



DYNAMIC RESPONSE OF FUNCTIONALLY GRADED AUXETIC GRAPHENE-ORIGAMI-REINFORCED PLATES ON VISCOELASTIC FOUNDATIONS UNDER BLAST LOADING

Do Duy Nam, Le Pham Binh, Le Truong Son *

Faculty of Mechanical Engineering, Le Quy Don Technical University, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 27/01/2026

Revised: 26/3/2026

Accepted: 18/5/2026

Published online: 15/6/2026

<https://doi.org/10.47869/tcsj.77.5.9>

* *Corresponding author*

Email: letruongson01@gmail.com; Tel: 0982842946

Abstract. The primary objective of this study is to employ the finite element method (FEM) to investigate the vibration and dynamic responses of functionally graded auxetic plates reinforced with graphene origami (GOri), hereafter referred to as FG-GOEAM plates, resting on a viscoelastic foundation (VEF) and subjected to thermal effects. The FG-GOEAM plate is modeled as a multilayered structure in which the GOri mass fraction varies continuously through the plate thickness. The governing equations of motion are derived using Hamilton's principle, enabling a comprehensive description of the coupled thermo-mechanical behavior of the plate–foundation system. After validating the accuracy and convergence of the proposed numerical model, a series of parametric studies is conducted to examine the influences of the GOri mass fraction, GOri distribution patterns, temperature, boundary conditions, foundation stiffness, and the degree of graphene origami folding on the free vibration characteristics and the dynamic response of the plates subjected to blast loading.

Keywords: GOri; auxetic honeycomb; dynamic analysis; FEM; quasi-3D.



ĐÁP ỨNG ĐỘNG CỦA TẤM AUXETIC FGM GIA CƯỜNG GRAPHENE ORIGAMI TRÊN NỀN ĐÀN NHỚT CHỊU TẢI TRỌNG NỔ

Đỗ Duy Nam, Lê Phạm Bình, Lê Trường Sơn*

Khoa Cơ Khí, Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 27/01/2026

Ngày nhận bài sửa: 26/3/2026

Ngày chấp nhận đăng: 18/5/2026

Ngày xuất bản Online: 15/6/2026

<https://doi.org/10.47869/tcsj.77.5.9>

* Tác giả liên hệ

Email: letruongson01@gmail.com; Tel: 0982842946

Tóm tắt. Mục tiêu của nghiên cứu này là ứng dụng phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method-FEM) để phân tích các đặc trưng dao động và phản ứng động của tấm auxetic phân cấp chức năng (FG) được gia cường graphene origami (GOri), sau đây gọi là tấm FG-GOEAM, đặt trên nền đàn hồi nhớt (Visco-elastic Foundation – VEF) và có xét đến ảnh hưởng của trường nhiệt. Tấm FG-GOEAM được mô hình hóa dưới dạng kết cấu nhiều lớp, trong đó hàm lượng GOri thay đổi theo chiều dày của tấm. Các phương trình vi phân chi phối của hệ được thiết lập dựa trên nguyên lý Hamilton, trong đó mô tả đầy đủ tương tác cơ-nhiệt giữa tấm và nền đàn hồi nhớt. Sau khi kiểm chứng độ chính xác và tính hội tụ của mô hình số, một loạt các ví dụ tính toán được tiến hành nhằm khảo sát ảnh hưởng của tỷ lệ khối lượng GOri, mô hình phân bố GOri, nhiệt độ, điều kiện biên, độ cứng của nền, cũng như mức độ gấp nếp của graphene origami đến đặc tính dao động tự do và phản ứng động của tấm dưới tác dụng tải trọng xung (blast load – BL).

Từ khóa: tấm auxetic, phân cấp chức năng, phần tử tứ giác, Quasi-3D.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vật liệu phân cấp chức năng (Functionally Graded Materials – FGMs) thu hút sự quan tâm lớn nhờ khả năng điều chỉnh liên tục các tính chất cơ–nhiệt thông qua sự biến thiên thành phần vật liệu theo chiều dày [1,2]. Kể từ khi được đề xuất vào những năm 1980, FGMs đã được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực như hàng không vũ trụ, công nghiệp hạt nhân, ô tô và kỹ thuật sinh học [3]. Cùng với sự phát triển của khoa học vật liệu, nhiều mô hình phân tích tiên tiến đã được xây dựng nhằm mô tả ứng xử dao động, ổn định và tương tác với nền đàn hồi nhớt của các kết cấu FGM [4–6].

Song song đó, các siêu vật liệu có tính chất auxetic với hệ số Poisson âm (negative Poisson’s ratio – NPR) đã nổi lên như một lớp vật liệu kiến trúc đặc biệt nhờ khả năng hấp thụ năng lượng và tăng cường độ cứng cắt. Việc tích hợp đặc tính auxetic vào hệ vật liệu phân cấp chức năng mở ra tiềm năng thiết kế các kết cấu có khả năng điều chỉnh hiệu năng linh hoạt [7]. Trong số các hướng tiếp cận triển vọng, graphene origami (GOri) cho phép điều chỉnh NPR, mô đun đàn hồi và các tính chất nhiệt thông qua mức độ gấp nếp và hàm lượng vật liệu [8,9].

Dựa trên cấu hình Miura-origami [10], Zhao và cộng sự [11] đã phát triển vật liệu auxetic gia cường graphene origami (GOEAM), trong đó các đặc trưng cơ - nhiệt phụ thuộc mạnh vào mức độ gấp nếp, hàm lượng GOri và điều kiện nhiệt. Khi được tích hợp vào nền kim loại, các đơn vị GOri cho thấy khả năng cải thiện đáng kể độ cứng uốn, độ bền phá hủy và hiệu ứng auxetic của vật liệu [12].

Gần đây, các tấm FG-GOEAM với sự biến thiên hàm lượng GOri theo từng lớp đã được đề xuất nhằm kết hợp ưu điểm của phân cấp chức năng và hiệu ứng auxetic [13]. Một số nghiên cứu đã tập trung vào phân tích uốn, ổn định và dao động tự do của các tấm FG-GOEAM [14–16], cho thấy ảnh hưởng đáng kể của dạng phân bố GOri, mức độ gấp nếp, số lớp và điều kiện nhiệt. Tuy nhiên, các nghiên cứu về đáp ứng động học của tấm FG-GOEAM dưới tải phụ thuộc thời gian vẫn còn rất hạn chế, ngoại trừ một số công trình gần đây sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn [17].

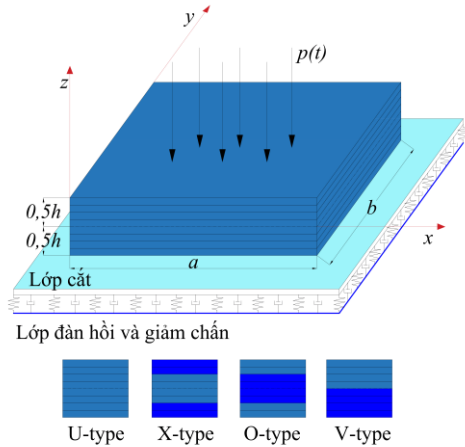
Xuất phát từ những khoảng trống nêu trên, nghiên cứu này đề xuất một mô hình phần tử hữu hạn quasi-3D mới để phân tích phản ứng động của tấm FG-GOEAM đặt trên nền đàn hồi nhớt. Mô hình sử dụng phần tử tứ giác bốn nút (Q4) với nội suy hỗn hợp Lagrange–Hermite, cho phép mô phỏng chính xác biến dạng cắt ngang và hiệu ứng giãn dày thông qua trường chuyển vị quasi-3D [18–22]. Cách tiếp cận này cung cấp một công cụ số hiệu quả để khảo sát ảnh hưởng của thông số hình học, tính chất vật liệu đến đáp ứng động của tấm FG-GOEAM, qua đó hỗ trợ thiết kế và tối ưu các kết cấu auxetic tiên tiến trong kỹ thuật cơ khí, xây dựng và hàng không vũ trụ.

2. MÔ TẢ BÀI TOÁN VÀ THIẾT LẬP MÔ HÌNH TOÁN

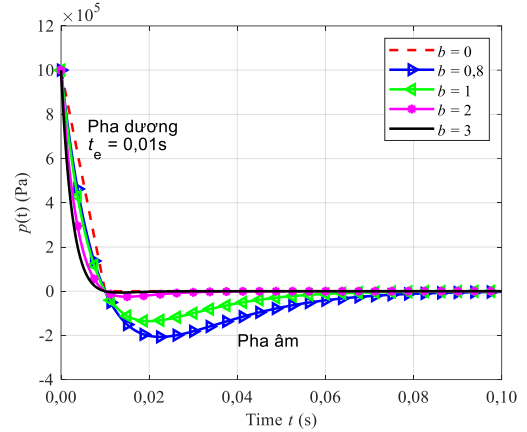
2.1. Mô hình tấm FG-GOEAM

Xét tấm FG-GOEAM chữ nhật gồm tổng cộng n_L lớp, có kích thước hình học lần lượt là chiều rộng a , chiều dài b và chiều dày h như minh họa trong Hình 1. Mặc dù hàm lượng graphene origami (GOri) được giả thiết phân bố đồng đều trong từng lớp, nhưng thay đổi từ lớp này sang lớp khác theo một quy luật phân bố xác định của tỷ phần khối lượng GOri theo chiều dày W_{Gr} . Theo Zhao và cộng sự [23], tỷ phần thể tích GOri V_{Gr} của lớp thứ k được xác định tương ứng với các mô hình phân bố GOri khác nhau như sau:

$$\begin{aligned}
 \text{U-type: } V_{Gr}(k) &= V_{Gr}^{ratio}; \text{ X-type: } V_{Gr}(k) = 2V_{Gr}^{ratio} \frac{|2k - n_L - 1|}{n_L} \\
 \text{O-type: } V_{Gr}(k) &= 2V_{Gr}^{ratio} \left(1 - \frac{|2k - n_L - 1|}{n_L}\right); \text{ V-type: } V_{Gr}(k) = V_{Gr}^{ratio} \frac{2k - 1}{n_L}.
 \end{aligned} \tag{1}$$



Hình 1. Bốn dạng phân bố GOrl và mô hình tấm FG-GOEM đặt trên nền đàn hồi nhớt.



Hình 2. Pha tải trọng nổ theo thời gian.

Trong đó, U-type, X-type, O-type và V-type lần lượt biểu thị các dạng phân bố kiểu U, X, O và V. Kiểu U có hàm lượng GOrl phân bố đồng đều trên toàn bộ chiều dày; kiểu X có hàm lượng GOrl lớn hơn ở các lớp trên và dưới; kiểu O có hàm lượng GOrl lớn hơn gần mặt trung hòa; trong khi kiểu V có hàm lượng GOrl tăng dần từ đáy lên đỉnh. Trong đó, V_{Gr}^{ratio} là tỷ phần thể tích GOrl trung bình của lớp thứ k , đại lượng này liên hệ với tỷ phần khối lượng GOrl W_{Gr} [23]:

$$V_{Gr}^{ratio} = \frac{W_{Gr}}{W_{Gr} + \left(\frac{\rho_{Gr}}{\rho_{Cu}}\right)(1 - W_{Gr})} \tag{2}$$

trong đó ρ_{Cu} và ρ_{Gr} lần lượt là khối lượng riêng tương đối của đồng (Cu) và graphene. Hình 1 minh họa sơ đồ bốn dạng phân bố GOrl nêu trên, trong đó vùng có hàm lượng GOrl lớn hơn được biểu diễn bằng màu đậm hơn.

Các tính chất vật liệu của lớp thứ k tại nhiệt độ T được xác định theo mô hình vi cơ học di truyền (genetic micromechanical model) như sau:

$$\begin{aligned}
 E_c(k) &= \frac{1 + \xi \eta V_{Gr}(k)}{1 - \eta V_{Gr}(k)} E_{Cu} \left(1,11 - 1,22V_{Gr}(k) - 0,134 \frac{T}{T_0} + 0,559V_{Gr}(k) \frac{T}{T_0} \right. \\
 &\quad \left. - 5,5H_{Gr} V_{Gr}(k) + 38H_{Gr} (V_{Gr}(k))^2 - 20,6H_{Gr}^2 (V_{Gr}(k))^2 \right)
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$v_c(k) = (v_{Gr}V_{Gr}(k) + v_{Cu}V_{cu}) \left(1,01 - 1,43V_{Gr}(k) + 0,165\frac{T}{T_0} + 16,8H_{Gr}V_{Gr}(k) - 1,1H_{Gr}V_{Gr}(k)\frac{T}{T_0} + 16H_{Gr}^2(V_{Gr}(k))^2 \right)$$

$$\rho_c(k) = (\rho_{Gr}V_{Gr}(k) + \rho_{Cu}V_{cu}) \left(1,01 - 2,01(V_{Gr}(k))^2 - 0,131\frac{T}{T_0} \right)$$

trong đó $E_c(k)$, $v_c(k)$ và $\rho_c(k)$ lần lượt là mô đun đàn hồi hiệu dụng, hệ số Poát xng hiệu dụng và khối lượng riêng hiệu dụng của mỗi lớp, T_0 là nhiệt độ phòng. Các đại lượng có chỉ số Gr và Cu tương ứng với pha gia cường GOrí và nền đồng (Cu). Các hệ số η và ξ được xác định bởi:

$$\eta = \frac{\frac{E_{Gr} - 1}{E_{Cu}}}{\frac{E_{Gr}}{E_{Cu}} + \xi}, \xi = 2\frac{l_{Gr}}{t_{Gr}} \quad (4)$$

trong đó l_{Gr} và t_{Gr} lần lượt là chiều dài và chiều dày của tấm graphene, $T_0=300K$, và H_{Gr} biểu thị mức độ gấp nếp của graphene origami (GOrí folding degree).

2.2. Mô hình nền đàn nhót

Phản lực của nền đàn hồi nhót (viscoelastic foundation-VEF) được xác định theo mô hình Visco–Winkler–Pasternak ba tham số như sau [24]:

$$\mathfrak{F} = k_w w - k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + C_d \frac{\partial}{\partial t} w \quad (5)$$

trong đó k_w , k_p và C_d lần lượt là độ cứng lò xo, độ cứng lớp cắt và hệ số cản nhót của nền. Trong đó, độ cứng lò xo mô phỏng phản lực đàn hồi cục bộ, lớp cắt thể hiện tương tác giữa các điểm nền, và hệ số cản nhót mô phỏng khả năng tiêu tán năng lượng trong các vật liệu như lớp polymer, nền đất hoặc lớp bảo vệ chống nổ.

2.3. Mô hình tải trọng nổ

Trong nghiên cứu này, tải trọng nổ được biểu diễn bằng phương trình Friedlander cải tiến, mô tả một xung suy giảm theo hàm mũ [17]:

$$p(t) = p_0 \left(1 - \frac{t}{t_e} \right) e^{-\frac{m t}{t_e}} \quad (6)$$

trong đó, t là thời gian kể từ khi tải xung bắt đầu tác dụng, p_0 biểu thị giá trị cực đại của tải tác dụng, giá trị này suy giảm theo hàm mũ cho đến khi kết thúc pha dương, được đặc trưng bởi thời gian tác dụng t_e , sau đó tải chuyển sang pha âm. Tham số m là hệ số suy giảm sóng, chi phối tốc độ suy giảm của xung và luôn mang giá trị dương. Hình 2 trình bày đáp ứng tải trọng ứng với một số giá trị phổ biến của b , trong đó $p_0 = 1MPa$ và $t_e = 0,01s$.

3. LÝ THUYẾT QUASI-3D VÀ THIẾT LẬP PHẦN TỬ HỮU HẠN

3.1. Trường chuyển vị quasi-3D và quan hệ vật liệu

Trường chuyển vị theo lý thuyết quasi-3D được xác định bởi [25]:

$$u = u_0 - zw_{0,x} + h_1(z)\varphi_x; v = v_0 - zw_{0,y} + h_1(z)\varphi_y; w = w_0 + h_2(z)\varphi_z \quad (7)$$

trong đó u_0 , v_0 và w_0 là các thành phần chuyển vị trong mặt phẳng trung hòa; φ_x và φ_y là các thành phần góc xoay quanh trục x và y ; φ_z biểu thị biến dạng giãn dày theo chiều dày; $h_1(z)$ và $h_2(z)$ lần lượt là các hàm mô tả biến dạng cắt ngang và biến dạng giãn dày theo chiều dày, được xác định như sau [25]:

$$h_1(z) = -8z + 10\frac{z^3}{h^2} + \frac{6z^5}{5h^4} + \frac{8z^7}{7h^6}; h_2(z) = \frac{3}{20}h_1'(z). \quad (8)$$

Mô hình quasi-3D xét đến biến dạng giãn dày theo chiều dày, dự đoán chính xác hơn ứng suất cắt ngang, không cần hệ số hiệu chỉnh cắt và độ chính xác cao hơn đối với tấm dày so với mô hình FSDT và HSDT.

Trường biến dạng được suy ra từ trường chuyển vị bởi:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\varepsilon}_1 + h_1(z)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + h_1'(z)\boldsymbol{\varepsilon}_3 + h_2(z)\boldsymbol{\varepsilon}_4 + h_2'(z)\boldsymbol{\varepsilon}_5 \quad (9)$$

trong đó:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ 0 \\ 0 \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{pmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} -w_{0,xx} \\ -w_{0,yy} \\ 0 \\ 0 \\ -w_{0,xy} \end{pmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ 0 \\ 0 \\ \beta_{y,x} + \beta_{x,y} \end{pmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_y \\ \beta_x \\ 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_{z,y} \\ \beta_{z,x} \\ 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Quan hệ ứng suất biến dạng theo định luật Hooke như sau [26]:

$$\boldsymbol{\sigma}(k) = \mathbf{Q}(k)\boldsymbol{\varepsilon}(k); \quad (11)$$

trong đó:

$$\mathbf{Q}(k) = \frac{E_c(k)}{1+\nu_c(k)} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_c(k)}{1-2\nu_c(k)} & \frac{\nu_c(k)}{1-2\nu_c(k)} & \frac{\nu_c(k)}{1-2\nu_c(k)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_c(k)}{1-2\nu_c(k)} & \frac{1-\nu_c(k)}{1-2\nu_c(k)} & \frac{\nu_c(k)}{1-2\nu_c(k)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_c(k)}{1-2\nu_c(k)} & \frac{\nu_c(k)}{1-2\nu_c(k)} & \frac{1-\nu_c(k)}{1-2\nu_c(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Sử dụng nguyên lý Hamilton, phương trình chuyển động của tấm được biểu diễn bởi [26]:

$$\int_0^{\tau} (\delta U + \delta U^{\mathfrak{S}} + \delta W - \delta T) dt = 0, \quad (13)$$

trong đó δU , $\delta U^{\mathfrak{S}}$, δW và δT lần lượt biểu thị năng lượng biến dạng ảo, công ảo do nền, công ảo của lực ngoài, và động năng ảo.

Các thành phần này lần lượt được biểu diễn như sau:

$$\delta U = \int_S (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\square} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) dS, \quad (14)$$

trong đó:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\square} = \begin{bmatrix} \square_0 & \square_1 & \square_2 & \square_3 & \square_4 & \square_5 \\ & \square_6 & \square_7 & \square_8 & \square_9 & \square_{10} \\ & & \square_{11} & \square_{12} & \square_{13} & \square_{14} \\ & & & \square_{15} & \square_{16} & \square_{17} \\ & & & & \square_{18} & \square_{19} \\ \text{sym} & & & & & \square_{20} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

với \square_1 tới \square_{20} được tính bởi:

$$(\square_1, \dots, \square_{20}) = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z(k)}^{z(k+1)} Q(k) \mathbf{I}_{6 \times 6} (1, z, h_1, h_1', h_2, h_2', z^2, zh_1, zh_1', zh_2, zh_2', h_1^2, h_1 h_1', h_1 h_2, h_1 h_2', (h_1')^2, h_1' h_2, h_1' h_2', h_2^2, h_2 h_2', (h_2')^2) dz, \quad (16)$$

$$\delta U^{\mathfrak{S}} = \int_S \mathfrak{Z} \delta w dS, \quad \delta W = \int_S -p(t) \delta w dS \quad (17-18)$$

$$\delta T = \int_S \rho_c(z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dS = \int_S \delta \bar{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\kappa} \dot{\bar{\mathbf{q}}} dS, \quad (19a)$$

Sau khi tích phân từng phần ta có:

$$\delta T = \int_S \delta \bar{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\kappa} \dot{\bar{\mathbf{q}}} dS = - \int_S \delta \bar{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\kappa} \ddot{\bar{\mathbf{q}}} dS, \quad (19b)$$

trong đó $\bar{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)^T$, $\mathbf{q}_0 = (\dot{u}_0, \dot{v}_0, \dot{w}_0)^T$, $\mathbf{q}_1 = (-\dot{w}_{0,x}, -\dot{w}_{0,y}, 0)^T$, $\mathbf{q}_2 = (\dot{\beta}_x, \dot{\beta}_y, 0)^T$ và $\mathbf{q}_3 = (0, 0, \dot{\beta}_z)^T$. Ma trận các thành phần quán tính được xác định bởi:

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_0 & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ & \kappa_4 & \kappa_5 & \kappa_6 \\ & & \kappa_7 & \kappa_8 \\ \text{sym} & & & \kappa_9 \end{bmatrix} \quad (20)$$

trong đó các ma trận κ_0 tới κ_9 được xác định bởi:

$$(\kappa_0, \dots, \kappa_9) = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{z(k)}^{z(k+1)} \rho_c(k) \mathbf{I}_{3 \times 3} (1, z, h_1, h_2, z^2, zh_1, zh_2, h_1^2, h_1 h_2, h_2^2) dz \quad (21)$$

Phương trình chuyển động dạng yếu của tấm được biểu diễn như sau [27]:

$$\int_S \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\square} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dS + \int_S \mathfrak{Z} \delta w dS + \int_S \delta \bar{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\kappa} \ddot{\bar{\mathbf{q}}} dS = \int_S p(t) \delta w dS. \quad (22)$$

3.2. Thiết lập phần tử hữu hạn

Sử dụng phần tử tứ giác bốn nút (Q4), trong đó mỗi nút có 8 bậc tự do (DOFs) theo lý thuyết quasi-3D, véc tơ chuyển vị nút của phần tử được xác định như sau:

$$\mathbf{q}_e = \{u_{0j}, v_{0j}, \varphi_{xj}, \varphi_{yj}, \varphi_{zj}, w_j, w_{xj}, w_{yj}\} \quad j = 1, \dots, 4 \quad (23)$$

Các thành phần chuyển vị $\{u_{0j}, v_{0j}, \varphi_{xj}, \varphi_{yj}, \varphi_{zj}\}$ được xấp xỉ bởi:

$$\{u_0, v_0, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\} = \sum_{j=1}^4 L_j \{u_{0j}, v_{0j}, \varphi_{xj}, \varphi_{yj}, \varphi_{zj}\}, \quad (24)$$

với L là các hàm nội suy Lagrange.

Các thành phần chuyển vị $\{w_{0j}, w_{xj}, w_{yj}\}$ được xấp xỉ như sau:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^4 (\Phi_j w_j + \Phi_j^{wx} w_{xj} + \Phi_j^{wy} w_{yj}), \\ w_x &= \sum_{j=1}^4 ((\Phi_j)_{,x} w_j + (\Phi_j^{wx})_{,x} w_{xj} + (\Phi_j^{wy})_{,x} w_{yj}), \\ w_y &= \sum_{j=1}^4 ((\Phi_j)_{,y} w_j + (\Phi_j^{wx})_{,y} w_{xj} + (\Phi_j^{wy})_{,y} w_{yj}) \end{aligned} \quad (25)$$

với Φ là các hàm Hermite.

Thay thế các thành phần chuyển vị vào trường biến dạng trong phương trình (9), thu được:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{B}_0 \ \mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4 \ \mathbf{B}_5]^T \mathbf{q}_e \quad (26)$$

trong đó các ma trận quan hệ biến dạng–chuyển vị được xác định bởi:

$$\mathbf{B}_0 = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} L_{j,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{j,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{j,y} & L_{j,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (27a)$$

$$\mathbf{B}_1 = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi_{j,xx} & -\Phi_{j,xx}^{wx} & -\Phi_{j,xx}^{wy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi_{j,yy} & -\Phi_{j,yy}^{wx} & -\Phi_{j,yy}^{wy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\Phi_{j,xy} & -2\Phi_{j,xy}^{wx} & 2\Phi_{j,xy}^{wy} \end{bmatrix}, \quad (27b)$$

$$\mathbf{B}_2 = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_{j,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{j,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{j,y} & L_{j,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (27c-d)$$

$$\mathbf{B}_4 = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{j,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{j,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27e-f)$$

Phương trình chuyển động của phần tử tấm, sau khi thay thế các biểu thức (11) và (26) vào phương trình (22), được xác định như sau:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{C}_e^{\zeta} \dot{\mathbf{q}}_e (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_e^{\zeta}) \mathbf{q}_e = \mathbf{F}_e, \quad (28)$$

trong đó:

Ma trận độ cứng phần tử tấm:

$$\mathbf{K}_e = \int_S (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\square} \mathbf{B}) dS. \quad (29)$$

Ma trận độ cứng đàn hồi của nền:

$$\mathbf{K}_e^{\zeta} = \int_S [k_w \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + k_p (\mathbf{N}_{w,x}^T \mathbf{N}_{w,x} + \mathbf{N}_{w,y}^T \mathbf{N}_{w,y})] dS. \quad (30)$$

Ma trận cản nhớt của nền:

$$\mathbf{C}_e^{\zeta} = \int_S (c_d \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w) dS. \quad (31)$$

trong đó $\mathbf{N}_w = \sum_{j=1}^4 [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\Phi_j \ -\Phi_j^{(x)} \ -\Phi_j^{(y)}]$.

Ma trận khối lượng phần tử:

$$\mathbf{M}_e = \int_S \mathbf{N}_s^T \mathbf{m} \mathbf{N}_s dS, \quad (32)$$

với $\mathbf{N}_s = [\mathbf{N}_0; \mathbf{N}_1; \mathbf{N}_2; \mathbf{N}_3]$, trong đó các ma trận con được xác định bởi:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_0 &= \sum_{j=1}^4 [0 \ 0 \ \Phi_j], \mathbf{N}_1 = \sum_{j=1}^4 [-\Phi_j^{wx} \ -\Phi_j^{wy} \ 0], \\ \mathbf{N}_2 &= \sum_{j=1}^4 [L_j \dot{\phi}_{xj} \ L_j \dot{\phi}_{yj} \ 0], \mathbf{N}_3 = \sum_{j=1}^4 [0 \ 0 \ L_j \dot{\phi}_{zj}]. \end{aligned} \quad (33)$$

Véc tơ tải trọng quy nút phần tử:

$$\mathbf{F}_e = \int_S \mathbf{N}_w^T \mathbf{p} dS, \quad (34)$$

trong đó $\mathbf{N}_w^T = \sum_{j=1}^4 [\Phi_j \quad \Phi_j^{wx} \quad \Phi_j^{wy}]$; $\mathbf{p} = \sum_{j=1}^4 [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad p(t) \quad 0 \quad 0]^T$.

Sau khi lắp ráp các ma trận và véc tơ phần tử vào vào ma trận tổng thể theo thuật toán PTHH, phương trình chuyển động của tấm FG-GOEAM có thể được biểu diễn dưới dạng [27]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^3\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^3)\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (35)$$

trong đó \mathbf{M} , \mathbf{C}^3 , \mathbf{K} , và \mathbf{K}^3 lần lượt biểu thị ma trận khối lượng tổng thể, ma trận cản tổng thể, ma trận độ cứng tổng thể, và ma trận độ cứng nền, \mathbf{F} biểu diễn véc tơ tải trọng tổng thể.

Sau khi áp đặt các điều kiện biên (BCs), phương trình (35) được giải trong miền thời gian bằng phương pháp Newmark- β [28]:

4. KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

Trong bài báo này, đặc trưng cơ học của các vật liệu thành phần được xác định bởi [17]: $E_{Cu} = 65,79 \text{ GPa}$; $\rho_{Cu} = 8800 \text{ kg/m}^3$; $\nu_{Cu} = 0,387$; $E_{Gr} = 929,57 \text{ GPa}$; $\rho_{Gr} = 1800 \text{ kg/m}^3$; $\nu_{Gr} = 0,22$; $l_{Gr} = 8,376 \text{ nm}$; $t_{Gr} = 0,34 \text{ nm}$; $E_m = 3,0 \text{ GPa}$; $\rho_m = 1200 \text{ kg/m}^3$; $\nu_m = 0,34$; $E_{GPL} = 1,01 \text{ TPa}$; $\rho_{GPL} = 1060 \text{ kg/cm}^3$; $\nu_{GPL} = 0,186$; $l_{GPL} = 2,5 \mu\text{m}$; $w_{Gt} = 1,5 \mu\text{m}$; $h_{GPL} = 1,5 \text{ nm}$.

Các tham số không thứ nguyên được giới thiệu như sau:

$$K_1 = k_1 \frac{a^4}{D_0}; K_2 = k_2 \frac{a^2}{D_0}; C_D = c_d h \sqrt{\frac{h}{\rho_{Cu} D_0}}; \omega^* = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_{Cu}}{E_{Cu}}} \text{ with } D_0 = \frac{E_{Cu} h^3}{12(1-\nu_{Cu}^2)} \quad (36)$$

Tấm FG-GOEAM vuông có các kích thước $a = 1 \text{ m}$, $a/b = 1$, $b/h = 10$, $T = T_0 = 300 \text{ K}$, và $H_{Gr} = 100\%$ được sử dụng trong khảo sát số.

4.1. Khảo sát hội tụ và kiểm chứng mô hình

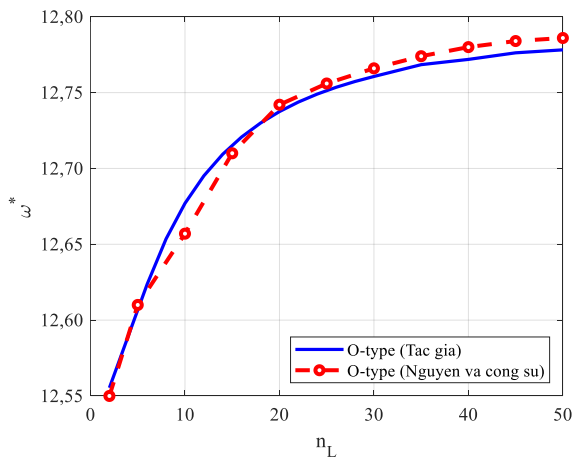
Xét tấm FG-GPLRC vuông có điều kiện biên tựa đơn bốn cạnh (simply supported-SSSS) với các kích thước lưới khác nhau. Như trình bày trong Bảng 1, các kết quả hội tụ tại kích thước lưới 16×16 , và phù hợp tốt với kết quả của Thai và cộng sự [4] sử dụng phương pháp đẳng hình dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (IGA-HSDT), cũng như của Arefi và cộng sự [29] dựa trên nghiệm Navier kết hợp với lý thuyết tấm tinh chỉnh (Navier-RPT).

Tiếp theo, xét tấm FG-GOEAM vuông với kiểu O điều kiện biên tựa đơn bốn cạnh (SSSS), các tham số còn lại là $W_{Gr} = 2,5\%$ và $K_1 = K_2 = 50$. Như minh họa trong Hình 3, tần số dao động riêng tăng nhanh khi số lớp n_L nhỏ hơn 20, sau đó hội tụ dần và trở nên ổn định khi số lớp n_L tiến tới 40. Xu hướng hội tụ này phù hợp tốt với các kết quả được báo cáo bởi Chi Hai và cộng sự [17]. Trong nghiên cứu này, họ sử dụng mô hình tấm dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT).

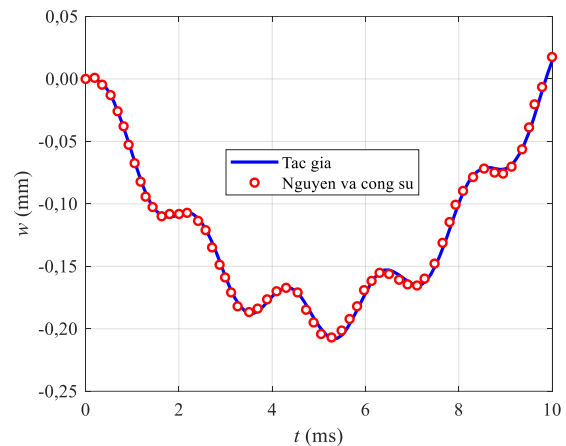
Bảng 1. Tần số cơ bản không thứ nguyên $\omega^* = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ của tấm FG-GPLRC tựa đơn bốn cạnh với chiều dày $h = a/10$.

Phương pháp	Kiểu phân bố	Kích thước lưới				
		12×12	14×14	16×16	18×18	20×20
Tác giả	UD	0,1247	0,1247	0,1248	0,1248	0,1248
IGA-HSDT [4]				0,1216		
Navier-RPT [29]				0,1216		
Tác giả	FG-O	0,1049	0,1049	0,1050	0,1050	0,1050
IGA-HSDT [4]				0,1023		
Navier-RPT [29]				0,1023		
Tác giả	FG-X	0,1402	0,1402	0,1403	0,1403	0,1404
IGA-HSDT [4]				0,1366		
Navier-RPT [29]				0,1365		
Tác giả	FG-V	0,1175	0,1176	0,1176	0,1177	0,1177
IGA-HSDT [4]				0,1118		
Navier-RPT [29]				0,1118		

Cuối cùng, xét tấm FG-GOEAM vuông với X-type liên kết tựa đơn bốn cạnh chịu tải trọng hình sin $p(t) = p_0 \sin\left(\frac{\pi t}{t_e}\right)$ với $0 \leq t \leq t_e$ và $p(t) = 0$ nếu $t \geq t_e = 10\text{ms}$. Các tham số còn lại được chọn là: $W_{Gr} = 2,5\%$, $K_1 = K_2 = 25$, and $C_d = 0$. Có thể nhận thấy rằng các kết quả thu được phù hợp tốt với kết quả của Chi Hai và cộng sự [17], như minh họa trong Hình 4. Các ví dụ trên nhằm kiểm chứng tính hội tụ và độ chính xác của phương pháp đề xuất.



Hình 3. So sánh tần số cơ bản của tấm FG-GOEAM



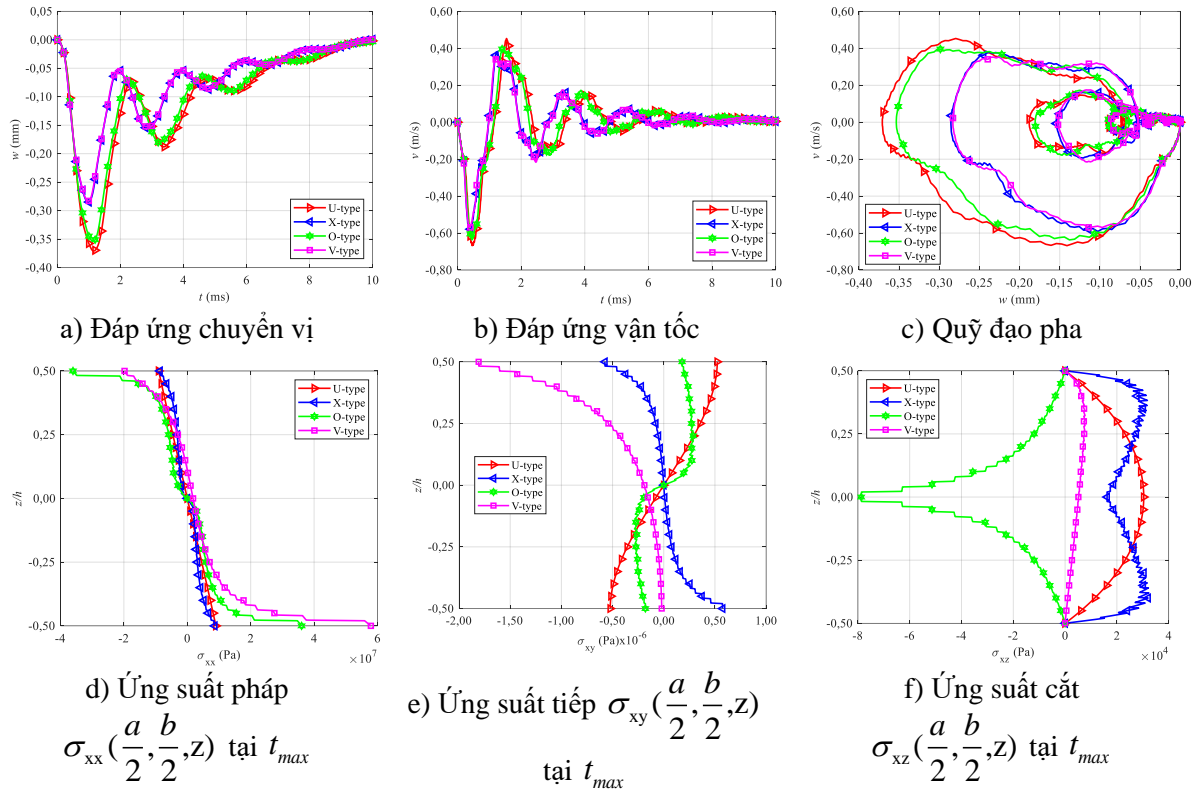
Hình 4. So sánh đáp ứng chuyển vị của điểm giữa tấm FG-GOEAM chịu tải trọng hình sin

4.2. Khảo sát tham số

4.2.1. Ảnh hưởng của mô hình phân bố G_{ori}

Hình 5 minh họa đáp ứng chuyển vị và phân bố ứng suất pháp theo chiều dày của tấm FG-GOEAM liên kết SSSS đặt trên nền đàn hồi nhớt, với các tham số $K_1 = K_2 = 25$ và $C_d = 0,1$. Kết quả cho thấy độ võng cực đại tại tâm tấm phụ thuộc mạnh vào mô hình phân bố G_{ori}, giảm

dần theo thứ tự $U \rightarrow O \rightarrow X \rightarrow V$, trong đó kiểu U mềm nhất và kiểu V cứng nhất. Xu hướng này phản ánh vai trò của phân bố GOri theo chiều dày, khi các cấu hình giàu GOri gần bề mặt làm tăng đáng kể độ cứng uốn của tấm. Trong pha âm, không xuất hiện đỉnh võng mới; các dao động nhỏ phát sinh nhanh chóng bị suy giảm nhờ tác dụng kết hợp của cản kết cấu và nền đàn hồi nhớt, cho thấy pha dương chi phối đáp ứng động. Phân bố ứng suất pháp tại thời điểm võng cực đại có xu hướng tương tự chuyển vị: kiểu U cho phân bố ứng suất mượt và giá trị đỉnh thấp, trong khi kiểu V, mặc dù có độ võng nhỏ nhất, lại tạo ra tập trung ứng suất kéo lớn nhất tại bề mặt dưới. Điều này chỉ ra sự đánh đổi giữa độ cứng và mức độ tập trung ứng suất, cần được cân nhắc trong thiết kế tấm FG-GOEAM chịu tải trọng nổ.

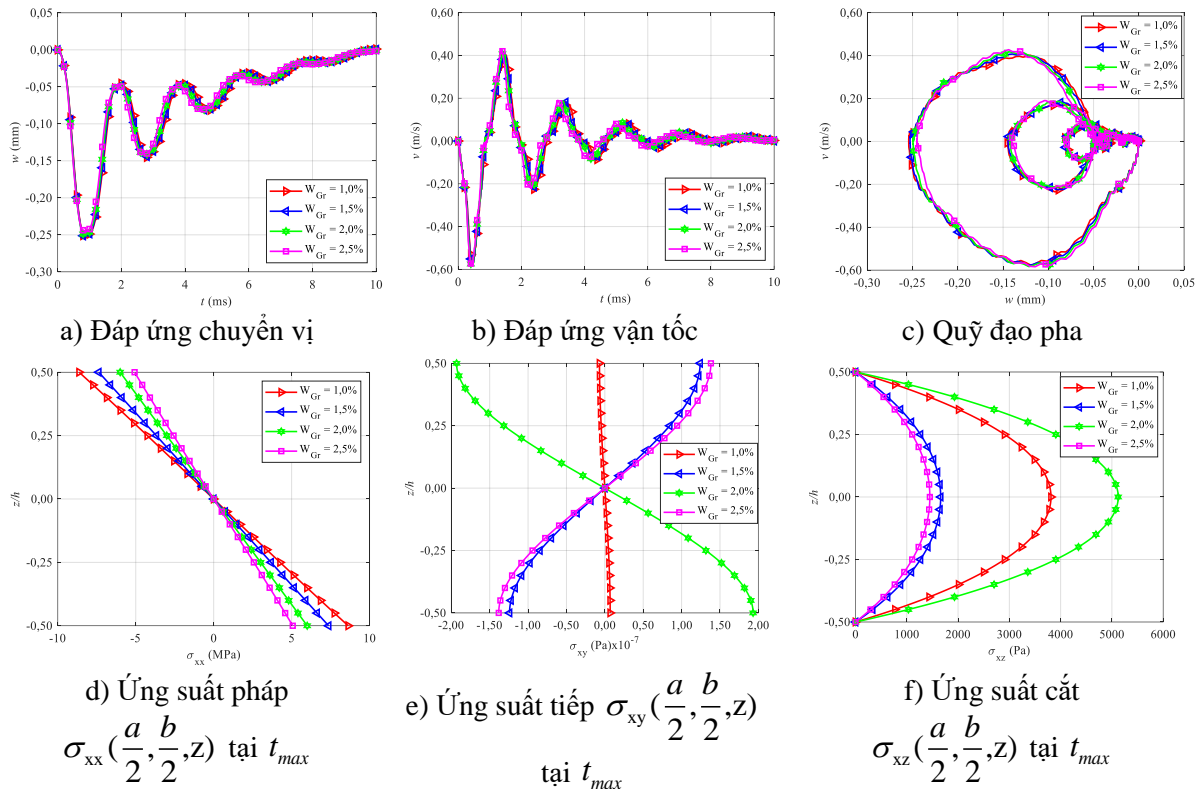


Hình 5. Đáp ứng động của tấm FG-GOEAM liên kết SSSS với các mẫu GOri khác nhau.

4.2.2. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GOri

Hình 6 trình bày ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GOri đến đáp ứng động của tấm FG-GOEAM liên kết SSSS, với mô hình phân bố kiểu U, $K_1 = K_2 = 50$, $C_d = 0,1$. Kết quả cho thấy khi hàm lượng GOri tăng, độ cứng hiệu dụng của tấm tăng rõ rệt, dẫn đến giảm đáng kể độ võng cực đại tại tâm tấm và biên độ vận tốc, đồng thời dao động suy giảm nhanh hơn, phản ánh tính ổn định động được cải thiện. Xu hướng này cũng được thể hiện qua quỹ đạo mặt phẳng thu hẹp, cho thấy hệ kết cấu quay về trạng thái cân bằng nhanh hơn. Ngược lại, ứng suất pháp theo chiều dày tại thời điểm đáp ứng cực đại tăng lên khi hàm lượng GOri tăng, do độ cứng uốn lớn hơn làm giảm biến dạng tổng thể nhưng khuếch đại mức ứng suất cục bộ. Xu hướng tương tự cũng được ghi nhận đối với ứng suất màng và ứng suất cắt, với biên độ tăng vừa phải trong khi hình dạng phân bố cơ bản được duy trì. Nhìn chung, tăng tỷ phần GOri là giải pháp hiệu quả để hạn chế chuyển vị và vận tốc, tăng tốc suy giảm dao động và nâng cao ổn định kết cấu dưới tải xung. Tuy nhiên, sự gia tăng ứng suất đi kèm cho thấy cần lựa chọn hàm

lượng GOrì tối ưu nhằm cân bằng giữa tăng độ cứng và kiểm soát tập trung ứng suất, đặc biệt trong các ứng dụng yêu cầu khả năng chống nổ và va đập.



Hình 6. Đáp ứng động của tấm FG-GOEAM liên kết SSSS với các giá trị khác nhau của tỷ phần khối lượng GOrì.

5. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này đã phát triển một mô hình phân tử hữu hạn quasi-3D để phân tích đáp ứng động của tấm FG-GOEAM đặt trên nền đàn hồi nhớt ba tham số và chịu tải xung. Mô hình dựa trên lý thuyết quasi-3D sáu biến, kết hợp với sơ đồ nội suy hỗn hợp Q4 Lagrange–Hermite, đảm bảo tính liên tục C^1 của trường chuyển vị ngang, đồng thời loại bỏ nhu cầu sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt. Độ chính xác và độ tin cậy của mô hình đã được kiểm chứng thông qua các bài toán hội tụ và so sánh với các kết quả tham khảo trong tài liệu. Từ các khảo sát số, có thể rút ra những kết luận chính sau:

- Phân tử hỗn hợp Q4–Hermite cho thấy tốc độ hội tụ nhanh và hiệu quả tính toán cao, đặc biệt phù hợp cho phân tích các tấm FG-GOEAM nhiều lớp.
- Số lớp có ảnh hưởng đáng kể đến đáp ứng động; nghiệm hội tụ nhanh khi số lớp nhỏ hơn 20, trong khi việc tăng số lớp vượt quá khoảng 40 chỉ gây thay đổi không đáng kể.
- Bốn mô hình phân bố GOrì thể hiện thứ bậc độ cứng rõ ràng, trong đó kiểu X cứng nhất, tiếp theo là kiểu V và kiểu O, còn kiểu U có độ cứng thấp nhất.
- Các tham số vi cấu trúc của GOrì chi phối mạnh ứng xử động: tăng tỷ phần khối lượng graphene làm tăng độ cứng hiệu dụng và cải thiện khả năng kháng biến dạng dưới tải xung; trong khi đó, tăng mức độ gấp nếp GOrì làm tăng hiệu ứng auxetic nhưng giảm mô đun đàn hồi hiệu dụng, dẫn đến đáp ứng động mềm hơn và biến dạng lớn hơn.

- Dưới tải trọng nổ, các đáp ứng của chuyển vị, vận tốc, phân bố ứng suất và quỹ đạo mặt phẳng pha cho thấy vai trò quan trọng của kiến trúc GOr: các cấu hình cứng hơn (kiểu X, kiểu V) hạn chế hiệu quả biến dạng tổng thể nhưng gây tập trung ứng suất cao hơn, trong khi các cấu hình mềm hơn (kiểu U, kiểu O) cho biên độ đáp ứng lớn hơn với phân bố ứng suất êm hơn.
- Cán của nền đóng vai trò then chốt trong tiêu tán năng lượng; tăng hệ số cản giúp giảm độ võng cực đại, tăng tốc suy giảm dao động và thu hẹp quỹ đạo pha, phản ánh sự cải thiện rõ rệt về ổn định động.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Y. Li, A review on functionally graded materials and structures via additive manufacturing: From multi-scale design to versatile functional properties, *Advanced Materials Technologies*, 5 (2020). <https://doi.org/10.1002/admt.201900981>
- [2]. T.T. Nguyen, T.H. Nguyen, T.T. Tran, Q.-H. Pham, A new finite element procedure for the dynamic analysis of BDFGS plates located on pasternak foundation subjected to the moving oscillator load, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 48 (2024) 1263-1281. <https://doi.org/10.1007/s40997-023-00710-5>
- [3]. I.M. El-Galy, B.I. Saleh, M.H. Ahmed, Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view, *SN Applied Sciences* 1 (2019) 1378. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>
- [4]. C.H. Thai, A.J.M. Ferreira, P. Phung-Van, Size-dependent free vibration analysis of multilayer functionally graded GPLRC microplates based on modified strain gradient theory, *Composites Part B: Engineering*, 169 (2019) 174-188. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.02.048>
- [5]. M.M. Abdel-Mottaleb, A. Mohamed, S.A. Karim, T.A. Osman, A. Khattab, Preparation, characterization, and mechanical properties of polyacrylonitrile/graphene oxide nanofibers, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27 (2020) 346-351. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1473535>
- [6]. I. Baghdali, Analysis of the impact of the viscoelastic foundation on bending and vibration of FG porous nanoplates within integral higher-order shear deformation theory, *Physical Mesomechanics*, 28 (2025) 245-262. <https://doi.org/10.1134/S1029959924601313>
- [7]. C. Luo, C.Z. Han, X.Y. Zhang, X.G. Zhang, X. Ren, Y.M. Xie, Design, manufacturing and applications of auxetic tubular structures: A review, *Thin-Walled Structures*, 163 (2021) 107682.
- [8]. Q.T. Deng, Z.C. Yang, Effect of Poisson's ratio on functionally graded cellular structures, *Materials Express*, 6 (2016) 461-472. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107682>
- [9]. M.H. Samadzadeh, M. Arefi, A. Loghman, Static bending analysis of pressurized cylindrical shell made of graphene origami auxetic metamaterials based on higher-order shear deformation theory, *Heliyon*, 10 (2024) e36319. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e36319>
- [10]. M. Schenk, S.D. Guest, Geometry of Miura-folded metamaterials, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110 (2013) 3276-3281. <https://doi.org/10.1073/pnas.1217998110>
- [11]. S. Zhao, Y. Zhang, Y. Zhang, J. Yang, S. Kitipornchai, Graphene origami-enabled auxetic metallic metamaterials: An atomistic insight, *International Journal of Mechanical Sciences*, 212 (2021) 106814. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106814>
- [12]. S.A. Mohamed, M.A. Eltahir, N. Mohamed, R. Abo-Bakr, Nonlinear post-buckling stability of graphene origami-enabled auxetic metamaterials plates, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 143 (2025) 515-538. <https://doi.org/10.32604/cmescs.2025.061897>
- [13]. B. Karami, M.H. Ghayesh, Wave propagation characteristics of quasi-3D graphene origami-enabled auxetic metamaterial plates, *International Journal of Engineering Science*, 207 (2025) 104185.

<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2024.104185>

- [14]. J. An, Bending and buckling analysis of functionally graded graphene origami metamaterial irregular plates using generalized finite difference method, *Results in Physics*, 53 (2023) 106945. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106945>
- [15]. E. Zhang, Y. Chen, E.A. Nasr, Dynamic responses of functionally graded origami-enabled auxetic metamaterial sector plates induced by mechanical shock: Application of an innovative machine learning algorithm, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 31 (2024) 9387-9409. <https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2271922>
- [16]. W. Chen, Z. Tang, Y. Liao, L. Peng, A six-variable quasi-3D isogeometric approach for free vibration of functionally graded graphene origami-enabled auxetic metamaterial plates submerged in a fluid medium, *Applied Mathematics and Mechanics*, 46 (2025) 157-176. <https://doi.org/10.1007/s10483-025-3207-6>
- [17]. N.L. Chi Hai, N.T. Hoang, N.V. Huong Binh, Dynamic response analysis of FG-GOEAM plates resting on elastic foundations in thermal environments, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, (2025) 1-25. <https://doi.org/10.1080/15397734.2025.2532734>
- [18]. O.Z.S. Ong, M.H. Ghayesh, N. Fantuzzi, K.K. Żur, Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotubes reinforced double plates, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 52 (2024) 4211-4240. <https://doi.org/10.1080/15397734.2024.2307392>
- [19]. O.Z.S. Ong, M.H. Ghayesh, Dynamic behaviour of carbon-nanotube reinforced functionally graded double-arch systems, *International Journal of Engineering Science*, 196 (2024) 104024. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2024.104024>
- [20]. O.Z.S. Ong, M.H. Ghayesh, D. Losic, M. Amabili, Coupled dynamics of double beams reinforced with bidirectional functionally graded carbon nanotubes, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 143 (2022) 263-282. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.06.023>
- [21]. W. Zeng, G.R. Liu, Smoothed finite element methods (S-FEM): An overview and recent developments, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 25 (2018) 397-435. <https://doi.org/10.1007/s11831-016-9202-3>
- [22]. M. Khiloun, A.A. Bousahla, A. Kaci, A. Bessaim, A. Tounsi, S.R. Mahmoud, Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a four-variable quasi-3D HSDT, *Engineering Computations*, 36 (2020) 807-821. <https://doi.org/10.1007/s00366-019-00732-1>
- [23]. S. Zhao, Y. Zhang, Y. Zhang, W. Zhang, J. Yang, S. Kitipornchai, Genetic programming-assisted micromechanical models of graphene origami-enabled metal metamaterials, *Acta Materialia*, 228 (2022) 117791. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2022.117791>
- [24]. M.A. Alazwari, A.M. Zenkour, A quasi-3D refined theory for the vibration of functionally graded plates resting on visco-Winkler-Pasternak foundations, *Mathematics*, 10 (2022) 716. <https://doi.org/10.3390/math10050716>
- [25]. A.M. Zenkour, Benchmark trigonometric and three-dimensional elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate, *Archive of Applied Mechanics*, 77 (2007) 197-214. <https://doi.org/10.1007/s00419-006-0084-y>
- [26]. M. Amabili, *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*, Cambridge University, Press2008. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511619694>
- [27]. J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC Press2003. <https://doi.org/10.1201/b12409>
- [28]. L. Fryba, *Vibration of solids and structures under moving loads*, Springer, 2013.
- [29]. M. Arefi, E. Mohammad-Rezaei Bidgoli, R. Dimitri, F. Tornabene, Free vibrations of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with graphene nanoplatelets, *Aerospace Science and Technology*, 81 (2018) 108-117. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.07.036>