



INFLUENCE OF HORIZONTAL CURVATURE RADIUS AND BEARING CONDITIONS ON THE INTERNAL FORCES AND DEFLECTION OF REINFORCED CONCRETE BOX GIRDER BRIDGES

Bui Quoc Bao, Cu Viet Hung*

Hanoi University of Civil Engineering, No 55 Giai Phong Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 23/02/2026

Revised: 07/08/2026

Accepted: 11/08/2026

Published online: 15/08/2026

<https://doi.org/10.47869/tcsj.77.6.1>

* *Corresponding author*

Email: hungcv@huce.edu.vn; Tel: +84913328789

Abstract. Curved bridges are structures whose spans are arranged along a horizontal curve, commonly employed in grade-separated interchanges, urban overpasses, and viaducts along mountainous terrain to accommodate roadway curvature or complex site conditions. This study investigates the influence of horizontal curvature radius and bearing conditions on the structural behavior of a two-span continuous reinforced-concrete box-girder bridge. A finite element model employing 7-DOF beam elements, which enables an accurate representation of torsional and warping effects, is developed to analyze internal forces and deformations under static loads and HL-93 live loads. Eight curvature radii ($R = 50\div 400$ m) and two bearing configurations (dual bearings restraining rotation and a single bearing permitting rotation) are examined. The results indicate that the influence of the curvature radius on the structural behavior of the bridge is nonlinear. As the radius decreases, internal forces and deformations tend to increase, with the effect being particularly pronounced for torsional moments. Bearing conditions have a significant impact on the torsional behavior of the structure.

Keywords: Curved bridges, reinforced concrete box girder, torsion, curvature radius, bearing condition.

@ 2026 University of Transport and Communications



ẢNH HƯỞNG CỦA BÁN KÍNH CONG NẴM VÀ ĐIỀU KIỆN GỒI ĐẾN NỘI LỰC VÀ ĐỘ VÕNG CỦA CẦU DẦM HỘP BÊ TÔNG CỐT THÉP

Bùi Quốc Bảo, Cù Việt Hưng*

Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, Số 55 Giải Phóng, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 23/02/2026

Ngày nhận bài sửa: 07/08/2026

Ngày chấp nhận đăng: 11/08/2026

Ngày xuất bản Online: 15/08/2026

<https://doi.org/10.47869/tcsj.77.6.1>

* Tác giả liên hệ

Email: hungcv@huce.edu.vn; Tel: +84913328789

Tóm tắt. Cầu cong là dạng cầu có kết cấu nhịp bố trí theo đường cong trong mặt bằng, thường được áp dụng tại các nút giao thông khác mức, cầu vượt đô thị, cầu cạn men sườn núi nhằm đáp ứng yêu cầu của tuyến đường cong hoặc địa hình phức tạp. Nghiên cứu này đánh giá ảnh hưởng của bán kính cong nằm và điều kiện gồ gề tựa đến ứng xử của cầu dầm hộp bê tông cốt thép liên tục hai nhịp. Mô hình phần tử hữu hạn sử dụng phần tử dầm 7 bậc tự do, cho phép mô tả đầy đủ hiệu ứng xoắn, được thiết lập để phân tích nội lực và biến dạng dưới tải trọng tĩnh và hoạt tải HL-93. Tám giá trị bán kính cong ($R = 50 \div 400$ m) cùng hai phương án bố trí gối được khảo sát. Kết quả cho thấy ảnh hưởng của bán kính cong đến ứng xử của cầu là phi tuyến, trong đó khi bán kính giảm, nội lực và biến dạng có xu hướng gia tăng, đặc biệt rõ rệt đối với mô men xoắn. Điều kiện gồ gề tựa có tác động đáng kể đến ứng xử xoắn của kết cấu.

Từ khóa: Cầu cong, dầm hộp bê tông cốt thép, xoắn, bán kính cong, điều kiện gồ gề tựa.

@ 2026 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. GIỚI THIỆU

Cầu cong là dạng cầu có kết cấu nhịp bố trí theo đường cong trong mặt bằng, thường được áp dụng tại các nút giao thông khác mức, cầu vượt đô thị hoặc khu vực địa hình phức tạp nhằm đáp ứng yêu cầu tuyến và tiết kiệm không gian. So với cầu thẳng, cầu cong giúp dòng xe chuyển tiếp êm thuận, có ưu thế về thẩm mỹ nhưng lại phát sinh mô men xoắn đáng kể do hình học cong và tải trọng ngang [1]. Do đó, ứng suất và biến dạng trong cầu cong phức tạp hơn nhiều so với cầu thẳng; các cấu kiện như giằng ngang, dầm ngang và thanh chống,

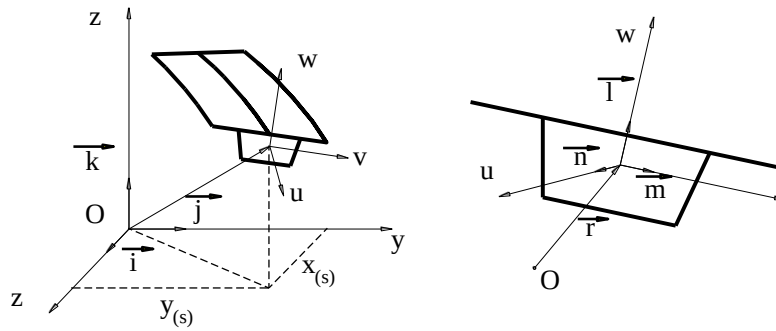
vốn chỉ đóng vai trò phụ trong cầu thẳng, trở thành bộ phận chịu lực quan trọng để đảm bảo ổn định kết cấu. Đặc biệt, dầm hộp kín có khả năng chống xoắn hiệu quả hơn nhiều so với dầm tiết diện hở nhờ khả năng chống xoắn tốt và hạn chế biến dạng cong vênh; vì vậy, với các cầu cong bán kính nhỏ thường ưu tiên sử dụng dầm hộp hoặc phải tăng cường hệ giằng chống xoắn khi dùng dầm tiết diện hở [1].

Nghiên cứu về cầu cong bắt đầu được quan tâm mạnh từ những năm 1970, tiêu biểu là dự án CURT tại Mỹ, với các thí nghiệm quy mô lớn và mô hình số nhằm xây dựng cơ sở cho tiêu chuẩn thiết kế [2]. Kết quả nghiên cứu đã dẫn đến sự ra đời của Hướng dẫn AASHTO cho cầu cong vào khoảng năm 1980, sau đó được cập nhật năm 2003 [3] và tích hợp vào tiêu chuẩn AASHTO LRFD trong các phiên bản tiếp theo [4]. Các tổng quan của Zureick [5] và Linzell [6] đã hệ thống hóa và hoàn thiện quy trình thiết kế cầu cong hiện đại. Bên cạnh các nghiên cứu tổng quan, Li [7] đề xuất phương pháp dải hữu hạn để phân tích cầu dầm hộp cong, góp phần mở rộng công cụ tính toán cho loại kết cấu này. Hasebe tập trung nghiên cứu hiệu ứng shear lag, xác định bề rộng hữu hiệu của bản mặt cầu cong và sự phân bố ứng suất trong mặt cắt ngang [8]. Tiwari và Bhargava đã thực hiện phân tích phần tử hữu hạn ba chiều cho cầu hộp nhiều khoang nhằm đánh giá hệ số phân bố hoạt tải ở cầu cong [9]. Tương tự, nhiều nghiên cứu cũng sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để đánh giá ảnh hưởng của các yếu tố hình học, đặc biệt là bán kính và góc cong, đến nội lực, chuyển vị và đáp ứng động của cầu dầm hộp cong, từ đó đề xuất các khuyến nghị trong thiết kế [10-14].

Ở góc độ cấu tạo, Gao và cộng sự [15] phân tích quá trình thay thế gối trong cầu cong liên tục và cho thấy gối có ảnh hưởng đáng kể đến phân bố nội lực. Ngoài ra, Nassr và cộng sự [16] sử dụng tối ưu topo để thiết kế vách ngang, giúp giảm khối lượng nhưng vẫn đảm bảo độ cứng. Ngoài ứng xử tĩnh, một số nghiên cứu đã xét đến động lực học. Guo và cộng sự [17] xây dựng mô hình tương tác xe – cầu để đánh giá hệ số xung kích, cho thấy phản ứng động phụ thuộc mạnh vào tốc độ xe và điều kiện mặt cầu. Trong nước, Đặng Việt Đức [18] đã nghiên cứu sức kháng xoắn của cầu dầm hộp cong BTCT DUL, chỉ ra ảnh hưởng rõ rệt của bố trí gối và cấp dự ứng lực đến mô men xoắn, góp phần bổ sung cơ sở khoa học cho việc thiết kế cầu cong trong điều kiện Việt Nam.

Mặc dù hệ thống lý thuyết và tiêu chuẩn thiết kế cầu cong đã được xây dựng và phát triển tương đối đầy đủ, các nghiên cứu chuyên sâu về cầu dầm hộp liên tục bằng bê tông cốt thép vẫn còn hạn chế. Đặc biệt là ảnh hưởng đồng thời của yếu tố hình học như bán kính cong và điều kiện gối tựa đến ứng xử của kết cấu vẫn chưa được phân tích một cách toàn diện. Ở cầu cong, việc đánh giá chính xác phân bố nội lực, biến dạng và ổn định khó khăn hơn nhiều so với cầu thẳng. Bán kính cong nhỏ không chỉ làm gia tăng đáng kể nội lực và ứng suất do xoắn, mà còn thay đổi phân bố nội lực giữa các nhịp và tại các gối cầu, đặc biệt trong kết cấu liên tục. Hơn nữa, cách bố trí và cấu tạo gối cầu ảnh hưởng trực tiếp đến khả năng phân phối nội lực và ổn định tổng thể của kết cấu trong cả giai đoạn thi công và khai thác (chịu tải trọng của xe cộ). Do đó, vẫn cần thiết có những nghiên cứu chuyên biệt, tập trung vào tác động kết hợp của độ cong và cấu tạo gối cầu đến ứng xử của hệ dầm. Vì vậy, nghiên cứu này nhằm làm rõ hơn các đặc điểm làm việc của loại cầu này, từ đó cung cấp cơ sở cho việc đánh giá sơ bộ trong quá trình thiết kế và lựa chọn giải pháp kết cấu phù hợp.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TRONG DẦM CONG



Hình 1. Dầm cong trong hệ tọa độ Đề Các.

Xét một đoạn dầm cong trong hệ trục tọa độ O, x, y, z (Hình 1). Với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là 3 véc tơ đơn vị tương ứng với 3 trục x, y, z . Tại mặt cắt vuông góc với trục dầm, thiết lập hệ trục tọa độ địa phương $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đặt tại trọng tâm mặt cắt. Với trục $\vec{u}$ vuông góc với mặt cắt, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ là hai trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt. $\vec{n}, \vec{m}, \vec{l}$ là 3 véc tơ đơn vị của hệ trục $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Phương trình trục dầm viết dưới dạng véc tơ là $\vec{r} = x_{(s)}\vec{i} + y_{(s)}\vec{j} + z_{(s)}\vec{k}$. Chiều dài đường cong trục dầm được xác định bằng công thức (1).

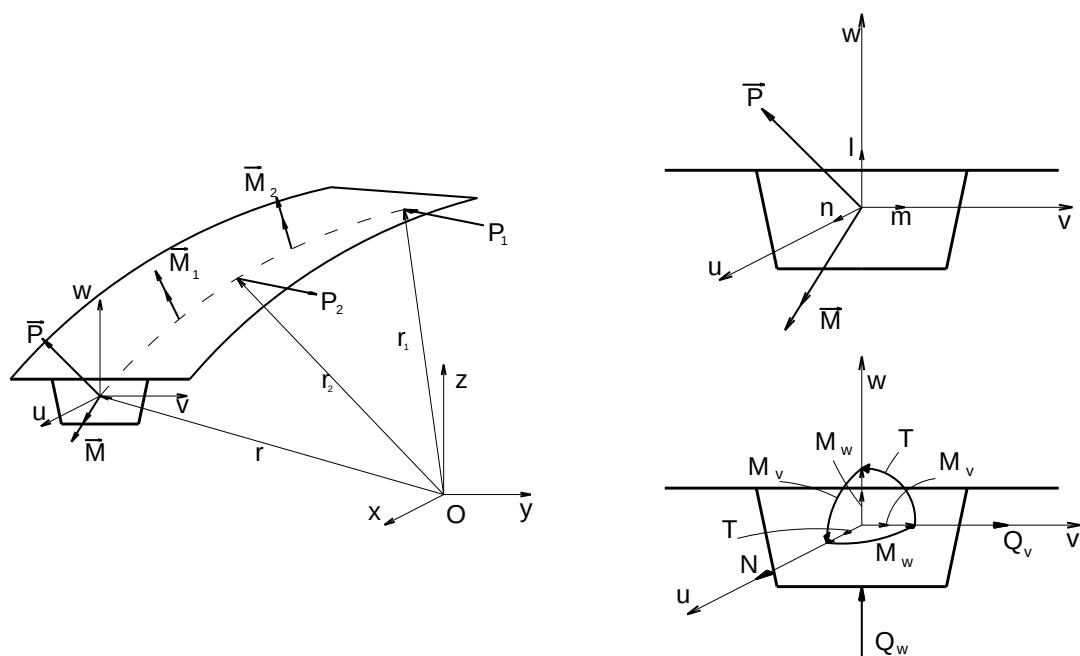
$$S = \int_0^s \left[\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} \right] ds \quad (1)$$

Khảo sát một đoạn dầm chịu các lực $\vec{P}_i$ và mô men $\vec{M}_i$ (Hình 2). Với $\vec{P}$ là hợp lực đặt tại trọng tâm mặt cắt và $\vec{M}$ là tổng mô men đặt tại trọng tâm mặt cắt. Nội lực trong mặt cắt cân bằng với các lực và mômen trên phần dầm được cắt ra. Phương trình cân bằng lực viết dưới dạng véc tơ (2) và (3). Từ 2 phương trình này, xác định được $\vec{P}$ và $\vec{M}$.

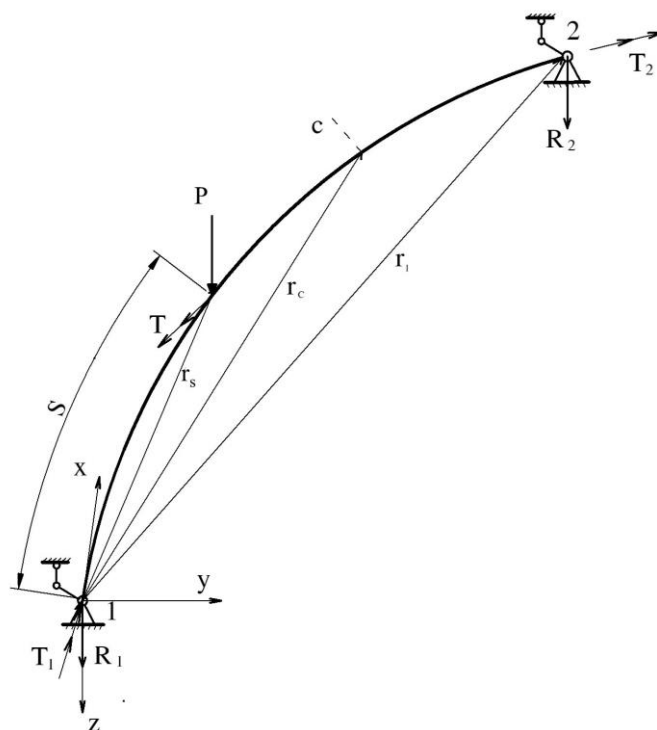
$$\vec{P} + \sum \vec{P}_i = \vec{0} \quad (2)$$

$$\vec{M} + \sum \vec{M}_i + \sum (\vec{r}_i - \vec{r}) \times \vec{P}_i = \vec{0} \quad (3)$$

Khảo sát sơ đồ dầm cong nhịp đơn giản có bán kính cong R như thể hiện trên Hình 3. Tại hai gối tựa 1 và 2 xuất hiện các phản lực R_1 và R_2 ; đồng thời, theo điều kiện liên kết của gối được khảo sát, xuất hiện các mô men xoắn phản lực T_1 và T_2 . Dầm chịu tác dụng của lực tập trung $\vec{P}$ và mô men xoắn $\vec{T}$, với vị trí đặt tải được xác định bởi chiều dài S . Trong đó, r_s là véc tơ vị trí từ gối 1 đến điểm đặt tải trọng, r_c là véc tơ vị trí từ gối 1 đến mặt cắt khảo sát c , r_l là véc tơ vị trí từ gối 1 đến gối 2, tương ứng với toàn bộ chiều dài cung của dầm.



Hình 2. Nội lực trong dầm.



Hình 3. Khảo sát dầm cong đơn giản trong mặt phẳng xy.

Phương trình cân bằng lực và mô men như sau:

$$\vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0 \quad (4)$$

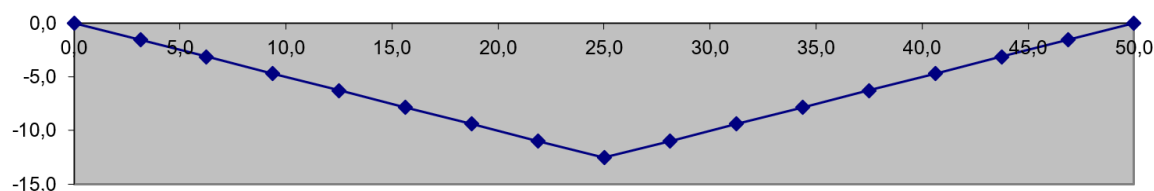
$$\vec{r}_s \times \vec{P} + \vec{r}_l \times \vec{R}_2 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T} = 0 \quad (5)$$

Xét mặt cắt c tại vị trí có chiều dài cung S_c , nội lực trong dầm được xác định thông qua

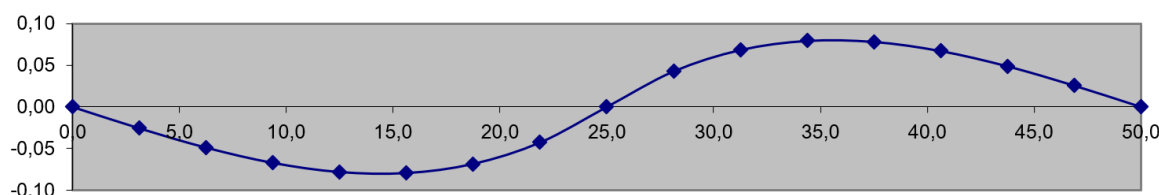
đàn hồi được tính toán theo tiêu chuẩn TCVN 11823-2017 [19], $E = 34269 \text{ MPa}$. Trong nghiên cứu này, phân tích được thực hiện trong phạm vi kết cấu đàn hồi tuyến tính, không xét ảnh hưởng của dự ứng lực và không xét các giai đoạn thi công, mà tập trung vào trạng thái làm việc của kết cấu trong giai đoạn khai thác.

3.1. Phân tích nội lực lý thuyết

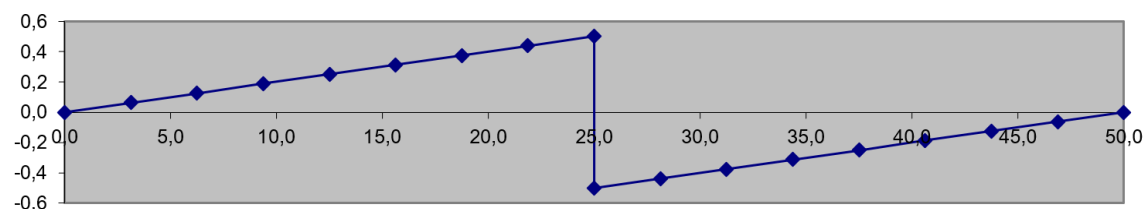
Dựa trên cơ sở lý thuyết đã trình bày ở trên, xác định được các đường ảnh hưởng tại các vị trí mặt cắt của dầm (vị trí đầu dầm, giữa dầm, $\frac{1}{4}$ dầm,...). Kết quả đường ảnh hưởng của mô men uốn, mô men xoắn, lực cắt ở vị trí giữa nhịp thể hiện ở Hình 5, Hình 6 và Hình 7. Từ đường ảnh hưởng, dễ dàng xác định nội lực do tải trọng bản thân của dầm gây ra (Bảng 1).



Hình 5. Đường ảnh hưởng của mô men uốn tại vị trí giữa nhịp.



Hình 6. Đường ảnh hưởng của mô men xoắn tại vị trí giữa nhịp.



Hình 7. Đường ảnh hưởng của lực cắt tại vị trí giữa nhịp.

Bảng 1. Nội lực do tải trọng bản thân tính toán lý thuyết.

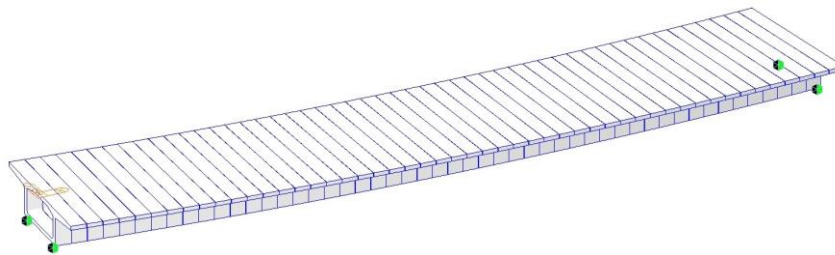
Tiết diện	Lực cắt (kN)	Mô men uốn (kNm)	Mô men xoắn (kNm)
0L	3750,0	0,0	3125,3
L/8	2812,5	20583,7	2858,8
L/4	1875,0	35295,5	2151,2
3L/8	937,5	44126,3	1149,2
L/2	0,0	47070,5	0,0
5L/8	-937,5	44126,3	-1149,2
3L/4	-1875,0	35295,5	-2151,2
7L/8	-2812,5	20583,7	-2858,8
L	-3750,0	0,0	-3125,3

3.2. Phân tích nội lực theo phương pháp phần tử hữu hạn

Hiện tượng biến dạng vênh (warping) thường xuất hiện ở cầu kiện dạng thanh, đặc biệt rõ rệt ở các thanh tiết diện hở khi chịu mô men xoắn không đều dọc chiều dài. Khi đó, tiết diện

không còn giữ nguyên hình dạng phẳng mà xảy ra sự dịch chuyển tương đối ở trong tiết diện, đặc biệt tại các bản cánh, do đó gây ra ứng suất phụ ở tiết diện [20, 21]. Khác với xoắn thuần túy theo lý thuyết Saint-Venant, vốn chỉ xét ứng suất tiếp do xoắn đều và giả định tiết diện phẳng, hiệu ứng vênh chỉ được mô hình hóa đúng khi bổ sung thêm bậc tự do vênh và mômen vênh vào hệ phương trình. Tuy nhiên đối với tiết diện kín như tiết diện dầm hộp, ảnh hưởng của biến dạng vênh đến phân bố nội lực thường không đáng kể và có thể bỏ qua trong nhiều trường hợp tính toán thực hành [22]. Tuy vậy, việc xét đến hiện tượng warping trong mô hình phần tử hữu hạn ở nghiên cứu này vẫn cần thiết nhằm phản ánh đầy đủ ứng xử của kết cấu.

Phần tử dầm 7 bậc tự do (7 DOF – Degrees of Freedom) mở rộng từ phần tử dầm 6 DOF truyền thống bằng cách bổ sung thêm 1 bậc tự do mô phỏng biến dạng vênh của tiết diện. Tại mỗi nút, ngoài 6 bậc tự do gồm 3 chuyển vị (theo các trục x , y , z) và 3 quay (quanh các trục x , y , z), còn có thêm 1 bậc tự do vênh. Bậc tự do này phản ánh sự dịch chuyển dọc trục không đều giữa các điểm của tiết diện do hiện tượng xoắn. Mô hình 7 DOF sẽ tự động sinh ra nội lực phụ tương ứng (bimoment) và đưa vào ma trận độ cứng của phần tử. Phần mềm Midas Civil hỗ trợ trực tiếp phần tử dầm 7 DOF. Bắt đầu từ các phiên bản 2015 trở đi, Midas cho phép người dùng kích hoạt hiệu ứng vênh (7th DOF) cho các phần tử beam/truss tổng quát. Mô hình phần tử hữu hạn thể hiện ở Hình 8, thu được kết quả nội lực như ở Bảng 2.



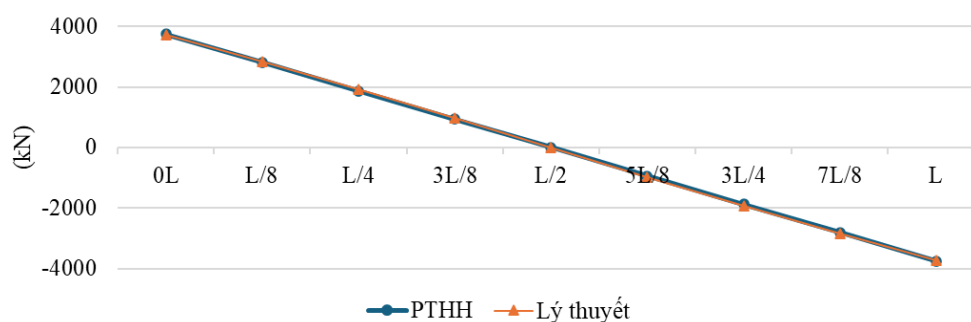
Hình 8. Mô hình phần tử hữu hạn.

Bảng 2. Nội lực do tải trọng bản thân theo mô hình phần tử hữu hạn.

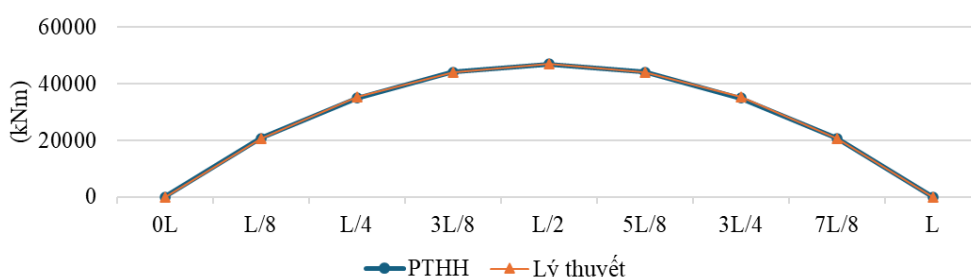
Tiết diện	Lực cắt (kN)	Mô men uốn (kNm)	Mô men xoắn (kNm)
0L	3734,8	0,0	3197,5
L/8	2838,5	20818,6	2909,1
L/4	1916,0	34917,4	2239,1
3L/8	983,0	44141,6	1196,3
L/2	0,0	46959,7	0,0
5L/8	-983,0	44141,6	-1196,3
3L/4	-1916,0	34917,4	-2239,1
7L/8	-2838,5	19827,2	-2909,1
L	-3734,8	0,0	-3197,5

3.3. Nhận xét

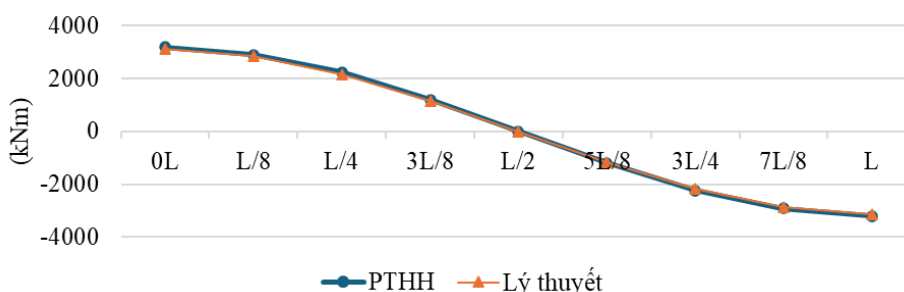
Kết quả so sánh nội lực dầm cong thu được từ tính toán theo lý thuyết và theo phương pháp phần tử hữu hạn cho thấy mức độ sai khác giữa hai phương pháp là không đáng kể, thể hiện qua các biểu đồ so sánh lực cắt, mô men uốn và mô men xoắn tại các tiết diện dọc theo nhịp (Hình 9, Hình 10 và Hình 11). Cũng cần lưu ý rằng phương pháp tính toán theo lý thuyết không xét đến ảnh hưởng của biến dạng vênh (warping), trong khi mô hình phần tử hữu hạn có xét đến yếu tố này.



Hình 9. So sánh kết quả lực cắt.



Hình 10. So sánh kết quả mô men uốn.



Hình 11. So sánh kết quả mô men xoắn.

Đối với lực cắt, phân bố dọc theo nhịp giữa hai phương pháp là gần như trùng khớp. Giá trị lực cắt lớn nhất tại hai gối chênh lệch rất nhỏ (0,4%). Tại các tiết diện trung gian (L/8, L/4, 3L/8), sai lệch lực cắt dao động trong khoảng 0,9÷4,6 %. Đối với mô men uốn, kết quả tính toán từ mô hình PTHH cho giá trị rất gần với lời giải lý thuyết tại mọi vị trí. Với mô men uốn cực đại tại giữa nhịp chỉ sai khác 0,24 %, trong khi tại các tiết diện lân cận, sai lệch xấp xỉ 1 %. Đối với mô men xoắn, tuy đây là thành phần nội lực nhạy cảm nhất đối với hình học cong, kết quả giữa hai phương pháp vẫn cho thấy sự phù hợp rất tốt. Sai lệch mô men xoắn tại các tiết dưới 4 %, và giá trị tại giữa nhịp đều bằng không trong cả hai phương pháp, phù hợp với điều kiện đối xứng hình học và tải trọng.

Có thể khẳng định rằng, mô hình phân tử hữu hạn cho độ tin cậy cao trong việc mô phỏng ứng xử nội lực của dầm cầu cong. Mức sai lệch nhỏ giữa kết quả tính toán theo lý thuyết và phương pháp phân tử hữu hạn cho thấy mô hình số đã phản ánh đúng đặc trưng làm việc của kết cấu, do đó có thể được sử dụng để mở rộng phân tích cho các trường hợp phức tạp hơn.

4. KHẢO SÁT CÁC YẾU TỐ ẢNH HƯỞNG ĐẾN NỘI LỰC DẦM CẦU CONG

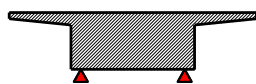
Trên cơ sở kết quả so sánh và kiểm chứng ở Mục 3, mô hình này được sử dụng để mở

rộng khảo sát ảnh hưởng của các tham số hình học và điều kiện biên đến ứng xử của dầm cầu cong liên tục 2 nhịp, với chiều dài mỗi nhịp là 50 m. Mặt cắt ngang của dầm được giữ nguyên như Hình 4. Ngoài tải trọng bản thân kết cấu, tải trọng do lớp phủ asphalt (dày 70 mm) và tải trọng lan can (8 kN/m) cũng được xét đến nhằm phản ánh điều kiện làm việc thực tế của công trình.

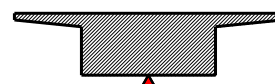
Để đánh giá ảnh hưởng của hình học cong, bán kính cong nằm R được khảo sát trong dải từ 50 m đến 400 m, bao gồm các giá trị: 50 m, 100 m, 150 m, 200 m, 250 m, 300 m, 350 m và 400 m. Các giá trị này đại diện cho các mức độ cong gât đến cong thoải, cho phép đánh giá xu hướng biến đổi nội lực theo mức độ cong của kết cấu. Bên cạnh yếu tố hình học, điều kiện biên tại gối cầu cũng được xem là một tham số quan trọng ảnh hưởng trực tiếp đến ứng xử xoắn của dầm hộp cong. Xét 2 loại gối cầu:

- Loại 1 (Hình 12a): Gồm hai gối được bố trí gần vị trí lân cận hai sườn dầm, tạo thành cặp gối có khả năng khống chế chuyển vị xoay quanh trục dọc của dầm. Do khoảng cách giữa hai gối tạo ra cánh tay đòn theo phương ngang, mô men xoắn phát sinh trong dầm được truyền trực tiếp xuống trụ, làm tăng độ cứng xoắn tổng thể của hệ. Phương án này giúp hạn chế biến dạng xoắn tại mặt cắt gối, đồng thời làm xuất hiện bước nhảy mô men xoắn tại vị trí gối trong biểu đồ nội lực.

- Loại 2 (Hình 12b): Chỉ sử dụng một gối đặt tại vị trí trọng tâm mặt cắt, cho phép dầm xoay tự do quanh trục dọc, do đó mô men xoắn tại gối xấp xỉ bằng không. Phương án này giúp giảm đáng kể kích thước trụ đỡ, tạo kiến trúc thanh mảnh và gọn nhẹ hơn.



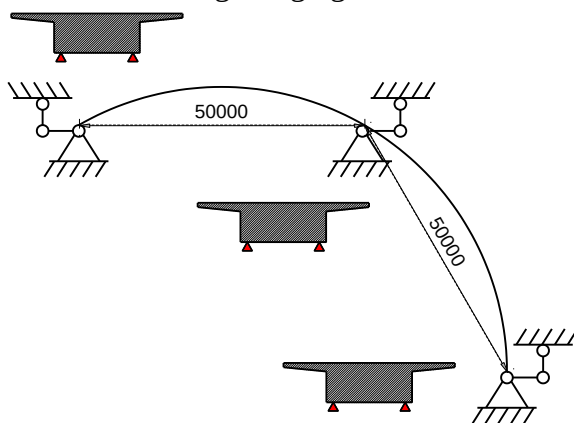
(a) Loại 1



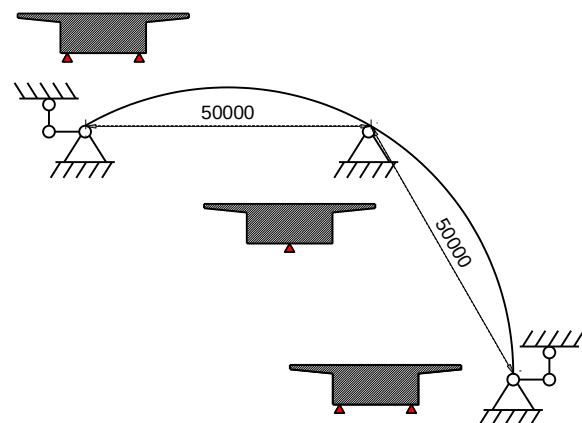
(b) Loại 2

Hình 12. Phương án bố trí gối cầu.

Hai phương án gối nêu trên đại diện cho hai mức độ ràng buộc xoắn điển hình trong thiết kế cầu dầm hộp cong, qua đó cho phép đánh giá ảnh hưởng của điều kiện biên đến phân bố nội lực và biến dạng của kết cấu. Với mỗi giá trị bán kính cong R , hai phương án điều kiện gối tựa này được khảo sát như được trình bày trong Hình 13. Mô hình phân tích phần tử hữu hạn được sử dụng trong nghiên cứu được thể hiện ở Hình 14.

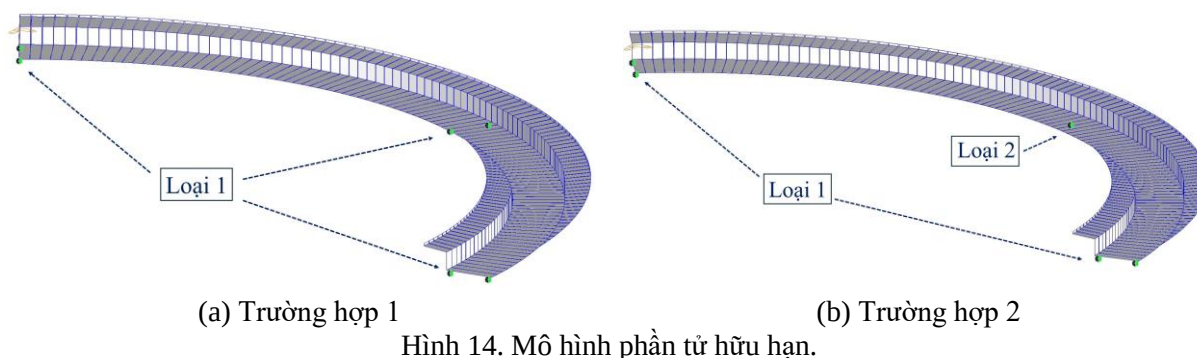


(a) Trường hợp 1



(b) Trường hợp 2

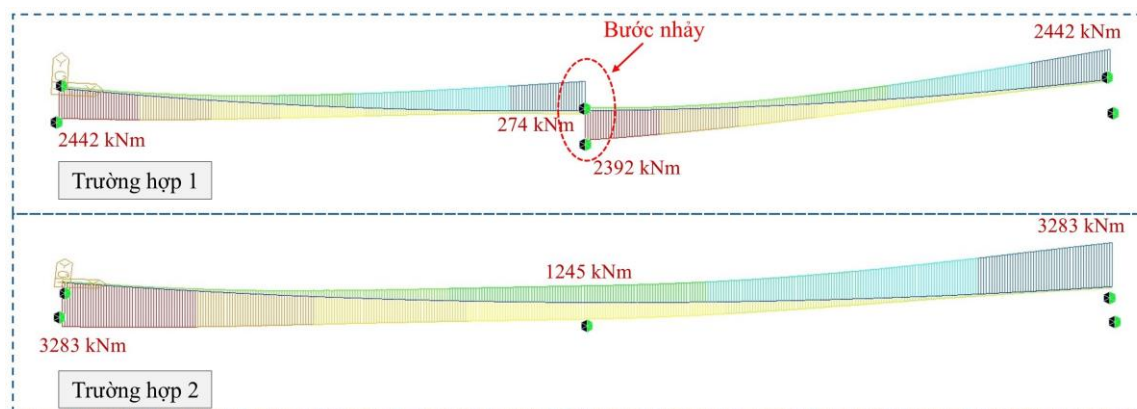
Hình 13. Mô hình khảo sát.



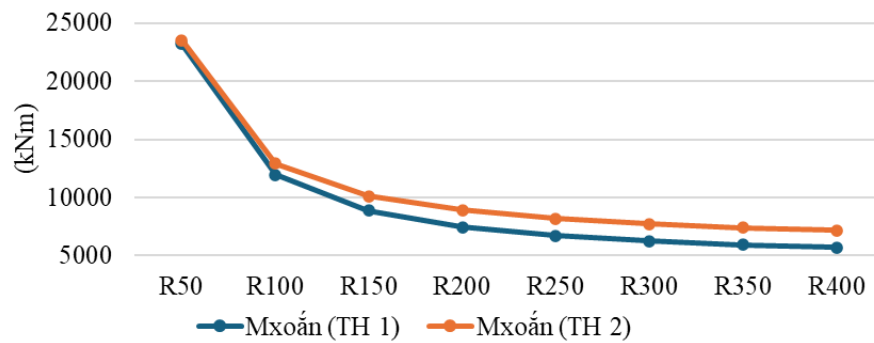
5. KẾT QUẢ PHÂN TÍCH

Bên cạnh tải trọng tĩnh, mô hình cũng được kiểm chứng với tải trọng HL-93 theo tiêu chuẩn AASHTO để đánh giá phản ứng của kết cấu dưới điều kiện khai thác thực tế. Hình 15 thể hiện biểu đồ bao mô men xoắn do hoạt tải gây ra ở trường hợp $R = 400$ m. Dễ dàng nhận thấy rằng tại các vị trí gối ngăn cản xoay, xuất hiện bước nhảy mô men xoắn. Ở trường hợp 2, khi gối giữa cho phép xoay, biểu đồ không còn xuất hiện bước nhảy. Điều này chứng minh rằng việc cho phép xoay tại gối giữa giúp giảm chênh lệch biến dạng xoắn giữa các nhịp, làm mềm kết cấu theo phương xoắn, từ đó cải thiện khả năng làm việc liên tục của toàn hệ dầm. Tuy nhiên, gối cho phép xoay tạo điều kiện cho biến dạng xoắn phát triển qua các nhịp, dẫn đến mô men xoắn tích lũy ở các gối không cho phép xoay lớn hơn.

Hình 16, Hình 17, Hình 18 thể hiện kết quả nội lực lớn nhất được tổ hợp ở trạng thái giới hạn cường độ 1 (TTGH CD 1). Hình 19 thể hiện kết quả độ võng do tổ hợp tải trọng ở trạng thái giới hạn sử dụng 1 (TTGH SD 1). Kết quả phân tích cho thấy ảnh hưởng của bán kính cong đến các đại lượng nội lực và chuyển vị có tính phi tuyến. Trong khoảng $R=400$ m đến $R=150$ m, mô men uốn, lực cắt và độ võng hầu như không thay đổi đáng kể, trong khi mô men xoắn tăng khoảng 1,6 lần. Khi bán kính tiếp tục giảm từ $R=150$ m xuống $R=50$ m, các đại lượng bắt đầu biến thiên rõ rệt hơn: mô men uốn và lực cắt tăng khoảng 1,1 lần, độ võng tăng khoảng 1,4 lần, và mô men xoắn tăng mạnh khoảng 2,6 lần. Do đó, đối với các cầu cong có bán kính nhỏ hơn 150 m, việc xét đến đầy đủ các hiệu ứng xoắn là đặc biệt quan trọng nhằm đảm bảo tính chính xác và an toàn trong thiết kế.



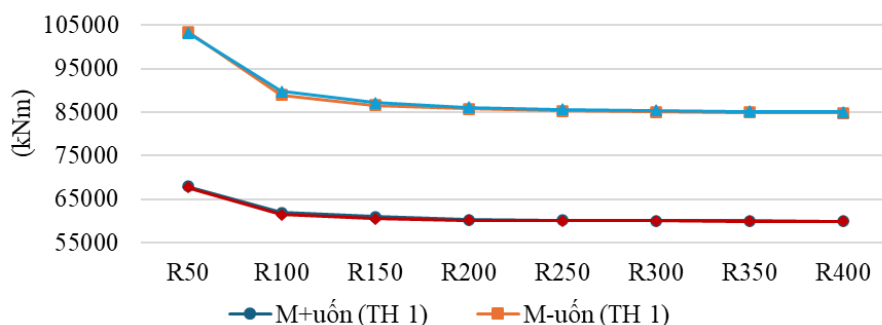
Hình 15. Biểu đồ bao mô men xoắn do hoạt tải HL-93 (trường hợp $R = 400$ m).



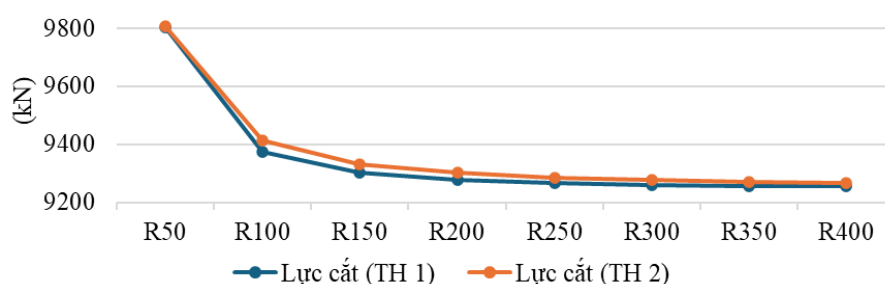
Hình 16. Mô men xoắn lớn nhất (tổ hợp ở TTGH CĐ 1).

Biểu đồ Hình 16 thể hiện sự biến thiên của mô men xoắn cực đại theo bán kính cong R , dưới hai điều kiện gối khác nhau. Dễ dàng nhận thấy rằng với cùng một giá trị R , Trường hợp 2 luôn tạo ra mô men xoắn lớn hơn so với Trường hợp 1. Cũng cần lưu ý rằng trong mô hình này, tải trọng bánh xe được áp dụng có thể được di chuyển lệch trục dọc của dầm. Tức là ở trường hợp bất lợi nhất, tải trọng bánh xe không đặt đúng theo trục đối xứng hình học của tiết diện. Do đó, ngay cả trong trường hợp mặt bằng cầu thẳng hoàn toàn ($R \rightarrow \infty$), mô men xoắn vẫn xuất hiện do sự mất cân bằng tải trọng ngang tại tiết diện, chứ không chỉ do độ cong hình học. Điều này giải thích vì sao trong biểu đồ mô men xoắn theo bán kính cong, cả hai đường cong đều không tiệm cận giá trị bằng 0 khi R tăng, mà tiến dần đến một giá trị xấp xỉ 5700 kNm (TH 1) và 7200 kNm (TH 2). Đây là nội lực xoắn do đặc tính phi đối xứng của tải trọng gây ra, và cần được xét đến ngay cả trong các cầu thẳng nếu tải trọng không phân bố đối xứng hoặc hệ dầm không hoàn toàn đồng trục với hướng di chuyển của xe.

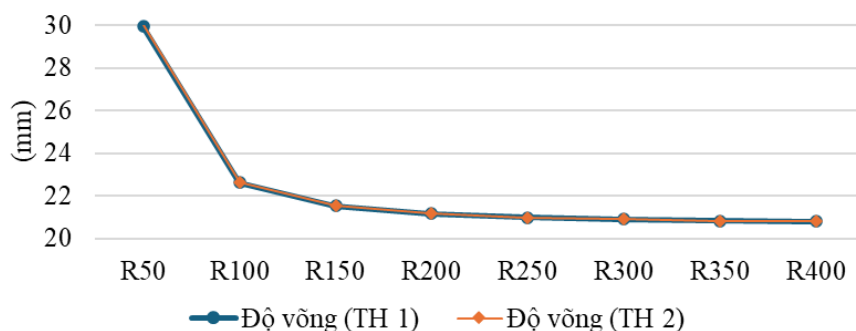
Khác với mô men xoắn, Hình 17, Hình 18 và Hình 19 cho thấy các hiệu ứng tải trọng khác như mô men uốn, lực cắt và độ võng lại cho thấy sự tương đồng rõ rệt giữa hai trường hợp gối. Điều này cho thấy các đại lượng này không bị chi phối nhiều bởi điều kiện ràng buộc xoay tại gối, mà chủ yếu phụ thuộc vào sơ đồ nhịp và tải trọng. Đồng thời, kết quả cũng cho thấy mức độ nhạy cảm của các đại lượng này đối với bán kính cong là thấp hơn đáng kể so với mô men xoắn. Xu hướng này cũng cho thấy rằng khi bán kính đủ lớn, cầu cong bắt đầu tiệm cận với ứng xử của cầu thẳng. Điều này củng cố giả thiết rằng việc xét đến điều kiện gối và độ cong là đặc biệt quan trọng trong miền cong mạnh (R nhỏ), nhưng có thể đơn giản hóa khi thiết kế cầu có độ cong nhẹ.



Hình 17. Mô men uốn dương (M+) lớn nhất và mô men uốn âm (M-) lớn nhất (tổ hợp ở TTGH CĐ 1).



Hình 18. Lực cắt lớn nhất (tổ hợp ở TTGH CĐ 1).



Hình 19. Độ võng lớn nhất do hoạt tải HL-93 gây ra (ở TTGH SD 1).

6. KẾT LUẬN

Bài báo nghiên cứu ảnh hưởng của bán kính cong và điều kiện gối tựa đến ứng xử của cầu dầm hộp bê tông cốt thép liên tục 2 nhịp. Kết quả nghiên cứu, phân tích cho thấy:

Mô hình phần tử hữu hạn được xây dựng cho độ tin cậy cao, thể hiện qua sự tương đồng tốt giữa kết quả tính toán theo phương pháp lý thuyết và phương pháp phần tử hữu hạn. Mức sai lệch nhỏ cho thấy mô hình số đã phản ánh đúng đặc trưng làm việc của dầm cong, đồng thời đủ cơ sở để sử dụng trong các phân tích mở rộng.

Ảnh hưởng của bán kính cong đến ứng xử của dầm là phi tuyến và đặc biệt rõ rệt khi R nhỏ. Kết quả phân tích cho thấy trong khoảng R=400 m đến R=150 m, mô men uốn, lực cắt và độ võng gần như không thay đổi, trong khi mô men xoắn tăng khoảng 1,6 lần. Khi bán kính tiếp tục giảm từ R=150 m xuống R=50 m, mô men uốn và lực cắt tăng khoảng 1,1 lần, độ võng tăng khoảng 1,4 lần, và mô men xoắn tăng mạnh khoảng 2,6 lần. Điều này cho thấy ảnh hưởng của bán kính cong đến ứng xử kết cấu là phi tuyến, trong đó mô men xoắn là đại lượng nhạy cảm nhất với sự thay đổi của bán kính cong, đặc biệt trong miền cong mạnh.

Điều kiện biên ảnh hưởng trực tiếp đến mô men xoắn. Trường hợp gối cho phép xoay (TH 2) tạo điều kiện cho biến dạng xoắn phát triển, dẫn đến mô men xoắn tích lũy về các gối không cho phép xoay lớn hơn, đặc biệt là khi bán kính đường cong nằm lớn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. J. S. Davidson, R. S. Abdalla, M. Madhavan, Stability of Curved Bridges During Construction, University Transportation Center for Alabama, 2002.
- [2]. R. Wodzinowski, K. Sennah, H. M. Afefy, Free vibration analysis of horizontally curved composite concrete-steel I-girder bridges, Journal of Constructional Steel Research, 140 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2017.10.011>

- [3]. T. O. S. o. Bridges, AASHTO Guide Specifications for Horizontally Curved Steel Girder Highway Bridges, 2003: With Design Examples for I-girder and Box-girder Bridges, American Association of State Highway & Transportation Officials, 2003.
- [4]. AASHTO, LRFD Bridge Design Specification, American association of state highway and transportation officials, 2012.
- [5]. A.-H. Zureick, R. Naqib, J. M. Yadlosky, Curved steel bridge research project, interim report I: Synthesis, United States. Department of Transportation. Federal Highway Administration, 1994.
- [6]. D. Linzell, D. Hall, D. White, Historical perspective on horizontally curved I girder bridge design in the United States, Journal of Bridge Engineering, 9 (2004). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2004\)9:3\(218\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2004)9:3(218))
- [7]. W. Li, L. Tham, Y. Cheung, Curved box-girder bridges, Journal of Structural Engineering, 114 (1988). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1988\)114:6\(1324\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1988)114:6(1324))
- [8]. K. Hasebe, S. Usuki, Y. Horie, Shear lag analysis and effective width of curved girder bridges, Journal of Engineering Mechanics, 111 (1985). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1985\)111:1\(87\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1985)111:1(87))
- [9]. S. Tiwari, P. Bhargava, Load distribution factors for composite multicell box girder bridges, Journal of The Institution of Engineers (India): Series A, 98 (2017). <https://doi.org/10.1007/s40030-017-0243-x>
- [10]. J. Sali, R. P. Mohan, Parametric study of single cell box girder bridge under different radii of curvature, Applied Mechanics and Materials, 857 (2017). <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.857.165>
- [11]. P. Agarwal, P. Pal, P. K. Mehta, Finite element analysis of reinforced concrete curved box-girder bridges, Advances in Bridge Engineering, 4 (2023).
- [12]. H. Cao, Y. Lu, D. Chen, Analysis of vehicle-bridge coupling vibration characteristics of curved girder bridges, Applied Sciences, 14 (2024).
- [13]. S. Zhou, B. Sedhain, N. Sthapit, Research and guideline synthesis for horizontally curved steel I-girder bridges, Bridge Structures, (2026).
- [14]. B. Liu, T. Wang, M. Mao, W. Han, J. Wang, K. Xu, Response characteristics of curved girder bridges with single-column piers during the whole overturning process: Experimental and numerical study, Structures, 66 (2024).
- [15]. H. Gao, J. Jian, B. Li, Y. Sun, H. Liu, Design, construction and monitoring of continuous curved box girder bridge during bearing replacement-case study, Structure and Infrastructure Engineering, 21 (2025).
- [16]. A. A. Nassr, H. H. Abd-el-Rahim, F. Kaiser, A. E.-h. El-sokkary, Topology optimization of horizontally curved box girder diaphragms, Engineering Structures, 256 (2022).
- [17]. F. Guo, H. Cai, H. Li, Impact Coefficient Analysis of Curved Box Girder Bridge Based on Vehicle-Bridge Coupling, Mathematical Problems in Engineering, 2022 (2022).
- [18]. Đ. Đ. Việt, Một số phân tích và khảo sát thiết kế kháng xoắn cầu dầm hộp cong nhịp liên tục bê tông cốt thép dự ứng lực, Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải, 72 (2021).
- [19]. TCVN 11823-2017, Thiết kế cầu đường bộ, Bộ Khoa học Công nghệ, Việt Nam, 2017.
- [20]. V. Z. Vlasov, Thin-walled elastic beams, PST Catalogue, 428 (1959).
- [21]. S. P. Timoshenko, Strength of Material: Part II Advanced Theory and Problems, D. Van Nostrand, 1947.
- [22]. A. M. Okeil, S. El-Tawil, Warping stresses in curved box girder bridges: case study, Journal of Bridge Engineering, 9 (2004).