \langle \mathbf{C}_{13} \mathbf{C}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{C}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{C}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{31} \rangle \quad (19)$$

với $\langle \blacksquare \rangle$ là phép lấy trung bình theo thể tích.

Khi các vật liệu cấu thành nên Ω là đàn hồi đồng nhất và đẳng hướng trong từng lớp thì

$$\mathbf{C}_{33} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (20)$$

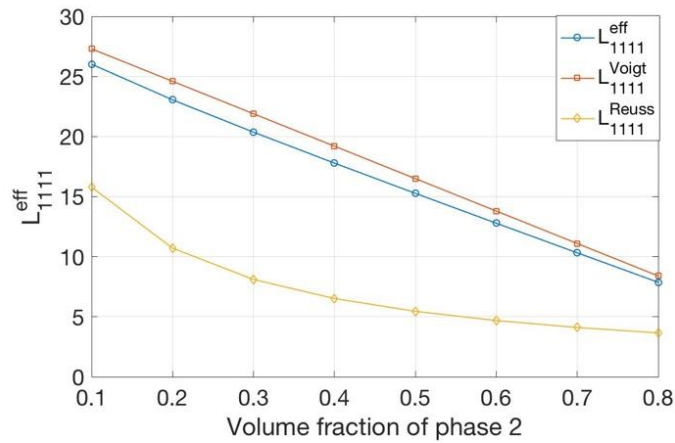
$$\mathbf{C}_{31} = \mathbf{C}_{13} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (22)$$

trong đó các hệ số Lamé thứ nhất λ và hệ số Lamé thứ 2 μ (hay còn gọi là mô đun cắt) có đơn vị là Pa.

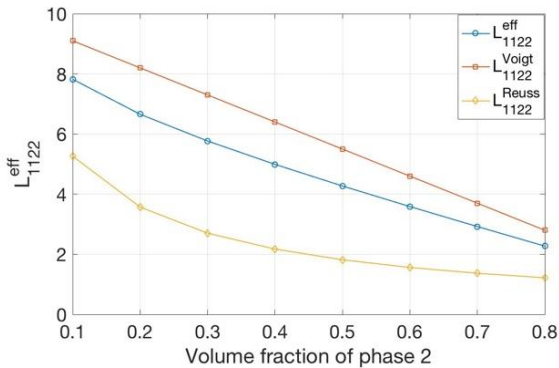
3. KIỂM CHỨNG KẾT QUẢ SỐ GIẢI TÍCH VỚI CÁC BIÊN VOIGT – REUSS

Để minh họa các kết quả giải tích thu được ở công thức 17, 18, 19 ta chọn vật liệu composite được cấu thành bởi 3 lớp vật liệu có ứng xử đàn hồi đẳng hướng, lớp 1 và 3 được cấu thành bởi vật liệu 1 với $\mu^{(1)} = 10, \lambda^{(1)} = 10$; lớp 2 nằm ở giữa với các hệ số $\mu^{(2)} = 1, \lambda^{(2)} = 1$. Giả sử tổng chiều dày của composite là $h = 10$ cm, lớp giữa có chiều dày h_2 biến đổi từ 1 đến 8cm và 2 lớp ngoài cùng có chiều dày như nhau $h_1 = h_3 = (h - h_2)/2$.

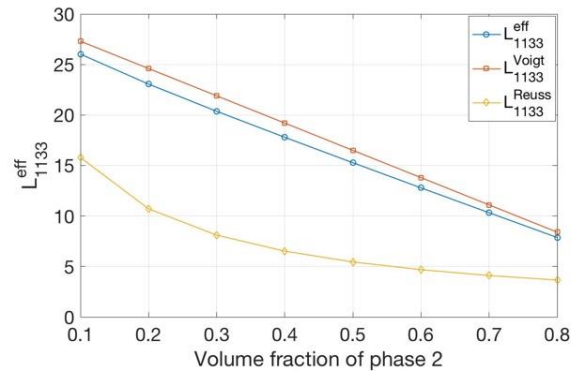


Hình 2. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha 2 đến thành phần L_{1111}^{eff} của tensor hệ số đàn hồi hiệu quả.

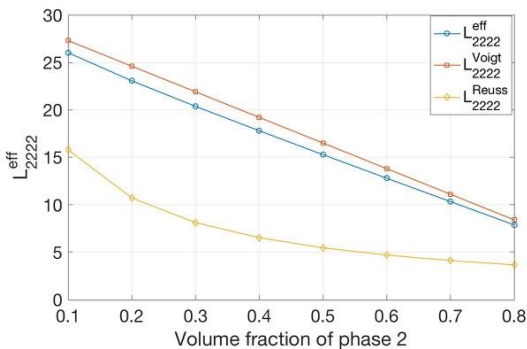
Thay các thông số đàn hồi của vật liệu cấu thành cũng như kích thước của các lớp vào các công thức 17, 18 và 19 cũng như công thức giải tích của biên Voigt – Reuss [2, 8, 10] ta thu được các biểu đồ từ hình 2 đến hình 10 mô tả ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha 2 đến tính đàn hồi hiệu quả của vật liệu composite.



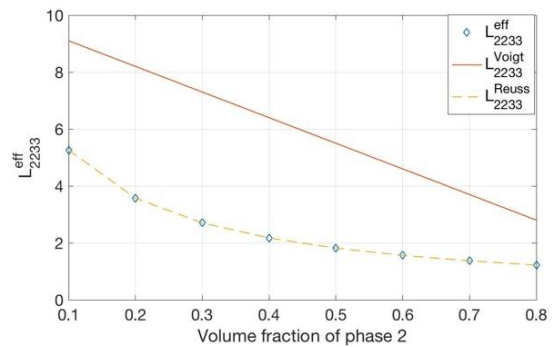
Hình 3. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha 2 đến thành phần L_{1122}^{eff} của tensor hệ số đàn hồi hiệu quả.



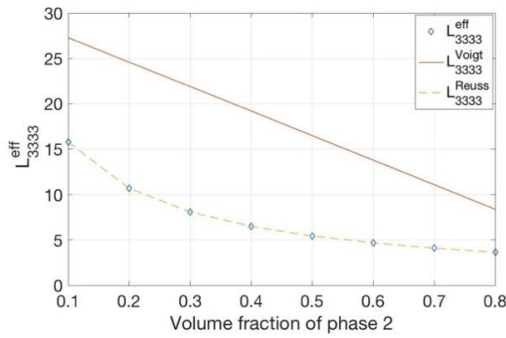
Hình 4. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha 2 đến thành phần L_{1133}^{eff} của tensor hệ số đàn hồi hiệu quả.



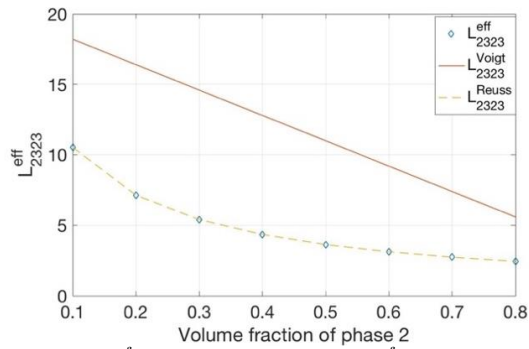
Hình 5. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha 2 đến thành phần L_{2222}^{eff} của tensor hệ số đàn hồi hiệu quả.



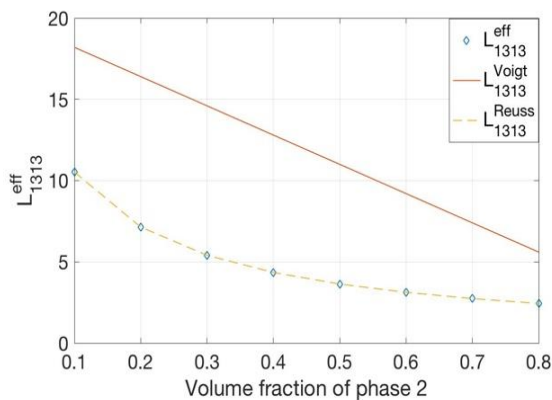
Hình 6. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha 2 đến thành phần L_{2233}^{eff} của tensor hệ số đàn hồi hiệu quả.



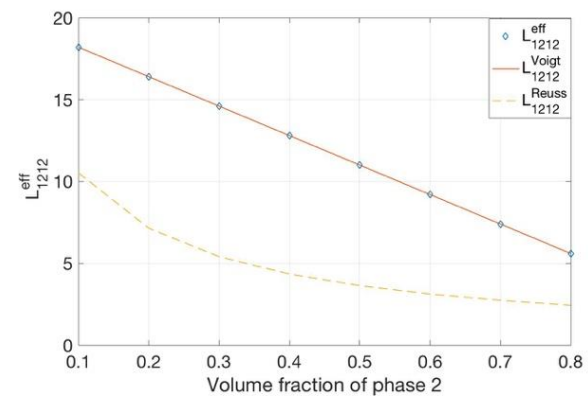
Hình 7. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha 2 đến thành phần L_{3333}^{eff} của tensor hệ số đàn hồi hiệu quả.



Hình 8. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha 2 đến thành phần L_{2323}^{eff} của tensor hệ số đàn hồi hiệu quả.



Hình 9. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha 2 đến thành phần L_{1313}^{eff} của tensor hệ số đàn hồi hiệu quả.



Hình 10. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích pha 2 đến thành phần L_{1212}^{eff} của tensor hệ số đàn hồi hiệu quả.

Các kết quả giải tích thu được bằng phương pháp đồng nhất hoá vật liệu xếp lớp cho thấy các thành phần hiệu quả L_{2323} , L_{3333} , L_{2233} , L_{1313} trùng với biên Reuss cho thấy các thành phần này có thể được tính như lò xo mắc nối tiếp và thành phần L_{1212} trùng với biên Voigt cho thấy thành phần này có thể tính như trường hợp lò xo mắc song song, các giá trị khác của tensor hệ số đàn hồi hiệu quả hoàn toàn nằm trong giới hạn Voigt – Reuss. Việc so sánh các kết quả số thu được với biên Voigt - Reuss đã chứng minh tính đúng của phương pháp đồng nhất hoá. Điều thú vị ở đây là pháp đồng nhất hoá bằng toán giải tích đã chỉ ra rằng khi các lớp vật liệu là đồng nhất đẳng hướng thì vật liệu tổng thể chỉ có ứng xử là đẳng hướng trong mặt phẳng x_1x_2 nhưng bất đẳng hướng theo phương xếp lớp (phương x_3) hay nói cách khác vật liệu tổng thể có tính đàn hồi bất đẳng hướng.

4. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này đã trình bày phương pháp đồng nhất hoá nhằm xác định tính chất đàn hồi hiệu quả của vật liệu xếp lớp bằng giải tích khi mật phân giới giữa các lớp là hoàn hảo. Các kết quả thu được bằng phương pháp này đã được kiểm chứng với biên Voigt - Reuss. Kết quả thu được có thể được áp dụng để dự báo tensor hệ số đàn hồi hiệu quả của các vật liệu xếp lớp dùng trong xây dựng công trình.

Từ kết quả của nghiên cứu này, chúng ta rút ra nhận định rằng mặc dù các lớp vật liệu thành phần là đẳng hướng nhưng tính chất tổng thể của vật liệu xếp lớp lại là bất đẳng hướng. Trong tính toán thiết kế các bộ phận kết cấu công trình dạng xếp lớp người ta thường coi vật liệu là đồng nhất, đẳng hướng và được phân tích theo chiều hướng thiên về an toàn, điều này được chấp nhận ở góc độ kỹ sư thiết kế. Tuy nhiên khi kết cấu công trình xảy ra sự cố hoặc làm việc trong một điều kiện đặc biệt thì ở góc độ nghiên cứu người ta đòi hỏi phải phân tích kết cấu một cách chính xác hơn có kể đến tính bất đẳng hướng. Đây cũng chính là vấn đề cần giải quyết cho các nghiên cứu tiếp theo của loại kết cấu vật liệu xếp lớp sử dụng trong các công trình xây dựng dân dụng cũng như công trình giao thông.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2017.310.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. W. Milton, The theory of composite, Cambridge Monographs on applied and computational mathematics, Cambridge University Press, UK, 2004.
- [2]. BV. Trần, TK. Nguyễn, AT. Trần, ĐH. Nguyễn, Đồng nhất vật liệu nhiều thành phần - Ứng xử tuyến tính, Xuất bản lần 1, Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội, 2019.
- [3]. Q.C. He and Z.Q. Feng, Homogenization of layered elastoplastic composites: Theoretical results, Int. J. Non-linear Mech., 47 (2012) 367-376. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.09.018>
- [4]. Q.C. He and A. Curnier, A more fundamental approach to damaged elastic stress-strain relations, Int. J. Solids Struct.32 (1995) 1433 – 1475. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00183-W](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00183-W)
- [5]. H. Le Quang, D.H. Nguyen, H.T. Le, Q.C. He, Determination of the effective conductive properties of composites with curved oscillating interfaces by a two-scale homogenization procedure. Computational Materials Science, 94 (2014) 150-162. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.03.014>
- [6]. R. Hill, Interfacial operators in the mechanics of composite media, Journal of the Mechanics and Physics of Solids., 31 (1983) 347 – 357. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(83\)90004-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(83)90004-2)
- [7]. P. C. Chou, J. Carleone, C. M. Hsu. Elastic constants of layered media, Journal of computational material, 6 (1972) 80 – 93. <https://doi.org/10.1177/002199837200600107>
- [8]. L. V. Gibiansky, Bounds on the effective moduli of Composite Materials, School on homogenization ICTP., 1 (1993) 6 – 17.
- [9]. D.H. Nguyen, H.T. Le, H. LeQuang, Q.C. He, Determination of the effective conductive properties of composites with curved oscillating interfaces by a two-scale homogenization procedure. Computational Materials Science., 94 (2014) 150-162. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.03.014>
- [10]. D.H. Nguyen, Analyse asymptotique, modélisation micromécanique et simulation numérique des interfaces courbées rugueuses dans des matériaux hétérogènes, PhD Thesis, Université Paris – Est, France, 2014.
- [11]. H. Sadd, Elasticity - Theory, Application and Numerics, Elsevier, USA, 2005.