



ANALYTICAL METHOD FOR THE BUCKLING ANALYSIS OF COMPOSITE BEAMS WITH POROUS RESTING ON ELASTIC FOUNDATION RESTING ON ELASTIC FOUNDATIONS

Duong Manh Tuan

Institute of Technical Engineering, Sa Doi Street, Dai Mo, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 27/10/2025

Revised: 21/11/2025

Accepted: 09/12/2025

Published online: 15/12/2025

<https://doi.org/10.47869/tcsj.76.9.1>

* *Corresponding author*

Email: tuanmanhvkt123@gmail.com

Abstract. Functionally graded composite materials are increasingly being used in critical fields such as defense, transportation, and construction. The analysis of structures made from functionally graded composite materials has become an essential practical requirement. This paper presents an exact solution to determine the critical buckling load of a functionally graded composite beam resting on an elastic foundation and subjected to axial compression. The material properties of the beam are assumed to vary continuously through the thickness according to an exponential law and to contain micro-porosities. The governing equations are formulated based on the first-order shear deformation theory (FSDT). A closed-form expression for the critical load is derived through appropriate mathematical transformations and is verified for reliability by comparison with previously published results. The paper also investigates the effects of various factors such as material characteristics, geometric parameters, and porosity on the axial buckling capacity of the composite beam. Numerical results and key discussions are provided to enhance the understanding of the beam's stability behavior. These findings offer valuable scientific insights for engineers in selecting appropriate design parameters under specific working conditions for composite beam structures.

Keywords: Composite; Functionally graded material; Buckling load; Buckling; Beam.

@ 2025 University of Transport and Communications



PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH CỦA DẦM COMPOSITE CÓ LỖ RỒNG TỰA TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

Dương Mạnh Tuấn

Viện Kỹ thuật Công binh, Sa Đới, Phường Đại Mỗ, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 27/10/2025

Ngày nhận bài sửa: 21/11/2025

Ngày chấp nhận đăng: 09/12/2025

Ngày xuất bản Online: 15/12/2025

<https://doi.org/10.47869/tcsj.76.9.1>

* Tác giả liên hệ

Email: tuanmanhvkt123@gmail.com

Tóm tắt. Vật liệu composite có cơ tính biến đổi ngày càng được sử dụng nhiều trong những lĩnh vực quan trọng như quốc phòng, giao thông vận tải, xây dựng. Tính toán các kết cấu làm bằng vật liệu composite có cơ tính biến đổi là một trong những yêu cầu cấp thiết từ thực tiễn. Bài báo này sử dụng lời giải chính xác để tìm ra biểu thức tải tới hạn của dầm composite có cơ tính biến thiên tựa trên nền đàn hồi chịu nén dọc trục. Vật liệu của dầm được giả thiết biến đổi liên tục theo chiều dày theo hàm số mũ và có các lỗ rỗng vi mô. Công thức tính toán được thiết lập từ lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, biểu thức tường minh đối với tải tới hạn được bài báo tìm ra thông qua các phép biến đổi hợp lý và được kiểm chứng sự tin cậy thông qua so sánh với các kết quả đã công bố trước đây. Bài báo cũng tiến hành khảo sát ảnh hưởng của một số yếu tố như đặc trưng vật liệu, hình học, lỗ rỗng đến khả năng chịu tải nén của dầm composite. Các kết quả số và bình luận quan trọng được bài báo rút ra nhằm giúp các nhà khoa học hiểu rõ hơn về đáp ứng ổn định của dầm này. Đây cũng là cơ sở khoa học giúp các kỹ sư có cơ sở khoa học lựa chọn các tham số thiết kế phù hợp với điều kiện làm việc cụ thể đối với các kết cấu dầm composite.

Từ khóa: Composite; cơ tính biến đổi; tải tới hạn; ổn định; dầm.

@ 2025 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. GIỚI THIỆU

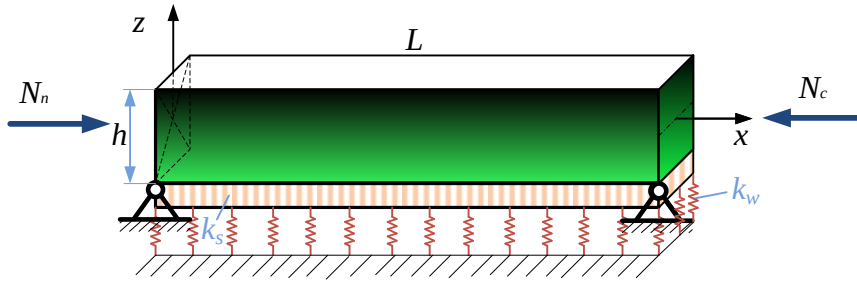
Cùng với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, các nhà khoa học đã sáng tạo ra một loại vật liệu composite kiểu mới, đó là loại vật liệu kết hợp giữa hai hoặc nhiều thành phần, trong đó chủ yếu là gốm và kim loại. Chúng được pha trộn với tỷ lệ phù hợp nhằm đảm bảo cơ tính của vật liệu tổng hợp biến đổi trơn và liên tục từ mặt này đến mặt kia của kết cấu. Nhờ vậy, vật liệu mới này vừa mang đặc tính của kim loại, nhưng cũng mang đầy đủ đặc tính của gốm, do đó chúng có khả năng chịu tải cơ, tải nhiệt, ma sát và mài mòn tốt hơn các loại vật liệu truyền thống. Vật liệu này có thể được sử dụng trong xây dựng các cửa hầm trú ẩn bom đạn, đường ray xe lửa tốc độ cao, buồng đốt động cơ tàu hỏa,... Cũng chính vì tầm quan trọng của chúng, các nhà khoa học cũng đã tập trung nghiên cứu nhằm làm sáng tỏ các đáp ứng cơ học của kết cấu làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên.

Lien [1] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn và lý thuyết biến dạng cắt dạng lượng giác để phân tích dao động tự do của dầm nhiều lớp có cơ tính biến thiên và có lỗ rỗng. Tuan [2] cũng dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn để trình bày nghiên cứu về đáp ứng uốn tĩnh của tấm nhiều lớp làm bằng vật liệu composite có cơ tính biến đổi, các công thức được tính toán thông qua lý thuyết tấm bậc ba và phần tử tứ giác bốn nút. Dựa trên cả phương pháp giải tích và phương pháp phần tử hữu hạn, Reddy [3] đã nghiên cứu cả bài toán uốn tĩnh và dao động cưỡng bức của tấm composite cơ tính biến thiên. Ke và đồng nghiệp [4] sử dụng phương pháp Galerkin–Vlasov để nghiên cứu uốn tĩnh và dao động của tấm composite có cơ tính biến thiên có gắn lớp áp điện dựa trên lý thuyết tấm bậc cao. Cũng dựa trên phương pháp Galerkin–Vlasov, nhóm tác giả [5] lại tiếp tục giải quyết bài toán uốn tĩnh của vỏ hai độ cong có cơ tính biến thiên có các lớp áp điện tựa trên nền đàn hồi. Ke và nhóm nghiên cứu [6] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt cải tiến để phân tích dao động riêng của tấm composite nhiều lớp có cơ tính biến thiên và có kể đến hiệu ứng flexoelectric. Hùng [7] sử dụng lý thuyết tấm bậc nhất để nghiên cứu đáp ứng động lực học của tấm làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên chịu tải trọng sóng xung kích, kết quả tính toán được thực hiện dựa trên phương pháp tích phân trực tiếp Newmark kết hợp với phương pháp phần tử hữu hạn. Babaei và cộng sự [8] đã dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích tần số dao động riêng và dao động cưỡng bức của dầm làm bằng vật liệu cơ tính biến đổi và có lỗ rỗng tựa trên nền đàn hồi, trong đó có tính đến cản nhớt của nền. Hadji và nhóm nghiên cứu [9] đã sử dụng lời giải dạng giải tích để giải quyết bài toán uốn và dao động riêng của dầm có cơ tính biến đổi và có lỗ rỗng tựa trên nền đàn hồi. Forghani và nhóm nghiên cứu [10] đã phân tích ảnh hưởng của biến dạng lớn đến dao động riêng của dầm có cơ tính biến thiên và có lỗ rỗng tựa trên nền đàn hồi dựa trên phương pháp cầu phương vi phân.

Từ các kết quả nghiên cứu đã có, ta có thể thấy rằng đa số các công trình đã công bố chủ yếu giải quyết bài toán uốn và dao động riêng của dầm composite có cơ tính biến thiên, một số công trình cũng đã đề cập đến các kết cấu có lỗ rỗng, tuy nhiên đáp ứng ổn định của dầm composite có cơ tính biến thiên có lỗ rỗng vì mô hình chưa được chỉ ra cụ thể, đặc biệt là lời giải dạng giải tích, đây cũng chính là điểm mới cần được khám phá. Do vậy nghiên cứu này tập trung làm rõ điều này bằng phương pháp giải tích.

2. MÔ HÌNH VÀ CÔNG THỨC TÍNH TOÁN

Dầm composite chịu tải bởi lực nén dọc trục N_c được mô hình như trên hình 1. Chiều dài của dầm là L , mặt cắt ngang của dầm có chiều cao là h . Dầm tựa trên nền đàn hồi với hai tham số độ cứng k_w và k_s tương ứng với độ cứng nền theo phương thẳng đứng (Winkler) và hệ số cắt của nền (Pasternak).



Hình 1. Mô hình dầm chịu tải nén dọc trục.

Dầm composite được tạo ra từ hai loại vật liệu khác nhau là gốm và kim loại với tỷ lệ thể tích vật liệu tương ứng là R_g và R_k , chỉ số g tương ứng với vật liệu gốm và chỉ số k tương ứng với vật liệu kim loại. Tương quan giữa tỷ lệ thể tích của hai thành phần vật liệu được biểu diễn bởi [1], [6]:

$$R_g + R_k = 1; R_g = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n; \quad (1)$$

trong đó n là số không âm, biểu thị quy luật biến đổi của vật liệu theo chiều dày dầm, đây cũng được gọi là chỉ số mũ thể tích.

Bài báo này sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, theo đó thì thành phần chuyển vị thẳng theo trục dầm và chuyển vị vuông góc với trục dầm được biểu diễn theo biểu thức:

$$\begin{cases} V_x(x, z) = V_{0x}(x, 0) + z\theta_x \\ V_z(x, z) = V_{0z}(x, 0) \end{cases} \quad (2)$$

với V_x và V_z là hai thành phần chuyển vị tại điểm bất kỳ thuộc dầm dọc theo trục dầm và theo phương vuông góc với trục dầm, $V_{0x}(x, 0)$, $V_{0z}(x, 0)$ là hai thành phần chuyển vị tại vị trí có tọa độ $z = 0$, còn θ_x là góc xoay của pháp tuyến của mặt cắt ngang dầm.

Thông qua các phép đạo hàm, ta rút ra biểu thức biến dạng:

$$\begin{aligned} \zeta_x &= \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial V_{0x}}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \zeta_x^0 + z \zeta_x^z \\ \zeta_{xz} &= \theta_x + \frac{\partial V_{0z}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó:

$$\zeta_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \zeta_x^z = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (4)$$

Các thành phần ứng suất của dầm composite được tính toán thông qua biến dạng tương ứng như sau:

$$\sigma_{xx} = E(z) \zeta_x \quad (5)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \zeta_{xz} \quad (6)$$

trong đó, các đặc trưng cơ tính vật liệu gồm mô đun đàn hồi và hệ số Poisson được biểu diễn

theo tỷ lệ thể tích và lỗ rỗng như sau [1], [6]:

+ Trong trường hợp lỗ rỗng phân bố đều [6]:

$$\begin{bmatrix} E(z) \\ \nu(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_k \\ \nu_k \end{bmatrix} R_k + \begin{bmatrix} E_g \\ \nu_g \end{bmatrix} R_g = \begin{Bmatrix} E_k \\ \nu_k \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} E_g \\ \nu_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_k \\ \nu_k \end{bmatrix} \right) R_g - \frac{\alpha}{2} \left(\begin{bmatrix} E_g \\ \nu_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_k \\ \nu_k \end{bmatrix} \right) \quad (7)$$

+ Trong trường hợp lỗ rỗng phân bố không đều [6]:

$$\begin{bmatrix} E(z) \\ \nu(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_k \\ \nu_k \end{bmatrix} R_k + \begin{bmatrix} E_g \\ \nu_g \end{bmatrix} R_g = \begin{Bmatrix} E_k \\ \nu_k \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} E_g \\ \nu_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_k \\ \nu_k \end{bmatrix} \right) R_g - \frac{\alpha}{2} \left(\begin{bmatrix} E_g \\ \nu_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_k \\ \nu_k \end{bmatrix} \right) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (8)$$

với α là hệ số phân bố lỗ rỗng của vật liệu.

Biểu thức công khả dĩ của nội lực của dầm composite:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_b &= \int_{\Omega} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \zeta_x + \tau_{xz} \delta \zeta_{xz}) dz \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\zeta_x^0 E(z) \delta \zeta_x^0 + \zeta_x^z z E(z) \delta \zeta_x^z \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \zeta_x^z E(z) z \delta \zeta_x^0 + \zeta_x^z E(z) z^2 \delta \zeta_x^z \right) dz \right) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\zeta_{xz} \left(\frac{5E(z)}{12(1+\nu(z))} \right) \delta \zeta_{xz} \right) dz \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial^2 V_{0x}}{\partial x^2} E(z) \delta V_{0x} + \frac{\partial^2 V_{0x}}{\partial x^2} z E(z) \delta \theta_x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} z E(z) \delta V_{0x} + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} E(z) z^2 \delta \theta_x \right) dz \right) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\left(\theta_x + \frac{\partial V_{0z}}{\partial x} \right) \left(\frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \right) \delta \theta_x + \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_{0z}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{5E(z)}{12(1+\nu(z))} \right) \delta V_{0z} \right) dz \right) d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

Công khả dĩ của lực tác dụng do nền đàn hồi:

$$\delta \Pi_n = \int_{\Omega} \left(k_w V_{0z} \delta V_{0z} + k_s \frac{\partial V_{0z}}{\partial x} \delta \frac{\partial V_{0z}}{\partial x} \right) d\Omega \quad (10)$$

Công khả dĩ của lực nén tác dụng lên dầm composite:

$$\delta \Pi_L = b \int_L N_c \frac{\partial V_{0z}}{\partial x} \delta \frac{\partial V_{0z}}{\partial x} dx \quad (11)$$

với N_c là lực nén dọc trục dầm composite.

Để tìm phương trình cân bằng của dầm composite, bài báo sử dụng nguyên lý sau [13]-[14]:

$$\delta II_b + \delta II_n = \delta II_L \quad (12)$$

Lúc này, sau một số phép biến đổi, phương trình (12) được triển khai cụ thể theo ba biến chuyển vị δV_{0x} , $\delta \theta_x$ và δV_{0z} như sau:

$$\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z E(z) dz + \frac{\partial^2 V_{0x}}{\partial x^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz = 0 \quad (13)$$

$$\left(\theta_x + \frac{\partial V_{0z}}{\partial x} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{5E(z)}{12(1+\nu)} dz + \frac{\partial^2 V_{0x}}{\partial x^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (zE(z)) dz + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z^2 E(z)) dz = 0 \quad (14)$$

$$k_w V_{0z} + k_s \frac{\partial^2 V_{0z}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_{0z}}{\partial x^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{5E(z)}{12(1+\nu(z))} dz = N_c \frac{\partial^2 V_{0z}}{\partial x^2} \quad (15)$$

trong đó các hệ số:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz; \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z E(z) dz \\ M_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 E(z) dz; \quad M_4 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{5E(z)}{12(1+\nu(z))} dz \end{aligned} \quad (16)$$

Các phương trình (13)-(15) được viết lại dưới dạng:

$$\delta V_{0x} : M_1 \frac{\partial^2 V_{0x}}{\partial x^2} + M_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

$$M_2 \frac{\partial^2 V_{0x}}{\partial x^2} + M_3 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + M_4 \left(\theta_x + \frac{\partial V_{0z}}{\partial x} \right) = 0 \quad (18)$$

$$M_4 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_{0z}}{\partial x^2} \right) + k_w V_{0z} + k_s \frac{\partial^2 V_{0z}}{\partial x^2} = N_c \frac{\partial^2 V_{0z}}{\partial x^2} \quad (19)$$

Cần phải tìm sự liên hệ giữa góc xoay và chuyển vị vuông góc với trục dầm composite, do đó từ (17) ta thu được $\frac{\partial^2 V_{0x}}{\partial x^2} = -\frac{M_2}{M_1} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2}$, lấy kết quả này kết hợp với phương trình (18):

$$\left(M_3 - \frac{M_2^2}{M_1} \right) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + M_4 \left(\theta_x + \frac{\partial V_{0z}}{\partial x} \right) = 0, \text{ ta thu được hai phương trình đối với hai ẩn:}$$

$$\left(M_3 - \frac{M_2^2}{M_1}\right) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + M_4 \left(\theta_x + \frac{\partial V_{0z}}{\partial x}\right) = 0 \quad (20)$$

$$M_4 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_{0z}}{\partial x^2}\right) + k_w V_{0z} + k_s \frac{\partial^2 V_{0z}}{\partial x^2} = N_c \frac{\partial^2 V_{0z}}{\partial x^2} \quad (21)$$

Bài báo này tính cho dầm có hai đầu đều tựa đơn, hàm chuyển vị và góc xoay được biểu diễn thông qua các hàm lượng giác như sau:

$$\begin{aligned} V_{0x} &= \sum_{r=1}^{\infty} \hat{V}_{0x} \cos\left(r \frac{\pi x}{L}\right) \\ \theta_x &= \sum_{r=1}^{\infty} \hat{V}_{\theta} \cos\left(r \frac{\pi x}{L}\right) \\ V_{0z} &= \sum_{r=1}^{\infty} \hat{V}_{0z} \sin\left(r \frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

với r là số nguyên dương. Kết hợp biểu thức (22) và hai phương trình (19)-(20):

$$\left[M_4 - \left(M_3 - \frac{M_2^2}{M_1}\right) \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2\right] \hat{V}_{\theta} + M_4 \frac{r\pi}{L} \hat{V}_0 = 0 \quad (23)$$

$$-M_4 \left(\hat{V}_{\theta} \frac{r\pi}{L} + \hat{V}_{0z} \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2\right) + k_w \hat{V}_{0z} - k_s \hat{V}_{0z} \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 = N_c \hat{V}_{0z} \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \quad (24)$$

Giải phương trình (23), ta thu được:

$$\hat{V}_{\theta} = \frac{M_4 \frac{r\pi}{L}}{\left[M_4 - \left(M_3 - \frac{M_2^2}{M_1}\right) \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2\right]} \hat{V}_{0z} \quad (25)$$

Giải phương trình (24), ta rút ra biểu thức của tải trọng nén dọc trục của dầm composite như sau:

$$N_c = \frac{\left(\frac{M_4^2 \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2}{\left[M_4 - \left(M_3 - \frac{M_2^2}{M_1}\right) \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2\right]} - M_4 \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 + k_w - k_s \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2\right)}{\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2} \quad (26)$$

Giá trị nhỏ nhất của lực nén theo biểu thức (26) chính là tải tới hạn gây mất ổn định cho dầm composite tựa trên nền đàn hồi.

3. KIỂM TRA SỰ TIN CẬY CỦA LÝ THUYẾT TÍNH TOÁN

Dầm hai đầu tựa đơn có các tham số hình học và vật liệu gồm chiều dài L , chiều cao mặt

cắt ngang là h , xét trường hợp độ mảnh của dầm là $L/h = 20$, $E = 380$ MPa, $\nu = 0,3$. Dầm chịu tác dụng của tải trọng nén dọc trục dầm. Bảng 1 liệt kê các số liệu tính toán tải trọng tới hạn thông qua lời giải của phương pháp chính xác mà bài báo thực hiện với các số liệu đã công bố bằng cả lời giải giải tích trong các tài liệu [11], [13]-[14] (ký hiệu là G-T1-G-T3), lời giải Galerkin (ký hiệu là G-L) trong tài liệu [12] và lời giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn [15] (ký hiệu là PTHH). Thông qua số liệu liệt kê và so sánh như trong Bảng 1, ta thấy rằng lời giải của nghiên cứu này rất gần với các kết quả đã công bố trước đây, sự khác biệt là do lý thuyết dầm sử dụng khác nhau và phương pháp giải khác nhau.

Bảng 1. So sánh tải tới hạn của dầm tựa đơn hai đầu, dầm không có lỗ rỗng

L/h	G-T1 [11]	G-L [12]	G-T2 [13]	G-T3 [14]	PTHH [15]	Bài báo
20	9,86	9,87	9,86	9,86	9,86	9,80

4. KẾT QUẢ TÍNH TOÁN SỐ

Trên cơ sở lý thuyết tính toán đã được thể hiện ở phần trên, phần này tiến hành khảo sát số nhằm làm rõ ảnh hưởng của các tham số vật liệu cũng như đặc trưng hình học của dầm đến khả năng ổn định của dầm thông qua giá trị của tải tới hạn. Dầm được làm từ gốm và kim loại với các đặc trưng vật liệu bao gồm $E_c = 380$ GPa, $E_m = 70$ GPa, $\nu_c = \nu_m = 0,3$; dầm có chiều dài tổng là $L = 2$ m, chiều cao của mặt cắt ngang ký hiệu là h có thể biến đổi từ 10 đến 40. Dầm tựa trên nền đàn hồi với hai tham số độ cứng được chuẩn hóa theo công thức: $k_w^* = \frac{12k_w L^4}{Eh_0^3}$, $k_s^* = \frac{12k_s L^2}{Eh_0^3}$, trong đó $h_0 = L/20$. Tham số tính toán số và khảo sát là tải tới

hạn của dầm được chuẩn hóa theo công thức: $N_{od} = \frac{12L^2 N_c}{E_c h_0^3}$.

- Khảo sát ảnh hưởng của độ cứng nền:

Thay đổi cả hai giá trị của độ cứng nền đàn hồi sao cho tham số k_w^* biến đổi từ 0 đến 10 và tham số k_s^* biến đổi từ 0 đến 4, kết quả tính toán tải tới hạn phụ thuộc vào các tham số độ cứng của nền được trình bày trong Bảng 2, Bảng 3 và Hình 2.

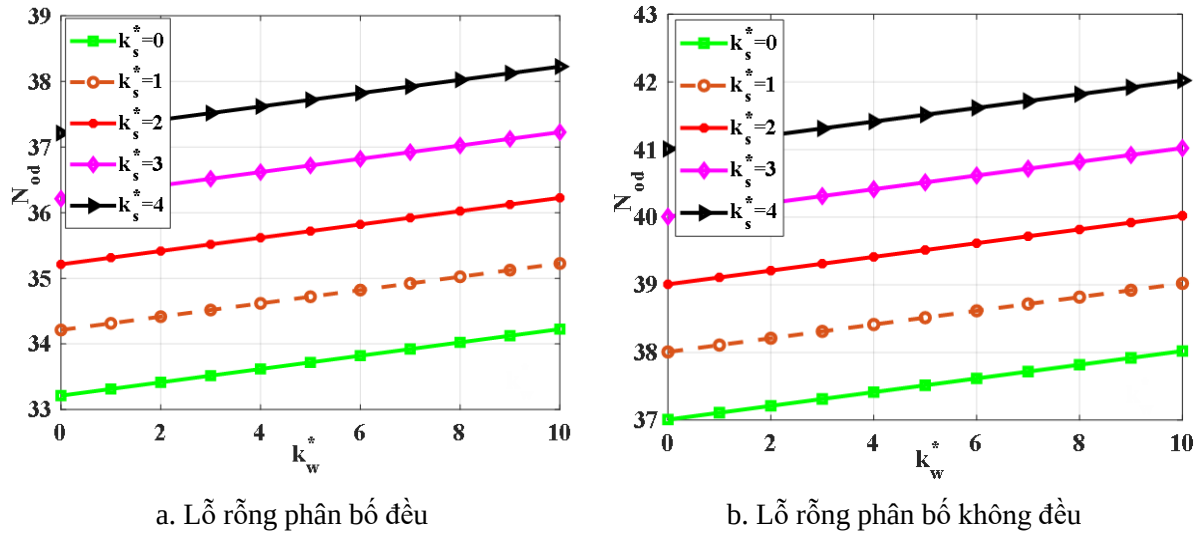
Dễ dàng nhận thấy rằng khi tăng tham số độ cứng của nền thì tải tới hạn của dầm tăng lên, điều này chứng tỏ khả năng chịu tải nén của dầm tốt hơn.

Bảng 2. Tải tới hạn của dầm phụ thuộc độ cứng nền đàn hồi, lỗ rỗng phân bố đều, $L/h=10$

	$k_w^* = 0$	$k_w^* = 2$	$k_w^* = 4$	$k_w^* = 6$	$k_w^* = 8$	$k_w^* = 10$
$k_s^* = 0$	33,212	33,415	33,618	33,820	34,023	34,225
$k_s^* = 1$	34,212	34,415	34,618	34,820	35,023	35,225
$k_s^* = 2$	35,212	35,415	35,618	35,820	36,023	36,225
$k_s^* = 3$	36,212	36,415	36,618	36,820	37,023	37,225
$k_s^* = 4$	37,212	37,415	37,618	37,820	38,023	38,225

Sự phụ thuộc của tải tới hạn đối với các tham số độ cứng của nền được biểu diễn bởi đường tuyến tính. Điều này được suy ra từ biểu thức (26), tải trọng nén là hàm bậc nhất của tham số độ cứng nền. Thêm vào đó, tải tới hạn của dầm composite trong trường hợp lỗ rỗng

phân bố không đều vẫn cao hơn so với trường hợp lỗ rỗng phân bố đều.

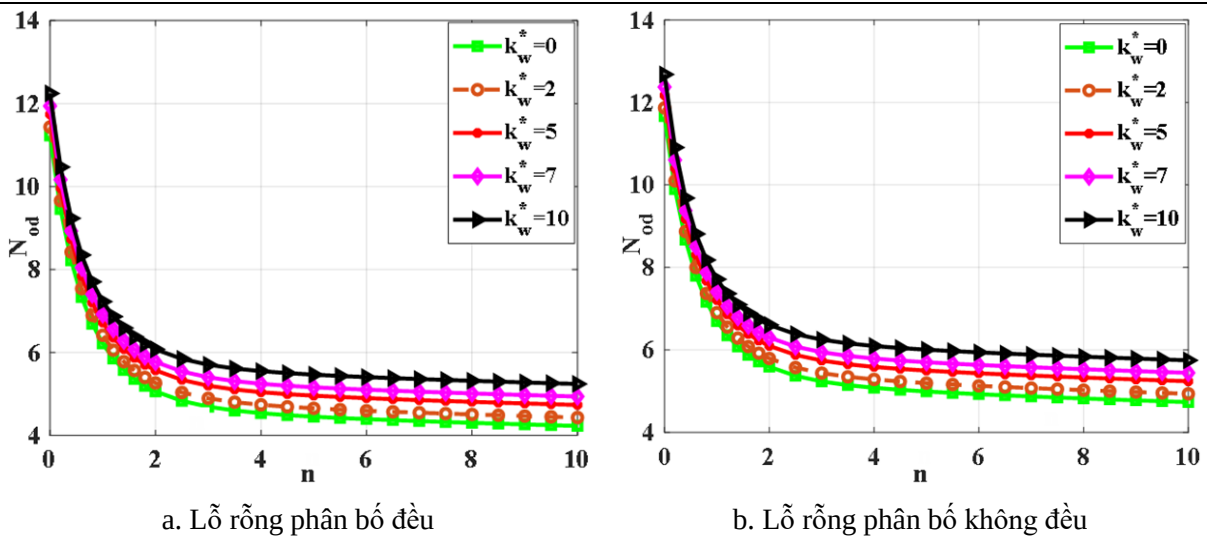


Hình 2. Tải tới hạn của dầm phụ thuộc vào độ cứng của nền đàn hồi, $L/h=10$, $n=1$, $\alpha=0,1$

Khảo sát ảnh hưởng của chỉ số mũ thể tích:

Bảng 3. Tải tới hạn của dầm phụ thuộc độ cứng nền đàn hồi, lỗ rỗng phân bố không đều, $L/h=10$

	$k_w^*=0$	$k_w^*=2$	$k_w^*=4$	$k_w^*=6$	$k_w^*=8$	$k_w^*=10$
$k_s^*=0$	37,008	37,211	37,413	37,616	37,818	38,021
$k_s^*=1$	38,008	38,211	38,413	38,616	38,818	39,021
$k_s^*=2$	39,008	39,211	39,413	39,616	39,818	40,021
$k_s^*=3$	40,008	40,211	40,413	40,616	40,818	41,021
$k_s^*=4$	41,008	41,211	41,413	41,616	41,818	42,021



Hình 3. Tải tới hạn của dầm phụ thuộc vào k_w^* và số mũ thể tích vật liệu, $L/h=20$, $k_s^*=2$, $\alpha=0,1$.

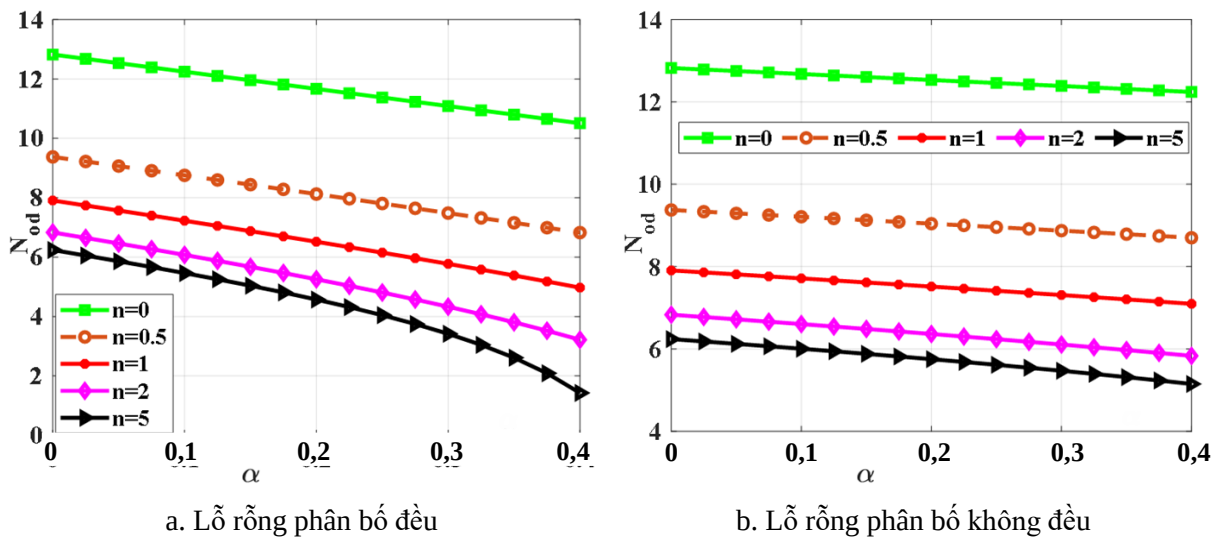
Tăng dần chỉ số mũ thể tích sao cho giá trị của n biến đổi từ 0 đến 10, kết quả tính toán tải tới hạn của dầm composite được chỉ ra như trên hình 3. Các kết quả này cho thấy khi tăng chỉ số mũ thể tích n , tải tới hạn của dầm giảm xuống, điều này có được là do tỷ lệ kim loại

trong dầm tăng lên khi số mũ n tăng lên, tức là dầm có xu hướng “mềm” hơn, do vậy khả năng chịu tải nén của dầm cũng giảm xuống.

Nhưng điều thú vị ở đây là sự biến đổi của tải tới hạn chỉ thể hiện rõ rệt nhất khi chỉ số mũ thể tích biến đổi từ 0 đến 2, còn khi $n > 2$ thì tải tới hạn ít thay đổi, và với $n = 0$ thì tải tới hạn là cực đại. Điều này tạo cơ sở cho các kỹ sư có thể lựa chọn giá trị của tham số n thích hợp nhằm đảm bảo khả năng chịu tải nén của dầm composite là tốt nhất nhưng vẫn phải đảm bảo tận dụng ưu thế của kim loại như tính dẻo, khả năng dễ gia công.

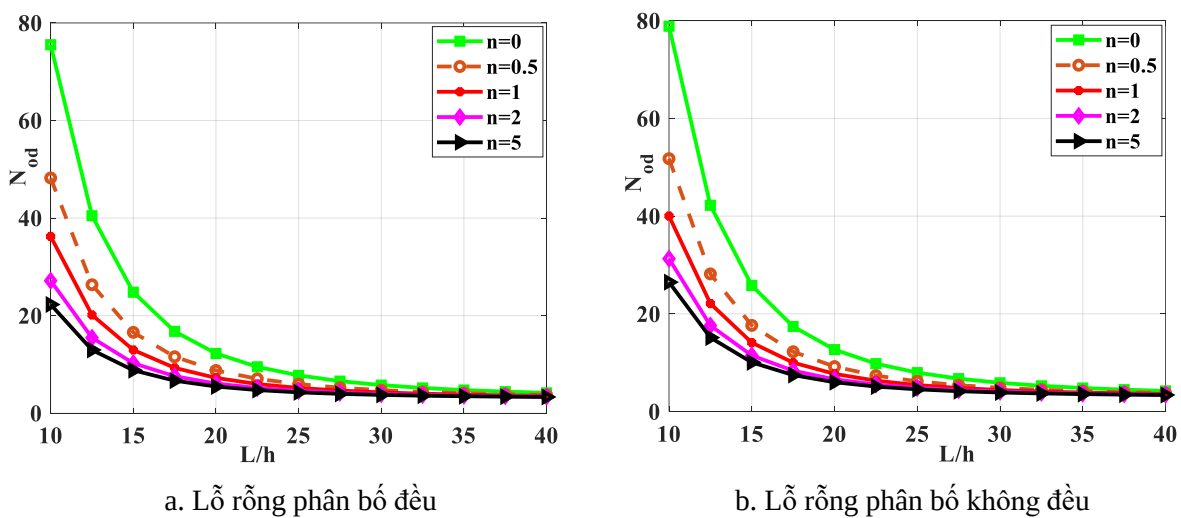
Ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng trong vật liệu:

Thay đổi tỷ lệ lỗ rỗng của vật liệu bằng cách cho tham số α nhận giá trị từ 0 đến 0,4; kết quả tính toán tải tới hạn được trình bày như trên Hình 4. Khi tăng giá trị của tham số α thì tải tới hạn của dầm giảm xuống, điều này là do độ cứng của dầm composite giảm xuống. Và với các giá trị khác nhau của tham số α thì tải tới hạn của dầm trong trường hợp lỗ rỗng phân bố không đều luôn lớn hơn trường hợp lỗ rỗng phân bố đều.

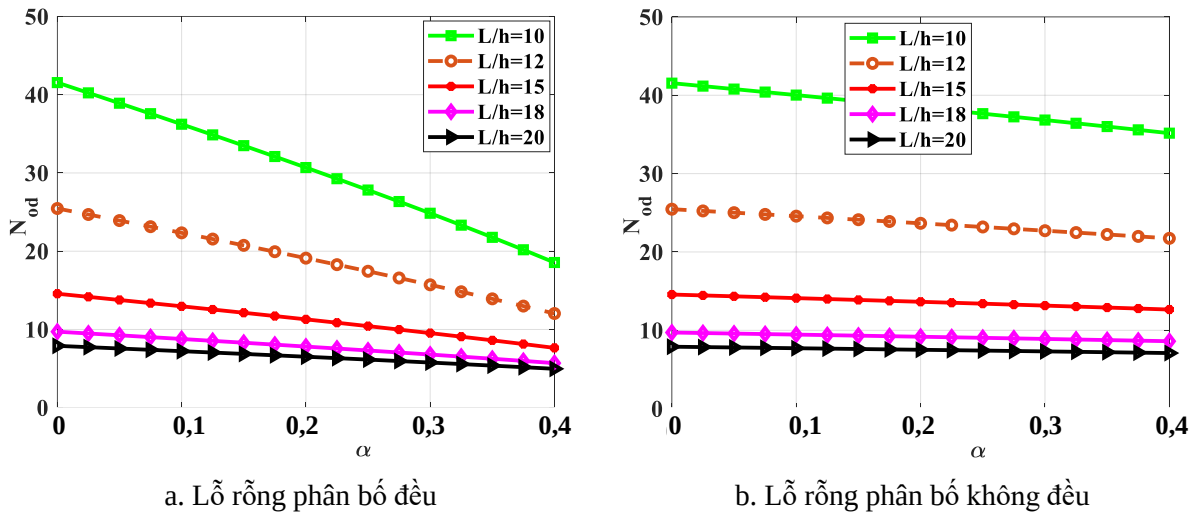


Hình 4. Tải tới hạn của dầm phụ thuộc vào hệ số lỗ rỗng α và chỉ số mũ n , $L/h=20$, $k_w^*=10$, $k_s^*=2$.

Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dài và chiều dày của dầm L/h :



Hình 5. Tải tới hạn của dầm phụ thuộc vào chiều dày dầm và số mũ n , $\alpha=0,1$, $k_w^*=10$, $k_s^*=2$.



Hình 6. Tải tới hạn của dầm phụ thuộc vào chiều dày dầm và tỷ lệ lỗ rỗng, $n=1$, $k_w^*=10$, $k_s^*=2$.

Thay đổi chiều dày của dầm sao cho tỷ lệ L/h biến đổi từ 10 đến 40, kết quả tính toán tải tới hạn của dầm composite phụ thuộc vào tỷ lệ L/h được thể hiện như trên hình 5 và hình 6. Khi tỷ lệ L/h tăng lên, tức là chiều dày của dầm càng giảm, thì tải tới hạn của dầm cũng giảm xuống. Dầm càng dày, tức là tỷ lệ L/h càng lớn, thì tải tới hạn càng thay đổi rõ rệt khi tham số lỗ rỗng α thay đổi, điều này cũng có nghĩa rằng tham số lỗ rỗng α càng thể hiện ảnh hưởng đối với dầm có chiều dày càng lớn.

5. KẾT LUẬN

Trên cơ sở của lý thuyết dầm bậc nhất và phương pháp giải tích, bài báo đã trình bày nghiên cứu đáp ứng ổn định của dầm composite làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên có lỗ rỗng vi mô tựa trên nền đàn hồi hai hệ số. Một số kết quả chính mà bài báo đã tìm ra như sau:

Công thức giải tích chính xác đối với tải tới hạn của dầm composite có độ chính xác cao khi so sánh với các nghiên cứu đã công bố.

Tỷ lệ lỗ rỗng trong vật liệu càng tăng thì tải tới hạn của dầm composite càng giảm, tức là khả năng chịu tải nén của dầm giảm xuống.

Tải tới hạn của dầm composite tỷ lệ thuận với sự tăng lên của độ cứng nền đàn hồi.

Chỉ số mũ thể tích vật liệu tăng lên, dầm càng mềm, do đó tải tới hạn của dầm composite càng giảm.

Dầm composite có tỷ lệ L/h càng nhỏ thì tải tới hạn của dầm càng lớn, tức là khả năng chịu tải nén tăng lên.

Các kết quả của nghiên cứu này là cơ sở khoa học có giá trị, giúp các nhà thiết kế tham khảo để tính toán và chế tạo các dầm composite trong thực tế.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. P.T.B. Lien, Free vibration of porous functionally graded sandwich beams on elastic foundation based on trigonometric shear deformation theory, Transport and Communications Science Journal, 74 (2024) 946-961. <https://doi.org/10.47869/tcsj.74.8.86>
- [2]. D. M. Tuan, Static bending of functionally graded sandwich plates using a finite element method, Transport and Communications Science Journal., 75 (2024) 1359-73. <https://doi.org/10.47869/tcsj.75.3.4>

- [3]. J. N. Reddy, Analysis of Functionally Graded Plates, International journal for numerical methods in engineering, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 47 (2000) 663-684. <https://doi.org/10.1177/09544062241304233>
- [4]. T.V. Ke, P.V. Minh, N.T. Dung, L.M. Thai, D.V. Thom, Flexoelectric effect on bending and free vibration behaviors of piezoelectric sandwich FGP nanoplates via nonlocal strain gradient theory, Journal of Vibration Engineering & Technologies, 12 (2024) 6567-6596. <https://doi.org/10.1007/s42417-023-01270-3>
- [5]. T.V. Ke, D.V. Thom, N.T. Dung, N.V. Chinh, P.V. Minh, Galerkin-Vlasov approach for bending analysis of flexoelectric doubly-curved sandwich nanoshells with piezoelectric/FGP/piezoelectric layers using the nonlocal strain gradient theory, Acta Mechanica Sinica, 41 (2025) 123543. <https://doi.org/10.1007/s10409-024-23543-x>
- [6]. T.V. Ke, V.M. Phung, T.H.H. Truong, V.T. Do, V.D. Dao, Nonlocal strain gradient free vibration analysis of sandwich functionally graded porous nanoshell integrated with piezoelectric surface layers taking into account flexoelectric effect, Frontiers of Structural and Civil Engineering, 19 (2025) 623–644. <https://doi.org/10.1007/s11709-025-1131-5>
- [7]. N.V. Hung, The effect of blast loading on the forced vibration of functionally graded plates with non-uniform thickness, Transport and Communications Science Journal, 76 (2025) 1049-1063. <https://doi.org/10.47869/tcsj.76.8.2>
- [8]. M. Babaei, K. Asemi, P. Safarpour, Natural Frequency and Dynamic Analyses of Functionally Graded Saturated Porous Beam Resting on Viscoelastic Foundation Based on Higher Order Beam Theory, Journal of Solid Mechanics, 11 (2019) 615-634. <https://oiccpres.com/jsm/article/view/12139>
- [9]. L. Hadji, F. Bernard, N. Zouatnia, Bending and Free Vibration Analysis of Porous-Functionally-Graded (PFG) Beams Resting on Elastic Foundations, Fluid Dynamic and Material Process, 19 (2023) 1043-1054. <https://doi.org/10.32604/fdmp.2022.022327>
- [10]. M. Forghani, Y. Bazarganlari, P. Zahedinejad, M.J. Kazemzadeh-Parsi, Nonlinear frequency behavior of cracked functionally graded porous beams resting on elastic foundation using Reddy shear deformation theory, Journal of Vibration and Control, 29 (2022) 2454-2472. <https://doi.org/10.1177/10775463221080213>
- [11]. M. Aydogdu, A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 41 (2009) 1651–1655. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.05.014>
- [12]. D.T.M. Cuong, D.V. Thom, N. V. Dung, Effect of novel elastic foundations on the thermal buckling behavior of organic nanobeams, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2025 (2025) 1–26. <https://doi.org/10.1080/15397734.2025.2556241>
- [13]. B. V. Tuyen, G. T. Luu, Static Buckling Analysis of FG Sandwich Nanobeams, Journal of Vibration Engineering & Technologies, 12 (2023) 3729–3754. <https://doi.org/10.1007/s42417-023-01081-6>
- [14]. J. N. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, International Journal of Engineering Science, 45 (2007) 288–307. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.04.004>
- [15]. M. A. Eltaher, S. A. Emam, F. F. Mahmoud, “Static and stability analysis of nonlocal functionally graded nanobeams, Composite Structures, 96 (2013) 82–88. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.030>