



RELIABILITY ASSESSMENT AGAINST DERAILMENT AND RETURN LEVELS OF THE DERAILMENT COEFFICIENT USING GEV–BOOTSTRAP FROM COUPLED VEHICLE–TRACK DYNAMIC SIMULATION

Nguyen Duc Tam^{1*}, Mai Tien Chinh², Pham Van Ky²

¹Campus in Ho Chi Minh City, University of Transport and Communications, No. 450- 451 Le Van Viet Street, Ho Chi Minh City, Vietnam

²University of Transport and Communications, No. 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 17/05/2026

Revised: 10/06/2026

Accepted: 12/06/2026

Published online: 15/06/2026

<https://doi.org/10.47869/tcsj.77.5.1>

* *Corresponding author*

Email: tamnd_ph@utc.edu.vn; Tel: +84983845154

Abstract. Reliability assessment against derailment is an important issue in vehicle–track dynamic analysis, especially when the response of the derailment coefficient is affected by random forward track irregularity. This paper proposes a reliability assessment framework against derailment for the derailment coefficient Y/Q by combining coupled vehicle–track dynamic simulation, the Generalized Extreme Value distribution, and Bootstrap. The data were generated from 150 simulation scenarios of loaded type-G freight wagons running through a representative curve on the North–South railway line. The maximum value of Y/Q in each scenario was extracted to construct a block-maxima sample for distribution fitting, derailment probability estimation, reliability assessment, and determination of the return level z_T . The results show that the Gumbel distribution was selected as the central model for engineering interpretation. The derailment probability corresponding to the threshold $[Y/Q]_{\text{lim}} = 1.2$ is very small, indicating that the reliability is approximately equal to 1. At the longest cycle, $T = 54000$ train passages, z_T reaches 0.439 for the GEV model and 0.470 for the Gumbel model, which are substantially lower than the assessment threshold. The results confirm the applicability of the GEV–Bootstrap framework in reliability assessment against derailment.

Keywords: derailment coefficient; Extreme Value Theory; GEV distribution; Bootstrap; dynamic simulation; reliability against derailment.



ĐÁNH GIÁ ĐỘ TIN CẬY AN TOÀN CHỐNG TRẬT BÁNH VÀ MỨC CỰC TRỊ CHU KỲ CỦA HỆ SỐ TRẬT BÁNH BẰNG GEV–BOOTSTRAP TỪ MÔ PHỎNG ĐỘNG LỰC HỌC NGẪU HỢP PHƯƠNG TIỆN–ĐƯỜNG RAY

Nguyễn Đức Tâm^{1*}, Mai Tiến Chinh², Phạm Văn Ký²

¹Phân hiệu tại Thành phố Hồ Chí Minh, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 450-451 Lê Văn Việt, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

²Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 17/05/2026

Ngày nhận bài sửa: 10/06/2026

Ngày chấp nhận đăng: 12/06/2026

Ngày xuất bản Online: 15/06/2026

<https://doi.org/10.47869/tcsj.77.5.1>

* Tác giả liên hệ

Email: tamnd_ph@utc.edu.vn; Tel: +84983845154

Tóm tắt. Đánh giá độ tin cậy an toàn chống trật bánh là nội dung quan trọng trong phân tích động lực học phương tiện–đường ray khi đáp ứng của hệ số trật bánh chịu ảnh hưởng của độ không phẳng thuận ngẫu nhiên của đường ray. Bài báo đề xuất khung đánh giá độ tin cậy an toàn chống trật bánh cho hệ số trật bánh Y/Q trên cơ sở kết hợp mô phỏng động lực học ngẫu hợp phương tiện–đường ray, phân phối giá trị cực trị tổng quát GEV và Bootstrap. Dữ liệu được xây dựng từ 150 kịch bản mô phỏng đoàn tàu hàng loại G chạy qua một đường cong điển hình trên tuyến đường sắt Thống Nhất. Giá trị cực đại của Y/Q trong mỗi kịch bản được trích xuất để tạo mẫu cực trị khối, phục vụ khớp phân phối, ước lượng xác suất trật bánh, đánh giá độ tin cậy và xác định mức cực trị chu kỳ z_T . Kết quả cho thấy Gumbel được lựa chọn làm mô hình trung tâm để diễn giải kỹ thuật. Xác suất trật bánh ứng với ngưỡng $[Y/Q]_{lim} = 1,2$ là rất nhỏ, tương ứng độ tin cậy xấp xỉ bằng 1. Tại chu kỳ dài nhất $T = 54000$ lượt tàu, z_T đạt 0,439 theo GEV và 0,470 theo Gumbel, thấp hơn đáng kể so với ngưỡng đánh giá. Kết quả khẳng định khả năng ứng dụng của khung GEV–Bootstrap trong đánh giá độ tin cậy an toàn chống trật bánh.

Từ khóa: hệ số trật bánh; lý thuyết giá trị cực trị; phân phối GEV; Bootstrap; mô phỏng động lực học; độ tin cậy an toàn chống trật bánh.

@ 2026 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

An toàn chống trật bánh là một trong những nội dung quan trọng trong nghiên cứu động lực học ngẫu hợp phương tiện–đường ray. Trong quá trình tàu chạy, lực tương tác bánh xe–ray biến thiên dưới tác động của độ không phẳng thuận của đường ray, vận tốc, tải trọng trục, điều kiện hình học tuyến và trạng thái tiếp xúc bánh–ray. Trong các chỉ tiêu đánh giá an toàn chạy tàu, hệ số trật bánh Y/Q , được xác định bởi tỷ số giữa lực ngang Y và lực đứng Q tại tiếp xúc bánh–ray, thường được sử dụng để phản ánh xu hướng mất ổn định tiếp xúc và nguy cơ leo bánh [1, 2].

Trong nhiều bài toán kiểm tra động lực học, cách đánh giá phổ biến là so sánh giá trị lớn nhất của Y/Q thu được từ mô phỏng hoặc thử nghiệm với một ngưỡng giới hạn cho trước. Cách tiếp cận này đơn giản và trực quan, nhưng chủ yếu phản ánh kết quả của một hoặc một số kịch bản cụ thể. Trong thực tế, đáp ứng Y/Q có tính biến động do ảnh hưởng của độ không phẳng thuận của đường ray, điều kiện vận hành và trạng thái động lực học của hệ phương tiện–đường ray. Vì vậy, bài toán đánh giá an toàn cần được mở rộng từ cách tiếp cận tất định sang cách tiếp cận xác suất và độ tin cậy, trong đó đại lượng cần quan tâm không chỉ là giá trị cực đại của Y/Q , mà còn là xác suất trật bánh và độ tin cậy an toàn chống trật bánh tương ứng.

Mô phỏng động lực học ngẫu hợp phương tiện–đường ray là công cụ quan trọng để tạo dữ liệu đầu vào cho phân tích xác suất và độ tin cậy. Các mô hình động lực học đa vật thể và mô hình ghép phương tiện–đường ray cho phép xác định lịch sử lực ngang Y , lực đứng Q và hệ số trật bánh Y/Q theo thời gian hoặc theo tọa độ dọc tuyến dưới tác động của độ không phẳng thuận của đường ray [2-6]. Trong nghiên cứu này, mô phỏng động lực học được sử dụng để tạo ra các lịch sử đáp ứng Y/Q ; sau đó, giá trị cực đại trong mỗi lượt mô phỏng được trích xuất để xây dựng mẫu dữ liệu cực trị phục vụ phân tích xác suất và độ tin cậy an toàn chống trật bánh.

Lý thuyết giá trị cực trị (Extreme Value Theory – EVT) là hướng tiếp cận phù hợp cho các bài toán liên quan đến vùng đuôi phân phối và các sự kiện hiếm. Trong lĩnh vực đường sắt, EVT đã được sử dụng để phân tích hệ số trật bánh, cực trị lực bánh–ray, phát hiện bất thường bánh xe và kiểm tra trạng thái đường ray [7-10]. Trong nghiên cứu này, phương pháp cực trị khối được lựa chọn vì dữ liệu mô phỏng có cấu trúc khối tự nhiên: mỗi lượt mô phỏng động lực học được xem là một khối, từ đó giá trị cực đại của hệ số trật bánh được trích xuất để tạo thành mẫu cực trị. Cách tiếp cận này phù hợp với phân phối giá trị cực trị tổng quát (Generalized Extreme Value – GEV), đồng thời hạn chế việc sử dụng trực tiếp nhiều điểm dữ liệu có phụ thuộc mạnh trong cùng một lịch sử đáp ứng.

Do số lượng kịch bản mô phỏng thường bị giới hạn bởi chi phí tính toán, các tham số phân phối, xác suất trật bánh, độ tin cậy an toàn chống trật bánh và mức cực trị ngoại suy có thể chứa bất định thống kê. Vì vậy, Bootstrap được sử dụng để lượng hóa bất định thông qua việc xây dựng khoảng tin cậy cho các đại lượng ước lượng, gồm tham số GEV, xác suất trật bánh, độ tin cậy an toàn chống trật bánh và mức cực trị chu kỳ [11-15]. Bên cạnh đó, mức cực trị chu kỳ có thể được diễn giải theo số lượt tàu trong một chu kỳ khai thác hoặc bảo dưỡng, qua đó liên hệ kết quả thống kê cực trị với bài toán quản lý an toàn và bảo trì dựa trên rủi ro [16, 17].

Trên cơ sở đó, trong nghiên cứu này, nhóm tác giả xây dựng khung đánh giá độ tin cậy an toàn chống trật bánh cho hệ số trật bánh Y/Q dựa trên mô hình GEV kết hợp Bootstrap. Các giá trị cực đại của Y/Q được trích xuất theo từng lượt mô phỏng động lực học ngẫu hợp phương tiện–đường ray và được xem là mẫu cực trị khối. Từ mẫu dữ liệu này, nghiên cứu ước

lượng xác suất để Y/Q vượt ngưỡng an toàn chống trật bánh, xác định độ tin cậy an toàn chống trật bánh tương ứng, đồng thời xác định mức cực trị ứng với chu kỳ bảo dưỡng. Khung phương pháp đề xuất cho phép chuyển bài toán đánh giá an toàn chống trật bánh từ cách tiếp cận tất định dựa trên giá trị cực đại sang cách tiếp cận xác suất–độ tin cậy có xét đến bất định thống kê.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Dữ liệu mô phỏng và mẫu cực trị khối của hệ số trật bánh

Trong nghiên cứu này, dữ liệu đầu vào cho phân tích xác suất – độ tin cậy được tạo ra từ mô phỏng động lực học phương tiện–đường ray. Các mô hình động lực học đa vật thể và mô hình ngẫu hợp phương tiện–đường ray đã được sử dụng rộng rãi trong thiết kế, đánh giá an toàn, chấp thuận phương tiện và phân tích vận hành đường sắt [2-4]. Đối với bài toán an toàn chống trật bánh, mô hình cần cung cấp được lịch sử lực ngang bánh–ray Y , lực đứng bánh–ray Q , từ đó xác định hệ số trật bánh:

$$\eta(s) = \frac{Y(s)}{Q(s)} \quad (1)$$

trong đó s là tọa độ dọc tuyến. Các mô hình ghép phương tiện–đường ray cho phép xét đồng thời dao động của phương tiện, kết cấu đường ray, độ không phẳng thuận của đường ray và tương tác bánh–ray, do đó phù hợp để tạo dữ liệu đầu vào cho đánh giá xác suất các chỉ tiêu an toàn chạy tàu [5, 6].

Trong mô hình mô phỏng, hệ phương tiện–đường ray được xem là hệ động lực học ngẫu hợp, trong đó dao động của đoàn tàu, kết cấu đường ray và tương tác bánh–ray được xét đồng thời dưới tác động của độ không phẳng thuận ngẫu nhiên của đường ray. Tương tác bánh–ray được mô tả thông qua bài toán tiếp xúc giữa biên dạng bánh xe và biên dạng ray; lực pháp tuyến được xác định theo quan hệ tiếp xúc phi tuyến Hertz. Hệ phương trình động lực học được giải trong miền thời gian bằng phương pháp tích phân tường minh Zhai [6], kết hợp lặp tương tác tại từng bước thời gian để xác định lịch sử lực ngang Y , lực đứng Q và hệ số trật bánh Y/Q .

Nếu xét đồng thời nhiều bánh xe, hệ số trật bánh của bánh xe thứ j trong lượt mô phỏng thứ i được ký hiệu là:

$$\eta_{i,j}(s) = \left(\frac{Y}{Q} \right)_{i,j}(s) \quad (2)$$

Để phục vụ phân tích cực trị, mỗi lượt mô phỏng được xem là một khối dữ liệu. Giá trị đại diện cho khối thứ i là cực đại của hệ số trật bánh trong toàn bộ đoạn khảo sát và trên các bánh xe được xét:

$$Z_i = \max_{s,j} \eta_{i,j}(s) \quad (3)$$

Với n lượt mô phỏng, tập dữ liệu cực trị khối được viết:

$$\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\} \quad (4)$$

2.2. Mô hình GEV và độ tin cậy an toàn chống trật bánh

Theo định lý Fisher–Tippett–Gnedenko trong lý thuyết giá trị cực trị, nếu tồn tại phân phối

giới hạn không suy biến của các giá trị cực đại khối sau khi chuẩn hóa, thì phân phối giới hạn đó thuộc họ phân phối giá trị cực trị tổng quát [18-20]. Vì vậy, trong tiếp cận cực trị khối, các giá trị lớn nhất được trích xuất từ từng khối dữ liệu thường được mô hình hóa bằng phân phối GEV. Hàm phân phối tích lũy của GEV được viết dưới dạng:

$$G(z) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\} \quad (5)$$

với điều kiện:

$$1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) > 0 \quad (6)$$

trong đó μ là tham số vị trí; σ là tham số tỷ lệ và ξ là tham số hình dạng. Tham số ξ quyết định đặc trưng đuôi của phân phối cực trị: $\xi < 0$ tương ứng với trường hợp có giới hạn trên hữu hạn; $\xi = 0$ tương ứng với họ Gumbel; và $\xi > 0$ tương ứng với họ Fréchet. Khi $\xi \rightarrow 0$, GEV tiến tới phân phối Gumbel:

$$G(z) = \exp \left[- \exp \left(- \frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right] \quad (7)$$

Trong bài toán đánh giá an toàn chống trật bánh, gọi $[Y/Q]_{\text{lim}}$ là ngưỡng an toàn chống trật bánh. Xác suất để cực đại khối của hệ số trật bánh vượt ngưỡng an toàn chống trật bánh (xác suất trật bánh) được xác định bởi:

$$P_f = P(Z > [Y/Q]_{\text{lim}}) \quad (8)$$

Sau khi khớp phân phối GEV cho mẫu cực trị, xác suất trật bánh được ước lượng theo:

$$\hat{P}_f = 1 - \hat{G}([Y/Q]_{\text{lim}}) \quad (9)$$

Đại lượng \hat{P}_f phản ánh khả năng cực đại khối của hệ số trật bánh vượt quá ngưỡng an toàn chống trật bánh trong một lượt mô phỏng hoặc một lượt tàu chạy. Trên cơ sở đó, độ tin cậy an toàn chống trật bánh được xác định là xác suất để cực đại khối của hệ số trật bánh không vượt quá ngưỡng an toàn chống trật bánh:

$$R = 1 - P_f = P(Z \leq [Y/Q]_{\text{lim}}) \quad (10)$$

Như vậy, xác suất trật bánh P_f và độ tin cậy an toàn chống trật bánh R là hai đại lượng bù nhau. Trong đó, P_f cho biết xác suất trật bánh theo ngưỡng đánh giá đã chọn, còn R phản ánh xác suất duy trì trạng thái an toàn theo tiêu chí trật bánh. Cách diễn giải này cho phép chuyển kết quả phân tích cực trị từ dạng xác suất trật bánh sang dạng độ tin cậy an toàn chống trật bánh, phù hợp hơn với mục tiêu đánh giá an toàn kỹ thuật của nghiên cứu.

Trong trường hợp phân phối GEV có $\xi < 0$, mô hình tồn tại giới hạn trên hữu hạn. Khi đó, nếu ngưỡng $[Y/Q]_{\text{lim}}$ lớn hơn giới hạn trên của phân phối đã khớp, xác suất trật bánh theo mô hình được ước lượng ở mức tiệm cận 0 hoặc không đáng kể, tương ứng với độ tin cậy an toàn chống trật bánh xấp xỉ bằng 1. Ngược lại, khi sử dụng mô hình không bị chặn trên như Gumbel, xác suất trật bánh vẫn có thể được tính trực tiếp từ hàm phân phối đã khớp, từ đó suy ra độ tin cậy an toàn chống trật bánh tương ứng. Cách tiếp cận này giúp đánh giá đồng thời

ảnh hưởng của dạng đuôi phân phối đến xác suất trật bánh và độ tin cậy của hệ phương tiện—đường ray.

2.3. Mức cực trị chu kỳ của hệ số trật bánh

Bên cạnh độ tin cậy an toàn chống trật bánh, nghiên cứu còn xác định mức cực trị chu kỳ của hệ số trật bánh. Đại lượng này được ký hiệu là z_T , trong đó T là số lượt tàu chạy trong một chu kỳ khai thác, bảo dưỡng hoặc sửa chữa. Về mặt xác suất cực trị, z_T được hiểu là mức hệ số trật bánh có xác suất bị vượt trung bình khoảng một lần trong T lượt tàu chạy:

$$P(Z > z_T) = \frac{1}{T} \quad (11)$$

Từ đó, mức cực trị chu kỳ được xác định theo hàm phân vị của phân phối GEV đã khớp:

$$z_T = G^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right) \quad (12)$$

Trong ngữ cảnh kỹ thuật đường sắt, nếu T được lựa chọn tương ứng với số lượt tàu trong một chu kỳ bảo dưỡng hoặc sửa chữa, thì z_T cho phép diễn giải mức bất lợi của hệ số trật bánh có thể xuất hiện trong chu kỳ đó. Khi z_T nhỏ hơn ngưỡng an toàn chống trật bánh $[Y/Q]_{\text{lim}}$ thì mức cực trị dự báo trong chu kỳ khảo sát vẫn nằm trong vùng an toàn theo tiêu chí trật bánh được lựa chọn:

$$z_T \leq [Y/Q]_{\text{lim}} \quad (13)$$

Ngược lại, nếu z_T vượt ngưỡng $[Y/Q]_{\text{lim}}$, trạng thái khảo sát cần được xem xét thêm trong đánh giá rủi ro, kiểm tra động lực học và định hướng bảo dưỡng. Do đó, việc xác định z_T giúp chuyên kết quả phân tích cực trị từ dạng xác suất đơn lẻ sang dạng chỉ tiêu có ý nghĩa trực tiếp đối với quản lý khai thác và bảo trì hạ tầng đường sắt [16, 17].

Trong nghiên cứu này, chuỗi giá trị T được lựa chọn theo các mốc bảo dưỡng, sửa chữa của hạ tầng đường sắt. Nhờ đó, kết quả z_T không chỉ phản ánh mức cực trị của hệ số trật bánh theo mô hình xác suất, mà còn cung cấp cơ sở định lượng để so sánh với ngưỡng an toàn chống trật bánh trong từng chu kỳ khai thác cụ thể.

2.4. Bootstrap cho khoảng tin cậy của các đại lượng ước lượng

Do số lượng kịch bản mô phỏng động lực học thường bị giới hạn bởi chi phí tính toán, mẫu cực trị khó có thể có kích thước không lớn. Khi đó, các tham số GEV, xác suất trật bánh P_f , độ tin cậy an toàn chống trật bánh R và mức cực trị chu kỳ z_T đều chứa bất định thống kê. Để lượng hóa bất định này, nghiên cứu sử dụng Bootstrap tham số nhằm xây dựng khoảng tin cậy cho các đại lượng ước lượng [11-15].

Trước hết, phân phối GEV được khớp cho mẫu cực trị ban đầu:

$$\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\} \quad (14)$$

và thu được bộ tham số ước lượng:

$$\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}) \quad (15)$$

Từ phân phối GEV đã khớp, mẫu Bootstrap thứ b được sinh ngẫu nhiên với cùng kích thước mẫu ban đầu:

$$\mathbf{Z}^{*b} = \{Z_1^{*(b)}, Z_2^{*(b)}, \dots, Z_n^{*(b)}\} \sim GEV(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}) \quad (16)$$

với $b = 1, 2, \dots, B$, trong đó B là số lần lặp Bootstrap. Với mỗi mẫu Bootstrap, phân phối GEV được khớp lại để thu được bộ tham số $\hat{\theta}^{*(b)}$. Sau đó, xác suất trật bánh, độ tin cậy an toàn chống trật bánh và mức cực trị chu kỳ được tính lại tương ứng:

$$\hat{P}_f^{*(b)} = 1 - \hat{G}^{*(b)}([Y/Q]_{\text{lim}}) \quad (17)$$

$$\hat{R} = 1 - \hat{P}_f^{*(b)} \quad (18)$$

$$z_T^{*(b)} = (\hat{G}^{*(b)})^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right) \quad (19)$$

Sau B lần lặp, khoảng tin cậy 95% của các đại lượng ước lượng được xác định từ các phân vị 2,5% và 97,5% của tập kết quả Bootstrap:

$$CI_{95\%}(P_f) = [Q_{2,5\%}(\hat{P}_f^*), Q_{97,5\%}(\hat{P}_f^*)] \quad (20)$$

$$CI_{95\%}(R) = [Q_{2,5\%}(\hat{R}_f^*), Q_{97,5\%}(\hat{R}_f^*)] \quad (21)$$

$$CI_{95\%}(z_T) = [Q_{2,5\%}(\hat{z}_T^*), Q_{97,5\%}(\hat{z}_T^*)] \quad (22)$$

Như vậy, kết quả đánh giá không chỉ gồm các giá trị ước lượng điểm mà còn có khoảng tin cậy phản ánh bất định thống kê của mẫu mô phỏng. Quy trình Bootstrap cho phép kết nối dữ liệu mô phỏng động lực học với mô hình xác suất cực trị, phục vụ đồng thời ba mục tiêu: ước lượng xác suất trật bánh, đánh giá độ tin cậy an toàn chống trật bánh và xác định mức cực trị chu kỳ của hệ số trật bánh.

3. TRƯỜNG HỢP NGHIÊN CỨU VÀ XÂY DỰNG DỮ LIỆU PHÂN TÍCH

Để minh họa cho khung phương pháp GEV–Bootstrap đề xuất, nghiên cứu lựa chọn một đường cong điển hình tại lý trình Km1708+405,035 trên tuyến đường sắt Thống Nhất Bắc–Nam. Các thông số đầu vào của bài toán áp dụng gồm thông số hình học đường cong, thông số toa xe khảo sát, điều kiện vận hành, số mẫu mô phỏng và ngưỡng giới hạn an toàn chống trật bánh. Các thông số hình học của đường cong và thông số chính của toa xe được tổng hợp lần lượt trong Bảng 1 và Bảng 2.

Bảng 1. Thông số hình học của đường cong khảo sát.

<i>Stt</i>	<i>Tham số</i>	<i>Giá trị</i>
1	Khổ đường	1000 mm
2	Lý trình	Km1708+405,035
3	Bán kính đường cong R	450 m
4	Chiều dài đường cong hòa hoãn	40 m
5	Góc chuyển hướng	13°31'30"
6	Loại ray	P50
7	Tà vệt	Bê tông ĐƯỠ liên khối
8	Siêu cao (tỉ lệ vượt siêu cao)	75 mm (1 ‰)

<i>Stt</i>	<i>Tham số</i>	<i>Giá trị</i>
9	Gia khoan (tỉ lệ vượt gia khoan)	5 mm (1 ‰)
10	Độ dốc dọc	2,2 ‰

Bảng 2. Thông số chính của toa xe khảo sát.

<i>Stt</i>	<i>Thông số kỹ thuật</i>	<i>Giá trị</i>
1	Loại toa xe	Toa xe hàng loại G
2	Trạng thái tải	Đầy tải
3	Khối lượng toa xe	52500 kg
4	Khối lượng thùng xe	47028 kg
5	Khoảng cách tâm 2 cối chuyển hướng	10,7 m
6	Chiều dài toa xe	15 m
7	Chiều dài móc nối	0,453 m
8	Số trục/toa	4

Trong bài toán áp dụng, đoàn tàu gồm 15 toa xe hàng loại G ở trạng thái đầy tải, chuyển động với vận tốc $V = 70$ km/h trên đoạn đường cong khảo sát theo chiều lên dốc. Trong mô hình mô phỏng, kết cấu đường ray được mô hình hóa theo sơ đồ hai lớp, trong đó ray được mô hình hóa như dầm Bernoulli–Euler tựa trên các gối đỡ đàn hồi rời rạc, tương ứng với hệ tà vẹt đỡ ray. Toa xe hàng loại G được mô hình hóa như một hệ đa vật thể gồm 39 bậc tự do được nhóm tác giả phát triển nhằm mô phỏng động lực học ngẫu hợp phương tiện–đường ray đối với điều kiện khai thác của đường sắt quốc gia Việt Nam. Hệ phương trình động lực học ngẫu hợp phương tiện–đường ray được giải trong môi trường MATLAB bằng phương pháp tích phân tường minh Zhai, kết hợp lặp tương tác giữa phân hệ phương tiện và phân hệ đường ray tại từng bước thời gian. Trong mô hình tiếp xúc bánh–ray, biên dạng ray được khai báo theo ray P50, phù hợp với thông số đường ray của đoạn khảo sát; biên dạng bánh xe được sử dụng là biên dạng tương ứng với toa xe hàng loại G trong mô hình mô phỏng. Việc khai báo cặp biên dạng bánh–ray là cơ sở để xác định hình học tiếp xúc và tính toán lực tương tác bánh xe–ray trong mô hình động lực học. Độ không phẳng thuận ngẫu nhiên của đường ray được sử dụng làm kích thích đầu vào của mô hình động lực học. Độ không phẳng thuận ngẫu nhiên của đường ray được sinh từ hàm mật độ phổ công suất (Power Spectral Density – PSD), trong đó hàm PSD sử dụng trong nghiên cứu này được kế thừa và phát triển từ nghiên cứu đã công bố trong [22]. Việc sinh độ không phẳng thuận từ PSD được thực hiện dựa trên giả thiết độ không phẳng thuận của đường ray là một quá trình ngẫu nhiên dừng theo không gian trong phạm vi đoạn khảo sát. Các mẫu kích thích có cùng đặc trưng thống kê và cấu trúc phổ nhưng khác nhau do thành phần pha ngẫu nhiên. Nghiên cứu thực hiện $n = 150$ lượt mô phỏng, tương ứng với 150 mẫu độ không phẳng thuận ngẫu nhiên khác nhau. Từ mỗi lượt mô phỏng, giá trị cực đại của hệ số trật bánh được trích xuất để tạo thành mẫu cực trị $\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$, trong đó Z_i là giá trị cực đại của hệ số trật bánh trong lượt mô phỏng thứ i . Trong phạm vi nghiên cứu này, ngưỡng an toàn chống trật bánh được lấy là $[Y/Q]_{\text{lim}} = 1,2$ theo QCVN 25:2025/BXD [21].

Mẫu cực trị Z được sử dụng làm dữ liệu đầu vào cho mô hình GEV tổng quát và quy trình Bootstrap. Trong nghiên cứu này, số lần lặp Bootstrap tham số được chọn là $B = 3000$ nhằm tăng tính ổn định của các phân vị Bootstrap dùng để xác định khoảng tin cậy 95%. Các khoảng tin cậy 95% của tham số phân phối, xác suất trật bánh, độ tin cậy an toàn chống trật bánh và mức cực trị chu kỳ được xác định từ tập mẫu Bootstrap này. Trên cơ sở đó, nghiên cứu ước lượng độ tin cậy an toàn chống trật bánh, đồng thời xác định mức cực trị z_T ứng với

chu kỳ bảo dưỡng gồm T lượt tàu chạy.

Theo thông tin quản lý khai thác hiện hành, nghiên cứu giả thiết số lượt tàu hàng qua đoạn khảo sát theo chiều lên dốc được xét trong mô hình trung bình khoảng 10 lượt tàu/chiều/ngày. Do mô hình động lực học trong nghiên cứu này chỉ xét đoàn tàu chạy theo chiều lên dốc, số lượt tàu tương ứng với các cấp độ bảo dưỡng, sửa chữa được quy đổi theo số lượt tàu của chiều chạy này. Các giá trị chu kỳ T được tổng hợp trong Bảng 3.

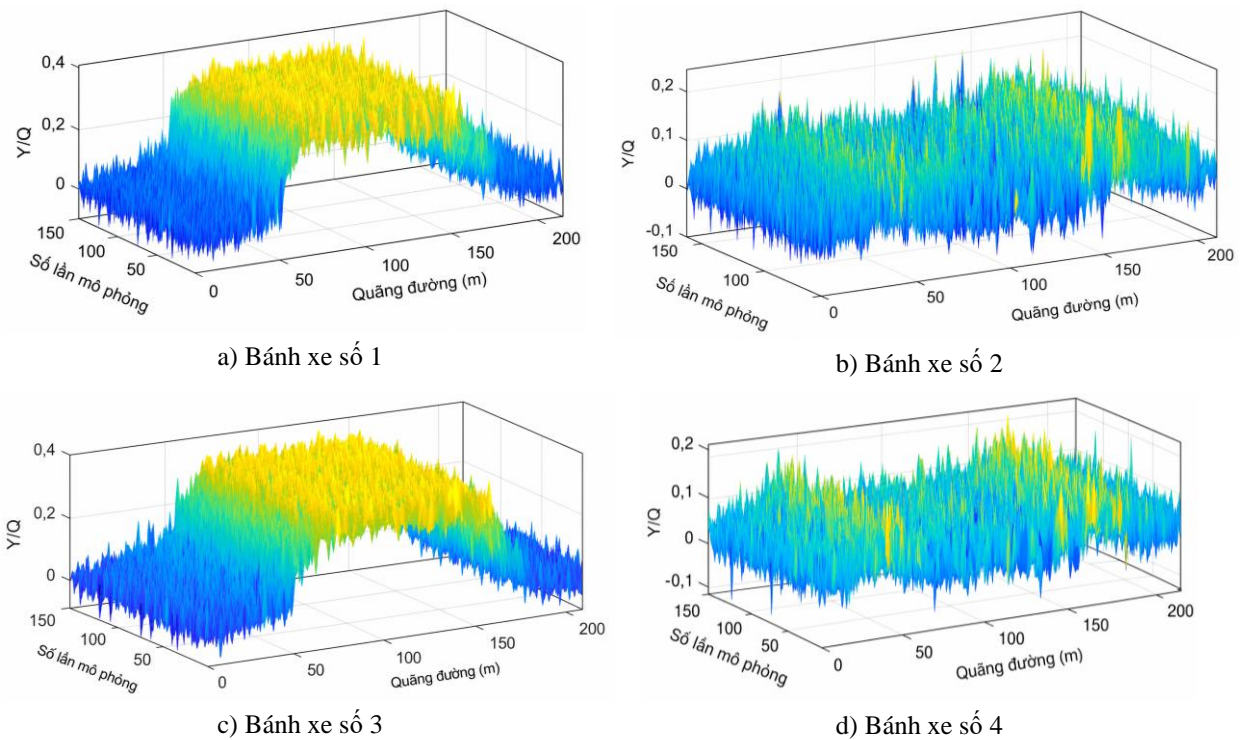
Bảng 3. Chu kỳ bảo dưỡng, sửa chữa và số lượt tàu hàng tương ứng.

Cấp độ bảo dưỡng, sửa chữa	Chu kỳ thực hiện	Số lượt tàu, T	Ghi chú
Bảo dưỡng thường xuyên	1 tháng	300	
Sửa chữa định kỳ	1 năm	3600	
Sửa chữa lớn	10–15 năm	36000 – 54000	Tương ứng chu kỳ bảo trì trung hạn

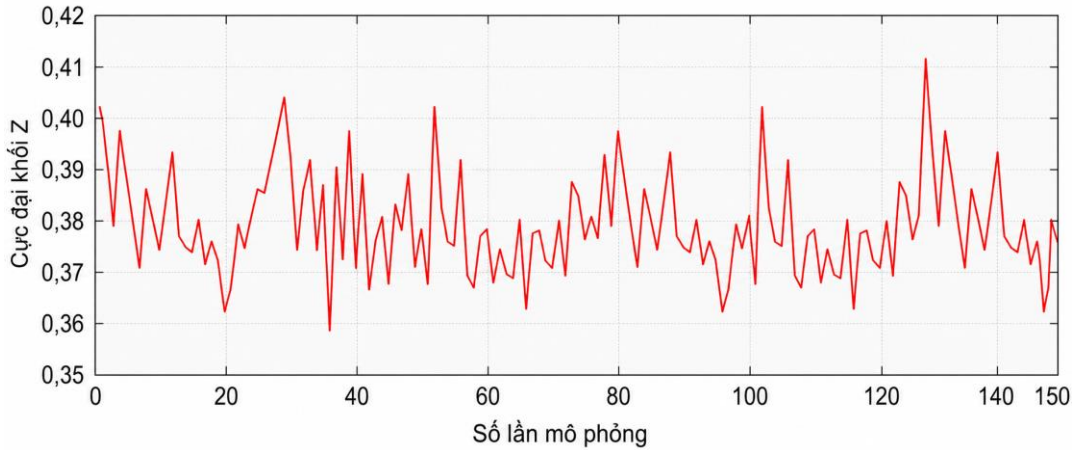
4. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

4.1. Phân tích kết quả mô phỏng và khớp phân phối

Kết quả mô phỏng động lực học với 150 kịch bản độ không phẳng thuận ngẫu nhiên của đường ray cho phép xác định chuỗi giá trị cực đại khối của hệ số trật bánh Y/Q . Trong mỗi kịch bản, giá trị lớn nhất của Y/Q được xem là đại diện cho trạng thái bất lợi nhất của đoàn tàu khi đi qua đoạn đường cong khảo sát. Kết quả mô phỏng và chuỗi cực đại khối được trình bày lần lượt trên Hình 1 và Hình 2. Kết quả cho thấy các giá trị cực đại khối tập trung trong một miền tương đối hẹp và thấp hơn đáng kể so với ngưỡng an toàn chống trật bánh $[Y/Q]_{lim} = 1,2$, điều này phản ánh rằng, trong phạm vi điều kiện mô phỏng đang xét, hệ phương tiện–đường ray vẫn duy trì biên độ an toàn lớn đối với chỉ tiêu trật bánh.

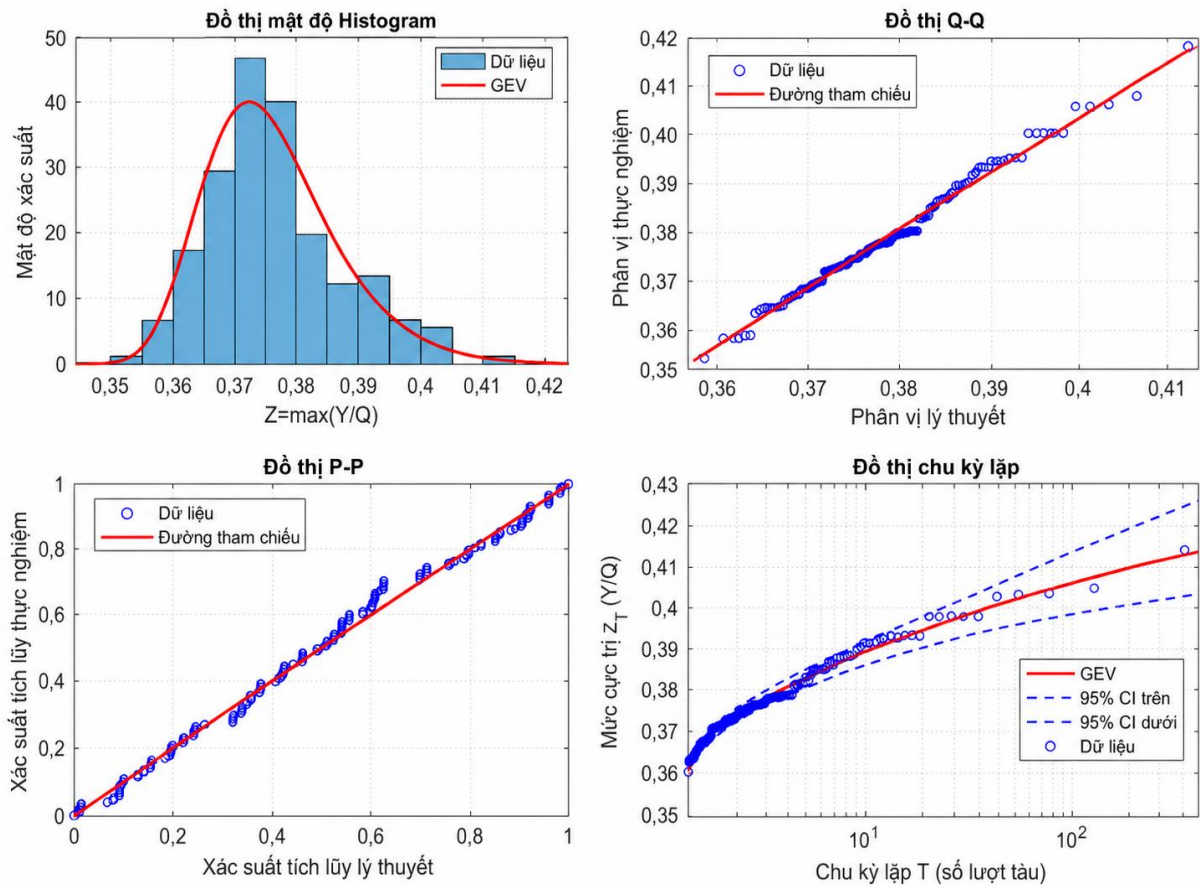


Hình 1. Đáp ứng hệ số trật bánh Y/Q ứng với 150 lần mô phỏng (các bánh xe phía lưng đường cong).



Hình 2. Đồ thị biểu diễn cực đại khối của hệ số trật bánh Y/Q.

Để xét đến khả năng xuất hiện các giá trị hiếm ở vùng đuôi phân phối, mẫu cực đại khối tiếp tục được khớp với các mô hình phân phối cực trị. Kết quả khớp GEV tổng quát tại Bảng 4 cho tham số hình dạng $\zeta = -0,07993$, với khoảng tin cậy 95% là $[-0,18628; 0,02643]$, và giá trị chặn trên xấp xỉ 0,487. Giá trị trung bình của ζ âm cho thấy dữ liệu có xu hướng nghiêng về dạng phân phối có giới hạn trên, tương ứng với nhánh Weibull. Tuy nhiên, do khoảng tin cậy của ζ chứa giá trị 0, chưa đủ cơ sở để khẳng định chắc chắn rằng đuôi phân phối bị chặn trên.



Hình 3. Kết quả khớp dữ liệu đối với phân phối GEV.

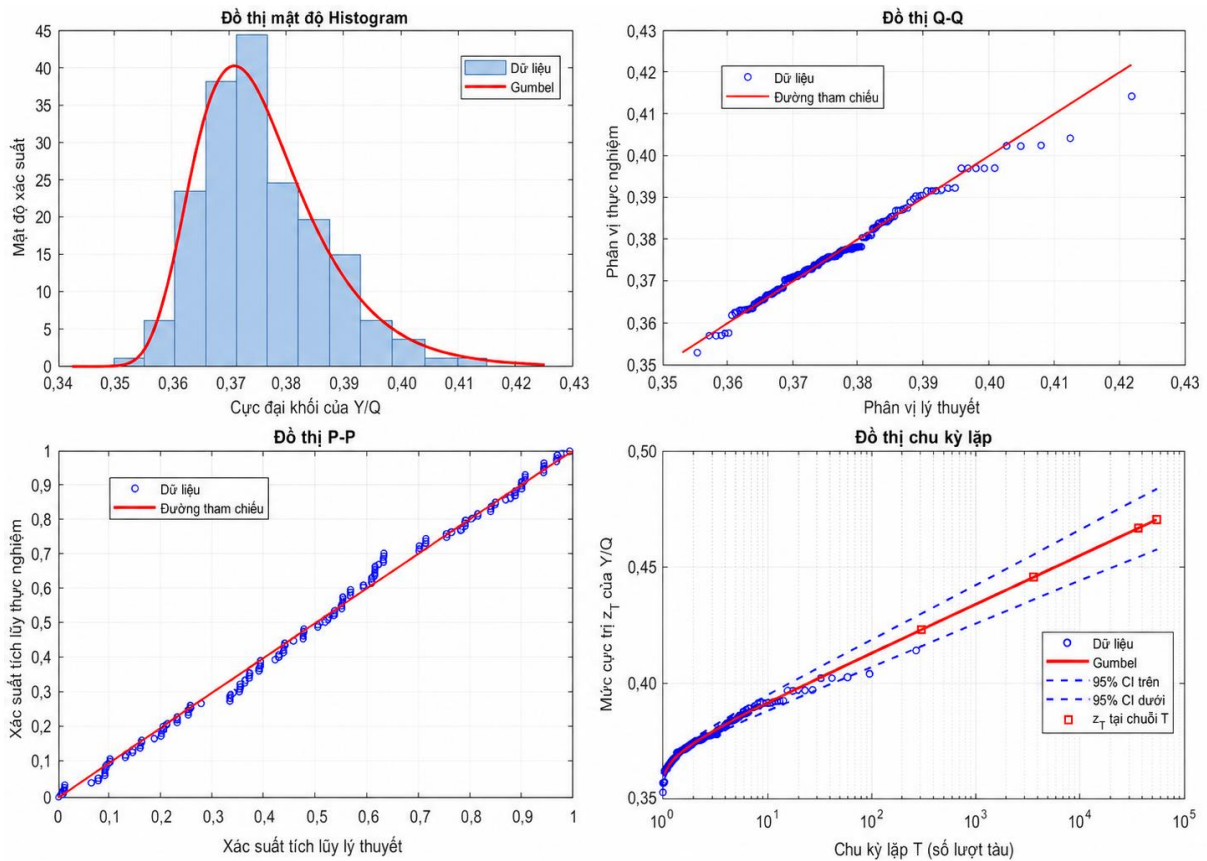
Bảng 4. Kết quả khớp phân phối GEV.

Tham số	ζ	$CI_{95\%}(\zeta)$	μ	$CI_{95\%}(\mu)$	σ	$CI_{95\%}(\sigma)$	Giá trị chặn trên
Giá trị	-0,07993	[-0,18628; 0,02643]	0,37141	[0,36976; 0,37305]	0,00925	[0,00816; 0,01048]	0,487

Ngoài GEV tổng quát, trong nghiên cứu này các mô hình Gumbel, Weibull và Fréchet cũng được khớp để so sánh và kiểm tra tính ổn định của kết quả. Kết quả tổng hợp tại Bảng 5 cho thấy phân phối Gumbel có AIC, BIC và KS tốt hơn, đồng thời có p-value của kiểm định Anderson–Darling lớn hơn so với các mô hình còn lại. Vì vậy, GEV tổng quát được sử dụng như mô hình nền tảng của tiếp cận cực trị khối, trong khi Gumbel được lựa chọn làm mô hình trung tâm để diễn giải kỹ thuật. Cách lựa chọn này phù hợp với thực tế là tham số hình dạng của GEV chưa khác biệt rõ ràng so với trường hợp $\zeta = 0$, đồng thời giúp tránh việc phụ thuộc quá mạnh vào giả thiết phân phối có giới hạn trên.

Bảng 5. Tổng hợp kết quả khớp phân phối các mô hình.

Mô hình	ζ	μ	σ	logL	AIC	BIC	KS	AD	p-value
Weibull	-0,07993	0,37141	0,00925	472,66	-939,32	-930,28	0,08181	0,44941	0,177
Gumbel	0	0,37102	0,00909	471,68	-939,37	-933,35	0,07211	0,47246	0,237
Fréchet	$5,97 \cdot 10^{-08}$	0,37102	0,00909	471,68	-939,37	-933,34	0,07211	0,47246	0,170



Hình 4. Kết quả khớp phân phối Gumbel.

Kết quả ước lượng xác suất trật bánh và độ tin cậy an toàn chống trật bánh được trình bày

trong Bảng 6. Đối với phân phối GEV tổng quát, do tham số hình dạng $\xi < 0$, mô hình có giới hạn trên hữu hạn. Giá trị chặn trên thu được xấp xỉ 0,487, nhỏ hơn nhiều so với ngưỡng an toàn chống trật bánh $[Y/Q]_{\text{lim}} = 1,2$. Vì vậy, xác suất trật bánh theo mô hình GEV được ước lượng ở mức tiệm cận 0, tương ứng với độ tin cậy an toàn chống trật bánh xấp xỉ bằng 1.

Bảng 6. Kết quả ước lượng xác suất trật bánh và độ tin cậy an toàn chống trật bánh.

Phân phối	Xác suất trật bánh		Độ tin cậy an toàn chống trật bánh	
	P_f	$CI_{95\%}(P_f)$	R	$CI_{95\%}(R)$
GEV	≈ 0	$\approx [0, 0]$	≈ 1	$\approx [1, 1]$
Gumbel	$2,46 \cdot 10^{-40}$	$[4,79 \times 10^{-46}; 7,27 \times 10^{-36}]$	≈ 1	$[\approx 1, \approx 1]$

Đối với phân phối Gumbel, mặc dù mô hình không bị chặn trên, xác suất trật bánh vẫn rất nhỏ, khoảng $2,46 \times 10^{-40}$, với khoảng tin cậy 95% cũng nằm ở mức rất nhỏ. Do đó, độ tin cậy an toàn chống trật bánh tương ứng xấp xỉ bằng 1. Kết quả này cho thấy khả năng xuất hiện giá trị cực trị vượt ngưỡng an toàn chống trật bánh gần như không đáng kể trong điều kiện khảo sát.

Điểm đáng chú ý là hai mô hình có giả thiết đuôi khác nhau nhưng đều dẫn đến cùng một nhận định kỹ thuật. Mô hình GEV tổng quát cho kết quả an toàn do tồn tại giới hạn trên hữu hạn nhỏ hơn ngưỡng đánh giá, trong khi mô hình Gumbel không giả định giới hạn trên nhưng vẫn cho xác suất trật bánh cực nhỏ. Điều này cho thấy kết luận về độ tin cậy an toàn chống trật bánh không phụ thuộc riêng vào giả thiết đuôi bị chặn trên của GEV, mà vẫn được duy trì khi xét mô hình không bị chặn trên.

Kết quả ước lượng mức cực trị chu kỳ z_T được trình bày trong Bảng 7. Khi chu kỳ T tăng từ 300 đến 54000 lượt tàu, z_T tăng dần, phù hợp với ý nghĩa của phân tích cực trị. Với phân phối GEV, z_T tăng từ 0,414 tại chu kỳ 1 tháng lên 0,439 tại chu kỳ 15 năm. Với phân phối Gumbel, z_T tăng từ 0,423 lên 0,470 trong cùng khoảng chu kỳ. Tuy nhiên, ngay cả tại chu kỳ dài nhất $T = 54000$ lượt tàu, các giá trị z_T vẫn thấp hơn đáng kể so với ngưỡng an toàn chống trật bánh.

Bảng 7. Kết quả ước lượng mức cực trị chu kỳ z_T của hệ số trật bánh Y/Q .

Stt	Chu kỳ bảo dưỡng, sửa chữa	Chu kỳ T (lượt tàu)	Mức cực trị z_T	
			Phân phối GEV	Phân phối Gumbel
1	1 tháng	300	0,414	0,423
2	1 năm	3600	0,427	0,445
3	10 năm	36000	0,437	0,466
4	15 năm	54000	0,439	0,470

So sánh giữa hai mô hình cho thấy Gumbel cho giá trị z_T lớn hơn GEV ở toàn bộ các chu kỳ khảo sát. Điều này phù hợp vì Gumbel không có giới hạn trên hữu hạn, trong khi GEV với $\xi < 0$ có xu hướng làm mức cực trị tiệm cận về giá trị chặn trên. Vì vậy, trong bối cảnh đánh giá kỹ thuật, kết quả theo Gumbel có thể được xem là phương án diễn giải thận trọng hơn.

Cụ thể, tại chu kỳ 15 năm, z_T theo Gumbel đạt 0,470, tương đương khoảng 39,2% ngưỡng an toàn chống trật bánh; trong khi theo GEV, z_T đạt 0,439, tương đương khoảng 36,6% ngưỡng an toàn chống trật bánh. Các tỷ lệ này cho thấy hệ số trật bánh cực trị dự báo vẫn còn cách xa giới hạn đánh giá. Kết quả này thống nhất với đánh giá độ tin cậy ở Bảng 6, khi cả hai mô hình đều cho xác suất trật bánh rất nhỏ và độ tin cậy an toàn chống trật bánh xấp xỉ bằng 1.

4.2. Bàn luận kết quả

Từ góc độ kỹ thuật, kết quả phân tích cho thấy chỉ tiêu trật bánh Y/Q trong các kịch bản mô phỏng đều thấp hơn đáng kể so với ngưỡng an toàn chống trật bánh. Khi mở rộng đánh giá

theo hướng xác suất–độ tin cậy bằng phương pháp EVT–Bootstrap, kết quả cho thấy xác suất trật bánh rất nhỏ, độ tin cậy an toàn chống trật bánh xấp xỉ bằng 1, đồng thời các mức cực trị chu kỳ z_T vẫn duy trì khoảng cách lớn so với ngưỡng giới hạn. Điều này cho thấy, trong điều kiện khảo sát của nghiên cứu, đoạn đường cong và đoàn tàu đang xét chưa thể hiện nguy cơ bất lợi về an toàn chống trật bánh.

Việc xét chuỗi chu kỳ T ứng với các cấp bảo dưỡng, sửa chữa hạ tầng đường sắt giúp kết quả phân tích gần trực tiếp hơn với bài toán quản lý bảo dưỡng. Thay vì chỉ đánh giá giá trị lớn nhất trong 150 lần mô phỏng, phương pháp đề xuất cho phép ước lượng đồng thời ba đại lượng có ý nghĩa kỹ thuật: xác suất trật bánh, độ tin cậy an toàn chống trật bánh và mức cực trị có thể gặp trong các chu kỳ bảo dưỡng, sửa chữa. Trong trường hợp nghiên cứu này, cả GEV và Gumbel đều cho thấy mức cực trị dự báo vẫn nằm dưới ngưỡng đánh giá với biên độ lớn, kể cả tại chu kỳ sửa chữa dài hạn.

Kết quả theo Gumbel có ý nghĩa đặc biệt trong diễn giải độ tin cậy, vì mô hình này không áp đặt giới hạn trên hữu hạn cho hệ số trật bánh. Mặc dù vậy, xác suất trật bánh vẫn ở mức cực nhỏ và độ tin cậy vẫn xấp xỉ bằng 1. Do đó, kết luận an toàn không chỉ là hệ quả của mô hình GEV có đuôi bị chặn, mà còn được xác nhận bởi mô hình trung tâm có dạng đuôi không bị chặn trên.

Tuy nhiên, các giá trị z_T tại chu kỳ lớn là kết quả ngoại suy thống kê từ tập mẫu mô phỏng hữu hạn. Đặc biệt, chu kỳ dài nhất $T = 54000$ lượt tàu lớn hơn đáng kể so với kích thước mẫu cực trị ban đầu $n = 150$, nên kết quả cần được diễn giải như một chỉ báo định lượng trong phạm vi mô hình đã khớp, thay vì một giá trị bảo đảm tuyệt đối. Bootstrap tham số được sử dụng để lượng hóa bất định do kích thước mẫu, nhưng không loại bỏ hoàn toàn bất định nhận thức do giả thiết phân phối, giả thiết dừng của độ không phẳng thuận ngẫu nhiên và sai số mô hình động lực học.

Ngoài ra, kết quả nghiên cứu được xây dựng cho trường hợp toa xe hàng loại G ở trạng thái đầy tải, vận tốc cố định $V = 70$ km/h, chiều chạy lên dốc và cặp biên dạng bánh–ray đã khai báo trong mô hình. Vì vậy, các kết luận về xác suất trật bánh, độ tin cậy an toàn chống trật bánh và mức cực trị chu kỳ cần được diễn giải trong phạm vi điều kiện khảo sát này. Các nghiên cứu tiếp theo cần mở rộng đánh giá cho các dải vận tốc khác nhau, bán kính đường cong khác nhau, trạng thái xe rỗng hoặc tải nhẹ, trạng thái mòn bánh xe/ray và các điều kiện đường ray suy giảm chất lượng.

5. KẾT LUẬN

Nghiên cứu đã xây dựng khung đánh giá độ tin cậy an toàn chống trật bánh của hệ số trật bánh Y/Q trên cơ sở kết hợp mô phỏng động lực học ngẫu hợp phương tiện–đường ray, mô hình GEV và Bootstrap. Từ 150 kịch bản mô phỏng với độ không phẳng thuận ngẫu nhiên của đường ray, các giá trị cực đại của Y/Q được trích xuất để tạo mẫu cực trị khối, phục vụ khớp phân phối cực trị, ước lượng xác suất trật bánh, độ tin cậy an toàn chống trật bánh và mức cực trị chu kỳ.

Kết quả khớp phân phối cho thấy mô hình GEV tổng quát phù hợp với mẫu cực trị, với tham số hình dạng $\xi = -0,07993$, thể hiện xu hướng phân phối có giới hạn trên. Tuy nhiên, khoảng tin cậy 95% của ξ chứa giá trị 0, nên phân phối Gumbel được lựa chọn làm mô hình trung tâm để diễn giải kỹ thuật. Việc sử dụng đồng thời GEV và Gumbel cho phép đánh giá kết quả trong cả trường hợp phân phối có giới hạn trên và trường hợp không bị chặn trên.

Kết quả ước lượng cho thấy xác suất trật bánh ứng với ngưỡng an toàn chống trật bánh $[Y/Q]_{lim} = 1,2$ là rất nhỏ. Theo mô hình GEV tổng quát, xác suất trật bánh được ước lượng ở mức tiệm cận 0 do giá trị chặn trên của phân phối nhỏ hơn ngưỡng đánh giá. Theo mô hình Gumbel, mặc dù phân phối không bị chặn trên, xác suất trật bánh chỉ khoảng $2,46 \times 10^{-40}$. Tương ứng, độ tin cậy an toàn chống trật bánh theo cả hai mô hình đều xấp xỉ bằng 1, cho thấy nguy cơ trật bánh trong điều kiện khảo sát là không đáng kể.

Mức cực trị chu kỳ z_T tăng khi chu kỳ T tăng, nhưng vẫn thấp hơn đáng kể so với ngưỡng an toàn chống trật bánh trong toàn bộ các chu kỳ khảo sát. Tại chu kỳ dài nhất $T = 54000$ lượt tàu, z_T đạt khoảng 0,439 theo GEV và 0,470 theo Gumbel, tương ứng khoảng 36,6% và 39,2% ngưỡng an toàn chống trật bánh. Kết quả này cho thấy trường hợp nghiên cứu còn biên độ dự trữ an toàn lớn đối với chỉ tiêu Y/Q , kể cả khi xét đến chu kỳ sửa chữa dài hạn.

Khung GEV–Bootstrap đề xuất có thể hỗ trợ lượng hóa đồng thời xác suất trật bánh, độ tin cậy an toàn chống trật bánh và mức cực trị chu kỳ của hệ số trật bánh. Đây là cơ sở định lượng hữu ích để bổ sung cho đánh giá an toàn dựa trên mô phỏng động lực học, đồng thời hỗ trợ định hướng kiểm tra, bảo dưỡng theo chu kỳ. Tuy nhiên, các kết quả tại chu kỳ lớn là kết quả ngoại suy từ tập mẫu mô phỏng hữu hạn, do đó cần được diễn giải cùng với giả thiết phân phối, giả thiết dừng của độ không phẳng thuận ngẫu nhiên, chất lượng mô hình động lực học, số lượng kịch bản mô phỏng và điều kiện vận hành được xét. Trong các nghiên cứu tiếp theo, cần mở rộng khung đánh giá cho nhiều dải vận tốc, bán kính đường cong, trạng thái tải trọng, trạng thái mòn bánh xe/ray và điều kiện đường ray suy giảm chất lượng nhằm kiểm tra tính ổn định và tính tổng quát của phương pháp đề xuất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. R. Konowrocki, A. Chojnacki, Analysis of rail vehicles' operational reliability in the aspect of safety against derailment based on various methods of determining the assessment criterion, *Eksplatacja i Niezawodność*, 22 (2020) 73–85.
- [2]. N. Wilson, R. Fries, M. Witte, A. Haigermoser, M. Wrang, J. Evans, A. Orlova, Assessment of safety against derailment using simulations and vehicle acceptance tests: a worldwide comparison of state-of-the-art assessment methods, *Vehicle System Dynamics*, 49 (2011) 1113–1157.
- [3]. C. Weidemann, State-of-the-art railway vehicle design with multi-body simulation, *Journal of Mechanical Systems for Transportation and Logistics*, 3 (2010) 12–26.
- [4]. O. Polach, A. Böttcher, D. Vannucci, J. Sima, H. Schelle, H. Chollet, M. Osman, Validation of simulation models in the context of railway vehicle acceptance, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 229 (2015) 729–754.
- [5]. W.M. Zhai, C.B. Cai, S.Z. Guo, Coupling model of vertical and lateral vehicle/track interactions, *Vehicle System Dynamics*, 26 (1996) 61–79.
- [6]. W. Zhai, K. Wang, C. Cai, Fundamentals of vehicle–track coupled dynamics, *Vehicle System Dynamics*, 47 (2009) 1349–1376.
- [7]. X. Gibert, V.M. Patel, R. Chellappa, Sequential score adaptation with extreme value theory for robust railway track inspection, in: *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision Workshops*, 2015, pp. 42–49.
- [8]. Y. Cui, Q. He, Z. Zhang, Z. Li, Using extreme value theory to identify railcar asymmetric wheel wear and its benefit analysis, *Transport*, 34 (2019) 569–578.
- [9]. J. Guo, R. Yang, B. Tan, Extreme value estimation and research on dynamic coefficients of wheel rail force based on GPD theory and percentile threshold method, *Journal of the China Railway Society*, 46 (2024) 11–20. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-8360.2024.03.002>

- [10]. Z. Zhou, N. Zhang, Q. Sun, The probability statistics of train derailment coefficients based on the pseudo-excitation method, *Engineering Mechanics*, 39 (2021) 219–227.
- [11]. B. Kumar, D. Datta, Estimation of probability of failure using bootstrap methods, in: 2010 2nd International Conference on Reliability, Safety and Hazard-Risk-Based Technologies and Physics-of-Failure Methods (ICRESH), IEEE, 2010, pp. 143–146.
- [12]. V. Picheny, N.H. Kim, R.T. Haftka, Application of bootstrap method in conservative estimation of reliability with limited samples, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41 (2010) 205–217.
- [13]. T.J. Hastie, *Computer Age Statistical Inference: Algorithms, Evidence, and Data Science*, Cambridge University Press, 2017.
- [14]. A.C. Davison, D.V. Hinkley, *Bootstrap Methods and Their Application*, Cambridge University Press, 1997.
- [15]. R.J. Tibshirani, B. Efron, An Introduction to the Bootstrap, *Monographs on Statistics and Applied Probability*, 57 (1993) 1–436.
- [16]. H. Khajehei, A. Ahmadi, I. Soleimanmeigouni, A. Nissen, Allocation of effective maintenance limit for railway track geometry, *Structure and Infrastructure Engineering*, 15 (2019) 1597–1612.
- [17]. A. O'Connor, C. Pedersen, L. Gustavsson, I.B. Enevoldsen, Probability-based assessment and optimised maintenance management of a large riveted truss railway bridge, *Structural Engineering International*, 19 (2009) 375–382.
- [18]. J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Segers, J.L. Teugels, *Statistics of Extremes: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 2006.
- [19]. L. de Haan, A. Ferreira, *Extreme Value Theory: An Introduction*, Springer, New York, 2006.
- [20]. S. Coles, J. Bawa, L. Trenner, P. Dorazio, *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer, London, 2001.
- [21]. Bộ Xây dựng, QCVN 25:2025/BXD - Quy chuẩn kỹ thuật quốc gia về toa xe, phương tiện chuyên dùng không tự hành trong kiểm tra sản xuất lắp ráp và nhập khẩu mới, 2025.
- [22]. Nguyễn Đức Tâm, Phạm Văn Ký, Mai Tiến Chính, Ước lượng phổ công suất của đường ray không phẳng thuận theo biên dạng đứng cho đường sắt quốc gia Việt Nam, *Tạp chí Giao thông vận tải*, 9 (2024).