



BUCKLING ANALYSIS OF MULTILAYER BEAMS RESTING ON ELASTIC FOUNDATIONS

Nguyen Vu Hung¹, Dao Van Vuong^{2*}

¹31 Member Limited Liability Company for Electrical and Explosive Materials, Dai Cat, Pho Yen Ward, Thai Nguyen Province, 24000, Vietnam

²Military Technical Academy, 236 Hoang Quoc Viet Street, Nghia Do Ward, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 06/10/2025

Revised: 07/11/2025

Accepted: 08/12/2025

Published online: 15/12/2025

<https://doi.org/10.47869/tcsj.76.9.3>

* *Corresponding author*

Email: vuong.mta@gmail.com

Abstract. Multilayer nanoscale structures are widely employed in the fabrication of miniature sensors, which serve as essential components in measurement systems used in civil engineering, transportation, and defense applications. This paper presents an analytical solution for the stability problem of multilayer nanobeams resting on an elastic foundation, incorporating the flexoelectric effect under simultaneous thermal and moisture conditions. The governing equations are formulated based on a refined shear deformation theory combined with the von-Kármán nonlinear strain model. Moreover, small-scale effects are considered through the nonlocal elasticity theory. The reliability of the proposed analytical approach is verified by comparison with previously published results. The study also investigates the influence of several parameters-including foundation stiffness, geometric dimensions, and material properties-on the stability response of multilayer nanobeams. The results indicate that both the flexoelectric effect and the elastic foundation enhance the overall stiffness of the structure, thereby improving its load-carrying capacity under compressive loading.

Keywords: Nano beam; nonlocal elasticity; stability; analytical method, flexoelectric effect, elastic foundation.



NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH CỦA DẦM NHIỀU LỚP TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

Nguyễn Vũ Hùng¹, Đào Văn Vượng^{2*}

¹Công ty TNHH MTV Cơ điện và Vật liệu nô 31, Tổ dân phố Đại Cát, Phường Phở Yên, Tỉnh Thái Nguyên, Việt Nam

²Học viện Kỹ thuật quân sự, 236 Hoàng Quốc Việt, Phường Nghĩa Đô, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 06/10/2025

Ngày nhận bài sửa: 07/11/2025

Ngày chấp nhận đăng: 08/12/2025

Ngày xuất bản Online: 15/12/2025

<https://doi.org/10.47869/tcsj.76.9.3>

* Tác giả liên hệ

Email: vuong.mta@gmail.com

Tóm tắt. Các kết cấu kích thước nano gồm nhiều lớp thường được sử dụng trong chế tạo các cảm biến cỡ nhỏ, đây là thành phần chính của các thiết bị đo đạc trong xây dựng, giao thông, quốc phòng. Bài báo này sử dụng phương pháp giải tích để tìm ra lời giải đối với bài toán ổn định của dầm nano nhiều lớp tựa trên nền đàn hồi có kể đến hiệu ứng flexoelectric và chịu ảnh hưởng của đồng thời nhiệt độ và độ ẩm. Các công thức được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới và có kể đến biến dạng lớn theo lý thuyết của Von-Kármán. Đồng thời, hiệu ứng kích thước nhỏ cũng được tính đến dựa trên lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, lý thuyết tính toán đã được kiểm chứng độ tin cậy bằng cách so sánh với các kết quả đã công bố. Bài báo cũng khảo sát ảnh hưởng của một số tham số nền đàn hồi, hình học, vật liệu đến đáp ứng ổn định của dầm nano nhiều lớp, trong đó nghiên cứu này nhận thấy hiệu ứng flexoelectric và nền đàn hồi đã làm tăng độ cứng của kết cấu, làm tăng khả năng chịu tải của dầm nhiều lớp trong trường hợp chịu tải trọng nén.

Từ khóa: Dầm nano; đàn hồi phi cục bộ; ổn định; phương pháp giải tích, hiệu ứng flexoelectric, nền đàn hồi.

@ 2025 Trường Đại học Giao thông vận tải

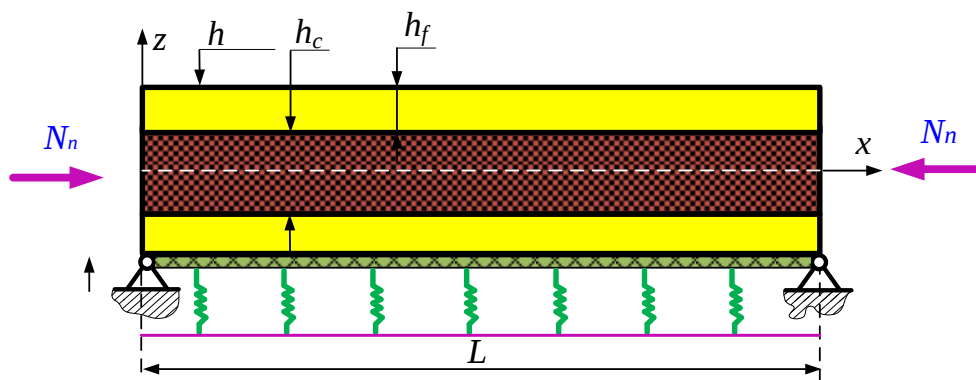
1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong thực tế, các kết cấu dạng dầm nhiều lớp là một trong các dạng kết cấu phổ biến và được sử dụng rộng rãi, do vậy việc nghiên cứu ứng xử cơ học của chúng đóng vai trò quan trọng trong định hướng thiết kế và tối ưu cả về mặt hình học và vật liệu, làm tăng hiệu quả kinh tế. Đã có nhiều nghiên cứu đối với kết cấu sandwich được công bố, Luật và đồng nghiệp [1] đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba và phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích dao động riêng của tấm nhiều lớp làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. Tiến và nhóm nghiên cứu [2] sử dụng phương pháp giải tích để phân tích chuyển vị uốn và ổn định tĩnh của tấm hữu cơ gồm năm lớp vật liệu, trong đó hiệu ứng kích thước cũng được tính đến trên cơ sở lý thuyết đàn hồi phi cục bộ. Lan và cộng sự [3] áp dụng phương pháp Galerkin kiểu mới để phân tích ổn định tĩnh của dầm nhiều lớp chịu tải trọng nén.

Với các kết cấu kích thước nhỏ, người ta có thể sử dụng nhiều lý thuyết khác nhau để tiếp cận, trong đó lý thuyết đàn hồi phi cục bộ thường được sử dụng vì lý thuyết này tính toán thuận lợi, đồng thời có xem xét đến hiệu ứng kích thước. Hoan và nhóm nghiên cứu [4] kết hợp cả lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và phương pháp trung bình kiểu mới để phân tích tần số dao động riêng phi tuyến của dầm nano trong môi trường nhiệt độ. Thọ và đồng nghiệp [5] sử dụng phương pháp giải tích để trình bày nghiên cứu chuyển vị uốn tĩnh của tấm nano nhiều lớp có kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước trên cơ sở lý thuyết đàn hồi phi cục bộ. Toan và cộng sự [6] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt cải tiến kiểu mới và phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu ổn định và dao động của tấm nano tựa trên nền đàn hồi biến đổi, trong đó hiệu ứng flexoelectric cũng được xem xét. Đức và nhóm nghiên cứu [7] kết hợp cả lý thuyết trường pha và phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích ổn định tĩnh của tấm nano có vết nứt và hiệu ứng flexoelectric.

2. MÔ HÌNH BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

Mô hình dầm chịu tải trọng nén dọc trục được thể hiện như trên hình 1. Dầm dài L , chiều dày của dầm là h , chiều dày lớp lõi là h_c , chiều dày hai lớp ngoài cùng bằng nhau và bằng h_f . Lớp lõi làm bằng vật liệu đồng nhất, còn hai lớp bề mặt làm bằng vật liệu có hiệu ứng flexoelectric, tỷ lệ chiều dày các lớp lần lượt là $h_f-h_c-h_f$, ví dụ nếu ký hiệu là 1-8-1 có nghĩa là tỷ lệ chiều dày lớp lõi gấp tám lần chiều dày của lớp bề mặt.



Hình 1. Dầm nano nhiều lớp.

Vật liệu của các lớp có các lỗ rỗng vi mô, quy luật phân bố tỷ lệ thể tích lỗ rỗng này theo chiều dày được tính toán theo quy luật như sau:

$$\begin{cases} R_V^{(1)} = R_{0V} \{1 - p_0\}; & \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{h_c}{2}\right) \\ R_V^{(2)} = R_{0V} \left\{1 - p_0 + \frac{p_0 \pi}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h_c}\right)\right\}; & \left(-\frac{h_c}{2} \leq z \leq \frac{h_c}{2}\right) \\ R_V^{(3)} = R_{0V} \{1 - p_0\}; & \left(\frac{h_c}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\right) \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $R_V^{(i)}$ là tỷ lệ thể tích lỗ rỗng tại lớp thứ i , tham số p_0 biểu thị mật độ phân bố lỗ rỗng bên trong vật liệu của dầm. Mô đun đàn hồi và hệ số Poisson của lớp thứ i được tính toán như sau: $E^{(i)}(z) = E_0^{(i)}(1 - R_V^{(i)})$; $\nu^{(i)}(z) = \nu_0^{(i)}(1 - R_V^{(i)})$, trong đó $E_0^{(i)}$ và $\nu_0^{(i)}$ là mô đun đàn hồi và hệ số Poisson của vật liệu không có lỗ rỗng.

Trường chuyển vị của dầm [8]:

$$u_x(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w_{zb}}{\partial x} - f_z \frac{\partial w_{zs}}{\partial x}; \quad w_z(x, y, z) = w_{zb}(x, y) + w_{zs}(x, y) \quad (2)$$

với chuyển vị của dầm tại trục trung hòa là u_0 và chuyển vị vuông góc với trục dầm (theo trục z) là w_z , chuyển vị này được chia ra thành hai thành phần là w_{zb} and w_{zs} . Hàm f_z có thể chọn dưới dạng nhiều hàm số khác nhau, ở đây bài báo chọn hàm f_z ở dạng

$$[8] f_z = \left(\frac{127z^4}{200h^3} - \frac{77z^2}{125h} + \frac{39h}{500} \right) \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right). \text{ Trường biến dạng: } \varepsilon_x = \varepsilon_0 + z\varepsilon_z + f_z \varepsilon_f; \quad \gamma_{xz} = t_z \gamma_{0xz}$$

$$\text{với } \varepsilon_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_z = -\frac{\partial^2 w_{zb}}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_f = -\frac{\partial^2 w_{zs}}{\partial x^2}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w_{zs}}{\partial x}; \quad t_z = 1 - \frac{\partial f_z}{\partial z}; \quad (3)$$

Quan hệ ứng suất và biến dạng như sau [9]

$$\left(1 - \mu_L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sigma_x^{(2)} = E^{(2)} \varepsilon_x^{(2)}; \quad \left(1 - \mu_L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tau_{xz}^{(2)} = G^{(2)} \gamma_{xz}^{(2)} \quad (4)$$

với μ_L là tham số đàn hồi phi cục bộ. Đối với hai lớp ngoài cùng, do tính đến hiệu ứng flexoelectric nên thành phần biến thiên biến dạng cần được xem xét và có biểu thức:

$$\eta_{xxz} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{\partial f_z}{\partial z} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \left(-\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) = \eta_b + \frac{\partial f_z}{\partial z} \eta_s; \quad (5)$$

Do có hiệu ứng flexoelectric nên quan hệ ứng suất-biến dạng tại hai lớp bề mặt:

$$\begin{aligned} (1 - \mu_L^2 \nabla_x^2) \sigma_x^{(i)} &= E^{(i)} \varepsilon_x - p_{31} V_z^{(i)}; \quad (1 - \mu_L^2 \nabla_x^2) \tau_{xz}^{(i)} = G^{(i)} \varepsilon_{xz} \\ \Psi_{xxz}^{(i)} &= -f_{14} V_z^{(i)}; \quad P_z^{(i)} = p_{31} \varepsilon_{xx} + r_{33} V_z^{(i)} + f_{14} \eta_{xxz} \end{aligned} \quad (6)$$

trong đó f_{14} là hệ số flexoelectric và κ_{ij} là hệ số điện môi; $\Psi_{xxz}^{(i)}$ là mô men ứng suất, $V_z^{(i)}$ là điện trường và $P_z^{(i)}$ chuyển vị điện của lớp thứ i ($i=1,3$).

Sau khi biến đổi, ta biểu thức của điện trường:

$$V_z^{(i)} = \frac{p_{31}}{r_{33}} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} z + \frac{p_{31}}{r_{33}} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} f_z + \frac{f_{14}}{r_{33}} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{f_{14}}{r_{33}} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (7)$$

Sau khi tích phân, người ta thu được các thành phần lực dọc (N_x), mô men (M_x), mô men bậc cao (S_x) và lực cắt (Q_{xz}) như sau:

$$N_x - \mu_L^2 \nabla_x^2 N_x = B_0 \varepsilon_0 - \frac{p_{31} f_{14} (h - h_c)}{r_{33}} \varepsilon_z - \frac{p_{31} f_{14}}{r_{33}} B_{Nf} \varepsilon_f; \quad (8)$$

$$M_x - \mu_L^2 \nabla_x^2 M_x = B_{zz} \varepsilon_z + B_{zf} \varepsilon_f - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h_c^3}{12} \right) \varepsilon_z - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} B_{Mzf} \varepsilon_f; \quad (9)$$

$$S_x - \mu_L^2 \nabla_x^2 S_x = B_{fz} \varepsilon_z + B_{ff} \varepsilon_f - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} B_{Mzf} \varepsilon_z - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} B_{Szf} \varepsilon_f; \quad (10)$$

$$Q_{xz} - \mu_L^2 \nabla_x^2 Q_{xz} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left(G^{(i)} \gamma_{xz}^{(i)} \right) dz = B_s \gamma_{xz} \quad (11)$$

trong đó các hệ số phụ thuộc đặc tính vật liệu của dầm. Điều kiện để dầm cân bằng như sau:

$$\delta \Theta_B - \delta \Theta_L = 0 \quad (12)$$

trong đó $\delta \Theta_B$ là công khả dĩ của nội lực, and $\delta \Theta_L$ là công khả dĩ của ngoại lực. Các thành phần này được tính lần lượt như sau:

$$\begin{aligned} \delta \Theta_B = & \int_S \left\{ \int_{-h/2}^{-h_c/2} \left(\sigma_x^{(1)} \delta(\varepsilon_x) + \Psi_{xxz}^{(1)} \delta \eta_{xxz} + \left(\tau_{xz}^{(1)} \right) \delta(\gamma_{xz}) \right) dz + \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \left(\sigma_x^{(2)} \delta(\varepsilon_x) + \left(\tau_{xz}^{(2)} \right) \delta(\gamma_{xz}) \right) dz \right. \\ & \left. \int_{h_c/2}^{h/2} \left(\sigma_x^{(3)} \delta(\varepsilon_x) + \Psi_{xxz}^{(3)} \delta \eta_{xxz} + \left(\tau_{xz}^{(3)} \right) \delta(\gamma_{xz}) \right) dz \right\} dS \\ = & \int_S \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} \delta w_s \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 T_{xxz}}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 Y_{zzx}}{\partial x^2} \delta w_s + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} t_z \delta w_s \right) dS \end{aligned} \quad (13)$$

với các hệ số phụ thuộc vào đặc trưng vật liệu.

Dầm đặt trong môi trường chịu ảnh hưởng của đồng thời nhiệt độ và độ ẩm, lực nén dọc trục là N_n , do đó tổng công khả dĩ của các ngoại lực tác dụng lên dầm có dạng:

$$\begin{aligned} \delta I_L = & \int_s N_n \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dS + \int_s N_M \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dS + \int_s N_T \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dS \\ & + \int_s k_w w \delta w dS + \int_s k_s \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dS \end{aligned} \quad (14)$$

trong đó N_M và N_T là lực tác dụng lên dầm do độ ẩm và nhiệt độ, chúng được tính như sau:

$$\begin{aligned} N_M = & \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} E^{(i)} \beta^{(i)} \Delta M dz = \int_{-h/2}^{-h_c/2} E^{(1)} \beta^{(1)} \Delta M dz + \int_{-h_c/2}^{h_c/2} E^{(2)} \beta^{(2)} \Delta M dz + \int_{h_c/2}^{h/2} E^{(3)} \beta^{(3)} \Delta M dz \\ N_T = & \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} E^{(i)} \alpha^{(i)} \Delta T dz = \int_{-h/2}^{-h_c/2} E^{(1)} \alpha^{(1)} \Delta T dz + \int_{-h_c/2}^{h_c/2} E^{(2)} \alpha^{(2)} \Delta T dz + \int_{h_c/2}^{h/2} E^{(3)} \alpha^{(3)} \Delta T dz \end{aligned} \quad (15)$$

với hệ số giãn nở nhiệt là α , ΔT là độ chênh lệch nhiệt độ môi trường so với nhiệt độ không phát sinh ứng suất của vật liệu; Hệ số giãn nở vì độ ẩm là β , và ΔM là độ chênh độ ẩm của môi trường so với độ ẩm không phát sinh ứng suất của vật liệu.

Phương trình (12) lúc này được khai triển cụ thể dưới dạng như sau:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\delta w_b : N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_{xxz}}{\partial x^2} - (N_n + N_M + N_T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w + k_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

$$\delta w_s : N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y_{xxz}}{\partial x^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} t_z - (N_n + N_M + N_T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w + k_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (18)$$

Phương trình (17) và biểu thức (8) dẫn ra biểu thức sau:

$$N_x = B_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{p_{31} f_{14} (h - h_c)}{r_{33}} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{p_{31} f_{14}}{r_{33}} B_{Nf} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (19)$$

Sau khi tích phân hai vế của (19) và ràng buộc điều kiện biên tại hai đầu dầm $u_0 (x=0) = u_0 (x=L) = 0$, ta rút ra biểu thức của lực dọc:

$N_x = \frac{B_0}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{p_{31} f_{14} (h - h_c)}{r_{33} L} \int_0^L \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx + \frac{p_{31} f_{14}}{r_{33} L} B_{Nf} \int_0^L \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} dx$. Kết hợp các biểu thức trên, ta thu được hệ phương trình cân bằng cho dầm nano:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{B_0}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{p_{31} f_{14} (h - h_c)}{r_{33} L} \int_0^L \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx \right) \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} \\
 & + \frac{p_{31} f_{14}}{r_{33} L} B_{Nf} \int_0^L \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} dx - N_n - N_M - N_T \\
 & - \mu_L^2 \left(\frac{B_0}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{p_{31} f_{14} (h - h_c)}{r_{33} L} \int_0^L \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx \right) \frac{\partial^4 (w_b + w_s)}{\partial x^4} \\
 & + \frac{p_{31} f_{14}}{r_{33} L} B_{Nf} \int_0^L \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} dx - N_n - N_M - N_T \\
 & + k_w w + k_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu_L^2 \left(k_w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_s \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \\
 & + B_{Tb} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + B_{Ts} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - \mu_L^2 \left(B_{Tb} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^6} + B_{Ts} \frac{\partial^6 w_s}{\partial x^6} \right) \\
 & + \left(B_{zz} - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h_c^3}{12} \right) \right) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \left(B_{zf} - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} B_{Mzf} \right) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} = 0; \\
 & \left(\frac{B_0}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{o_{31} f_{14} (h - h_c)}{r_{33} L} \int_0^L \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx \right) \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} \\
 & + \frac{p_{31} f_{14}}{r_{33} L} B_{Nf} \int_0^L \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} dx - N_n - N_M - N_T \\
 & - \mu_L^2 \left(\frac{B_0}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{p_{31} f_{14} (h - h_c)}{r_{33} L} \int_0^L \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx \right) \frac{\partial^4 (w_b + w_s)}{\partial x^4} \\
 & + \frac{p_{31} f_{14}}{r_{33} L} B_{Nf} \int_0^L \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} dx - N_n - N_M - N_T \\
 & + B_{Yb} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + B_{Ys} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - \mu_L^2 \left(B_{Yb} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^6} + B_{Ys} \frac{\partial^6 w_s}{\partial x^6} \right) + B_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 & + k_w w + k_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu_L^2 \left(k_w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_s \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \\
 & + \left(B_{fz} - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} B_{Mzf} \right) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \left(B_{ff} - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} B_{Sff} \right) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} = 0
 \end{aligned} \tag{20}$$

Giải hệ phương trình (20) để tìm tải tới hạn N_n gây mất ổn định cho dầm, giả thiết dầm tựa đơn hai đầu, điều kiện biên tại hai đầu dầm phải thỏa mãn $w_z = 0$ và $M_x = 0$, do vậy biểu thức của các thành phần chuyển vị có dạng: $w_b = W_{0b} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$; $w_s = W_{0s} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, với W_{0b} and W_{0s} là biên độ của các chuyển vị. Sau khi thay nghiệm trên vào hệ phương trình cân bằng

(20), ta thu được: $W_{ob} = R_{wb}W_0$; $W_{os} = R_{ws}W_0$, với W_0 là biên độ chuyển vị thẳng đứng của dầm, các hệ số R_{wb} , R_{ws} phụ thuộc vào đặc trưng hình học và vật liệu của dầm nano và có biểu thức như phần phụ lục.

Sau khi biến đổi, ta thu được tải tới hạn của dầm nhiều lớp có dạng như sau:

$$N_n = \frac{\left[\begin{aligned} &\left(1 + \mu_L^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left\{ \frac{B_0}{4L^2} W_0^2 - N_M - N_T \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi p_{31} f_{14}}{r_{33} L^2} \left[\begin{matrix} B_{Nf} R_{ws} \\ -(h - h_c) R_{wb} \end{matrix} \right] W_0 \right\} \\ &+ \left(1 + \mu_L^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right) \left(k_w - k_s \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right) \\ &- \left(B_{Yb} + B_{fz} - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} B_{Mzf}\right) R_{wb} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \\ &- \left(B_{Ys} + B_{ff} - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} B_{Sff}\right) R_{ws} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \\ &- \mu_L^2 (B_{Yb} R_{wb} + B_{Ys} R_{ws}) \left(\frac{\pi}{L}\right)^6 \\ &+ B_s R_{ws} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \end{aligned} \right]}{\left(1 + \mu_L^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}; \quad (21)$$

Biểu thức (21) là tải tới hạn của dầm nhiều lớp tựa trên nền đàn hồi trong trường hợp có kể đến hiệu ứng flexoelectric, biến dạng lớn, chịu ảnh hưởng của nhiệt độ và độ ẩm.

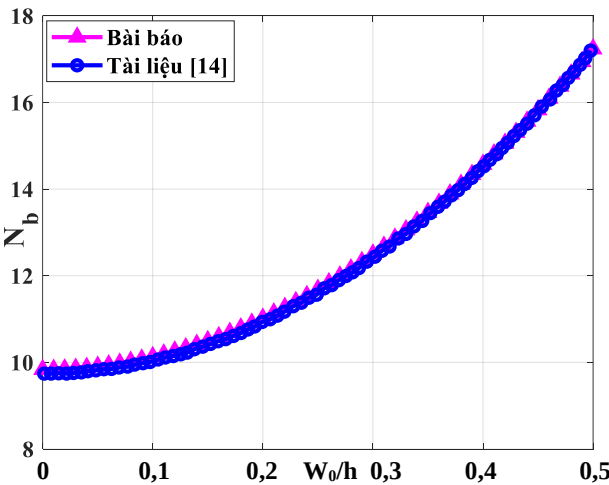
3. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA SỰ TIN CẬY

Ví dụ so sánh 1: Dầm nano có $L = 10$ nm, chiều cao mặt cắt ngang là h , tỷ lệ giữa chiều dài và chiều cao của dầm là $L/h = 10-100$, $E = 30$ MPa, $\nu = 0,3$. Dầm chịu nén dọc trục, bảng 1 trình bày kết quả so sánh giữa lời giải của nghiên cứu này với các lời giải chính xác [10]-[12] và lời giải bằng phương pháp số [13]. Dễ dàng nhận thấy rằng khi tham số đàn hồi phi cực bộ μ_L nhận các giá trị khác nhau thì lời giải của nghiên cứu này vẫn bám sát với các lời giải còn lại, điều này chứng minh sự tin cậy của lý thuyết tính toán của nghiên cứu này.

Ví dụ so sánh 2: Dầm có tỷ lệ $L/h = 20$. Kết quả tính toán và so sánh giữa lời giải của bài báo với lời giải chính xác [14] được thể hiện như trên hình 2, người ta dễ dàng nhận thấy rằng các kết quả tính toán của bài báo và của tài liệu [14] không nhiều sai lệch, điều này chứng minh sự tin cậy của lời giải đối với bài toán ổn định của dầm có xét đến biến dạng lớn.

Bảng 1. So sánh tải tới hạn của dầm nano.

L/h	Tài liệu	μ_L (nm)			
		0	1	2	3
10	[10]	9,86	8,98	8,24	7,61
	[11]	9,86	8,98	8,24	7,61
	[12]	-	-	-	-
	[13]	-	-	-	-
	Bài báo	9,88	8,99	8,25	7,62
20	[10]	9,85	8,97	8,23	7,60
	[11]	9,80	8,92	8,19	7,56
	[12]	9,80	9,57	9,34	9,13
	[13]	9,86	8,98	8,24	7,61
	Bài báo	9,83	8,95	8,21	7,58
10	[10]	9,81	8,93	8,20	7,58
	[11]	9,62	8,75	8,03	7,42
	[12]	9,62	8,75	8,03	7,42
	[13]	-	-	-	-
	Bài báo	9,73	8,85	8,12	7,50



Hình 2. So sánh tải tới hạn của dầm chịu nén.

4. TÍNH TOÁN SỐ VÀ THẢO LUẬN

Dầm nano chiều dài $L = 10\text{nm}$, tỷ lệ $L/h = 10$. Dầm gồm ba lớp, trong đó hai lớp bề mặt làm bằng vật liệu có hiệu ứng flexoelectric với tham số: $E_0^{(1)} = E_0^{(3)} = 102\text{ GPa}$, $\nu_0^{(1)} = \nu_0^{(3)} = 0,3$,

$p_{31}=-17,05 \text{ C/m}^2$; $r_{33}=1,76.10^{-8} \text{ C/(Vm)}$, $\alpha^{(1)}=\alpha^{(3)}=9,6384.10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\beta^{(1)}=\beta^{(3)}=10^{-3} (\%\text{H}_2\text{O})^{-1}$, tham số $f_{14}^{(1)}=f_{14}^{(3)}=f_{14}$ và có giá trị biến đổi từ 0 đến 4.10^{-8} C/m . Lớp giữa là nhôm (Al) có $E_0^{(2)}=70 \text{ GPa}$, $\nu_0^{(1)}=0,3$, $\alpha^{(2)}=23.10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\beta^{(2)}=10^{-3} (\%\text{H}_2\text{O})^{-1}$. Dầm tựa trên nền đàn hồi với hai tham số độ cứng $K_w^*=\frac{12k_w L^4}{E_0 h^3}$, $K_s^*=\frac{12k_s L^2}{\pi^2 E_0 h^3}$. Tải tới hạn của dầm được

tính toán theo công thức: $N_b = \frac{12L^2}{E_0^{(1)}h^3} N_n$. Sự biến đổi của tải tới hạn theo tham số f_{14} với hai giá trị khác nhau của tỷ lệ W_0/h và μ_L/h được thể hiện trên hình 3, một số nhận xét như sau:

+ Khi tăng giá trị của tham số f_{14} thì tải tới hạn của tăng lên, và sự tăng lên theo đường cong phi tuyến, tức là hiệu ứng flexoelectric làm tăng độ cứng của dầm.

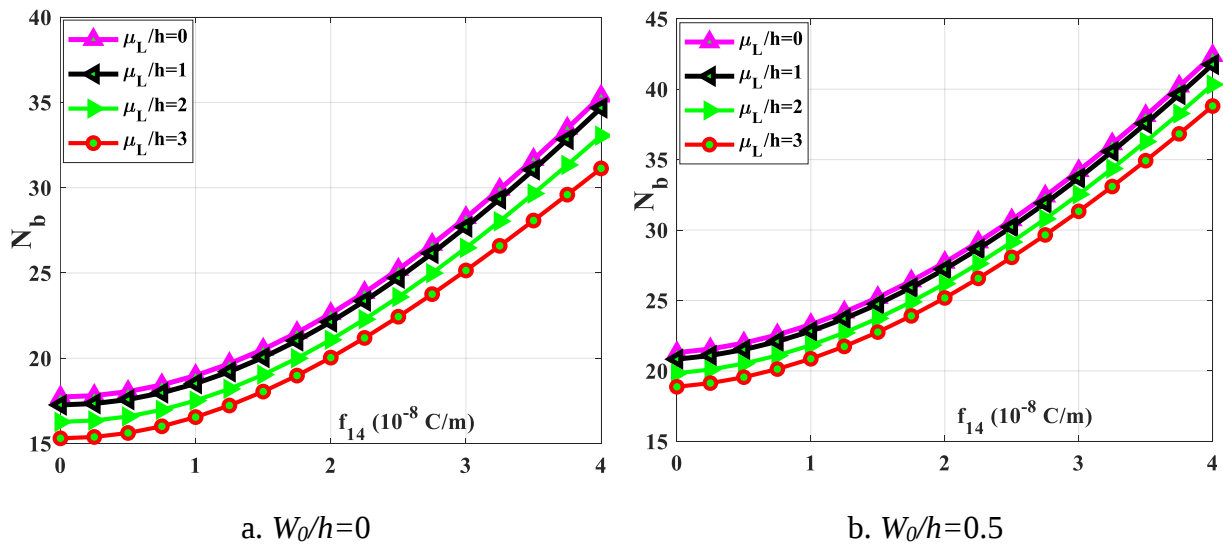
+ Tải tới hạn của dầm trong trường hợp $W_0/h=0,5$ lớn hơn so với trường hợp $W_0/h=0$, điều này cũng có nghĩa là tải tới hạn trong trường hợp phi tuyến lớn hơn so với trường hợp tuyến tính.

+ Khi tăng giá trị của tham số phi cực bộ thì tải tới hạn của dầm nano giảm xuống, điều này chứng tỏ tham số đàn hồi phi cực bộ làm giảm độ cứng của dầm.

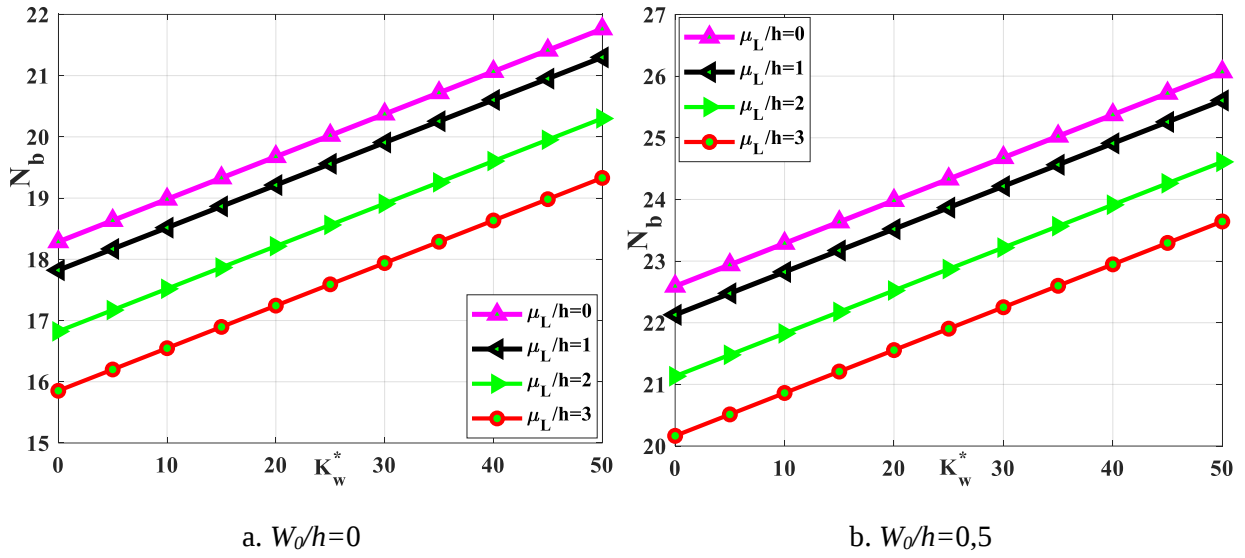
Trên hai hình 4-5 trình bày kết quả tính toán tải tới hạn của dầm nano phụ thuộc độ cứng của nền đàn hồi, các kết quả này cho thấy:

+ Giá trị độ cứng của nền càng lớn thì tải tới hạn của dầm nano càng lớn, điều này là vì độ cứng của dầm đã được tăng lên do nền đàn hồi.

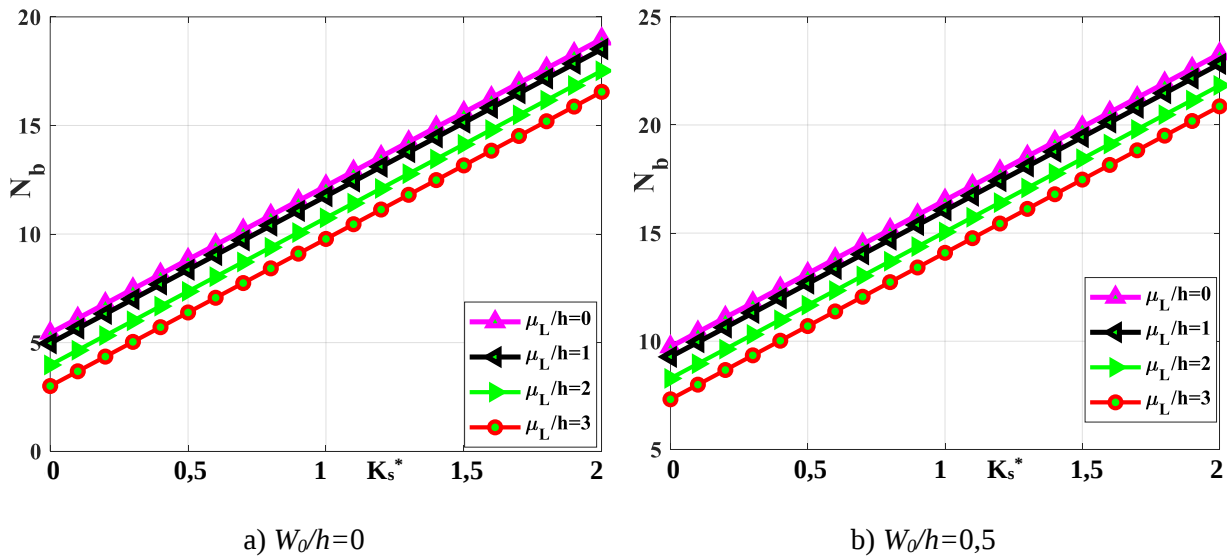
+ Sự biến đổi của tải tới hạn theo độ cứng của nền theo đường tuyến tính.



Hình 3. Sự biến đổi của tải tới hạn phụ thuộc f_{14} với các giá trị khác nhau của W_0 , $\Delta T = 100 \text{ K}$, $\Delta M = 1 (\%\text{H}_2\text{O})$, $p_0 = 0,4$, $V_0 = 0,4$, $K_w^* = 10$, $K_s^* = 2$, 1-8-1.

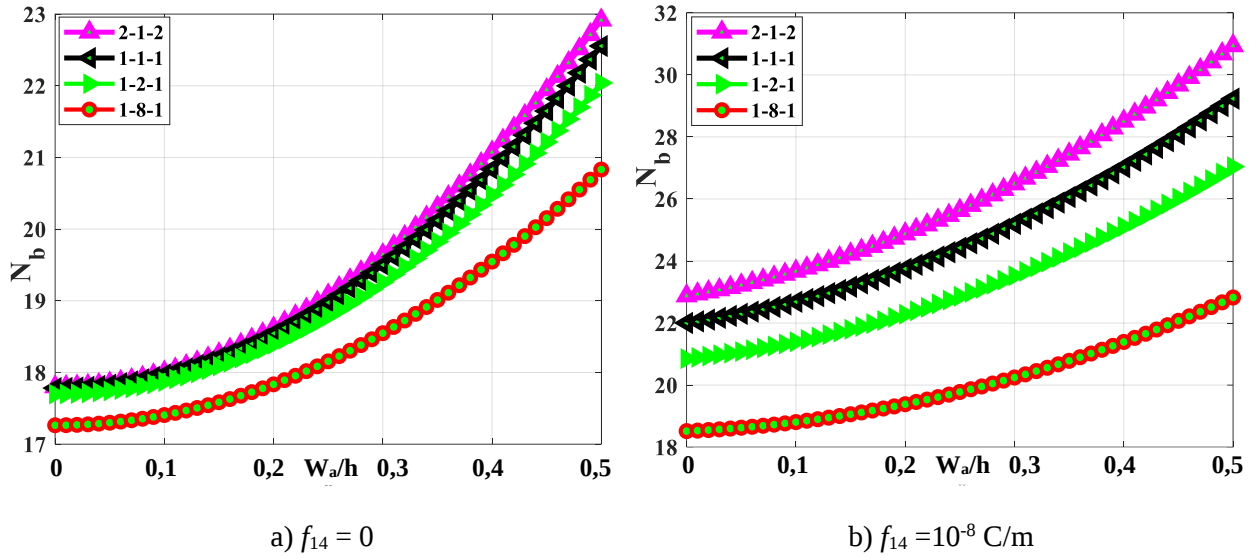


Hình 4. Sự biến đổi của tải tới hạn phụ thuộc K_w^* với các giá trị khác nhau của W_0 , $\Delta T = 100$ K, $\Delta M = 1$ (%H₂O), $f_{14}=10^{-8}$ C/m, $p_0=0,4$, $V_0=0,4$, $K_s^* = 2$, 1-8-1.



Hình 5. Sự biến đổi của tải tới hạn phụ thuộc K_s^* với các giá trị khác nhau của W_0 , $\Delta T = 100$ K, $\Delta M = 1$ (%H₂O), $f_{14}=10^{-8}$ C/m, $p_0=0,4$, $V_0=0,4$, $K_w^* = 10$, 1-8-1.

Hình 6 trình bày kết quả tính toán tải tới hạn của dầm nano phụ thuộc vào tỷ lệ biên độ W_0/h và tỷ lệ chiều dày các lớp, một số nhận xét được rút ra như sau: Tải tới hạn tăng lên theo đường phi tuyến khi tăng giá trị của tỷ lệ biên độ W_0/h , điều này là do tải tới hạn là hàm bậc hai của biên độ W_0 . Khi chiều dày lớp lõi càng lớn thì tải tới hạn của dầm càng nhỏ, điều này là do mô đun đàn hồi của lớp lõi nhỏ hơn so với mô đun đàn hồi của lớp bề mặt.



Hình 6. Sự biến đổi của tải tới hạn phụ thuộc tỷ lệ W_0/h với các giá trị khác nhau của tỷ lệ chiều dày các lớp, $\Delta T = 100 \text{ K}$, $\Delta M = 1 (\% \text{H}_2\text{O})$, $p_0 = 0.4$, $V_0 = 0.4$, $\mu_L = h$, $K_w^* = 10$, $K_s^* = 2$.

5. KẾT LUẬN

Bài báo đã kết hợp giữa lý thuyết biến dạng cắt bậc cao cải tiến với cách tiếp cận giải tích để nghiên cứu tải tới hạn của dầm nhiều lớp tựa trên nền đàn hồi có kể đến hiệu ứng flexoelectric, trong đó có tính đến biến dạng lớn của dầm, các kết luận chính được rút ra như sau:

+ Tham số đàn hồi phi cục bộ càng lớn, thì khả năng chịu tải của dầm càng kém do tải tới hạn của dầm càng giảm.

+ Hiệu ứng flexoelectric đã làm tăng độ cứng của dầm, làm tăng tải tới hạn của dầm, tức là khả năng chịu tải của dầm tăng lên.

Nghiên cứu này là cơ sở khoa học giúp các kỹ sư lựa chọn các tham số hình học và vật liệu để thiết kế các kết cấu dầm nano nhiều lớp trong thực tế.

PHỤ LỤC

$$R_{wb} = \frac{C_{wbT}}{C_{wbT} + C_{wsT}}; R_{ws} = \frac{C_{wsT}}{C_{wbT} + C_{wsT}};$$

$$C_{wbT} = \left[- \left(B_{Ys} - B_{Ts} + B_{ff} - B_{zf} - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} B_{Sff} + \frac{p_{31}^2}{r_{33}} B_{Mzf} \right) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \mu_L^2 (B_{Ts} - B_{Ys}) \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + B_s \right];$$

$$C_{wsT} = \left\{ \left[B_{Yb} - B_{Tb} + B_{fz} - B_{zz} - \frac{p_{31}^2}{r_{33}} A_{Mzf} + \frac{p_{31}^2}{r_{33}} \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h_c^3}{12} \right) \right] - \mu_L^2 (B_{Tb} - B_{Yb}) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right\} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2;$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. P.T. Dat, D.T. Luat, D.V. Thom, Free vibration of functionally graded sandwich plates with stiffeners based on the third-order shear deformation theory, Vietnam Journal of Mechanics, 38 (2016) 103-122. <https://doi.org/10.15625/0866-7136/38/2/6730>.
- [2]. D. M. Tien, D. V. Thom, P. V. Minh, P. H. Hieu, “Bending and buckling responses of organic nanoplates considering the size effect”, Transport and Communications Science Journal, 75 (2024) 2015-2029. <https://doi.org/10.47869/tcsj.75.7.1>
- [3]. D.M. Lan, N.D. Anh, P.V. Dong, D.V. Thom, Ö. Civalek, P.V. Minh, A new Galerkin method for buckling of sandwich nanobeams, Proc. Inst. Mech. Engineers, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 239 (2024) 3034-3051. <https://doi.org/10.1177/09544062241304233>.
- [4]. P. V. Hoan, D. A. Nguyen, V. T. Do, V. M. Phung, Nonlinear vibration of nanobeams in thermal environment, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 53 (2025) 5690-5716. <https://doi.org/10.1080/15397734.2025.2472253>.
- [5]. N.C. Tho, D.M. Tien, D.V. Thom, P.V. Minh, D.V. Doan, A new approach to the static bending problem of organic nanoplates, beams, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 239 (2024) 3052-3064. <https://doi.org/10.1177/09544062241306986>.
- [6]. T. V. Toan, T. H. H. Truong, V. D. Dao, Vibration and buckling analysis of nanoplates resting on variable elastic foundations, Transport and Communications Science Journal, 75 (2024) 2238-2251. <https://doi.org/10.47869/tcsj.75.9.1>.
- [7]. D.H. Duc, D.V. Thom, P.M. Phuc, Buckling analysis of variable thickness cracked nanoplates considering the flexoelectric effect, Transport and Communications Science Journal, 73 (2022) 470-485. <https://doi.org/10.47869/tcsj.73.5.3>.
- [8]. P V. Vinh, NT Dung, D.V. Thom, NC Tho, Modified single variable shear deformation plate theory for free vibration analysis of rectangular FGM plates, Structures, 29 (2021) 1435-1444. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.12.027>.
- [9]. D. M. Tien, D. V. Thom, P. V. Minh, N. C. Tho, T. N. Doan, and D. N. Mai, The application of the nonlocal theory and various shear strain theories for bending and free vibration analysis of organic nanoplates, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 52 (2024) 588-610. <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2186893>.
- [10]. B. Van Tuyen and G. T. Luu, Static Buckling Analysis of FG Sandwich Nanobeams, Journal of Vibration Engineering & Technologies, 12 (2024) 3729–3754. <https://doi.org/10.1007/s42417-023-01081-6>.
- [11]. J. N. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, International journal of engineering science, 45 (2007) 288–307. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.04.004>.
- [12]. M. Aydogdu, A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 41(2009) 1651–1655. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.05.014>.
- [13]. M. A. Eltaher, S. A. Emam, and F. F. Mahmoud, Static and stability analysis of nonlocal functionally graded nanobeams, Composite Structures, 96 (2013) 82–88. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.030>
- [14]. S. A. Emam, A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams, Applied Mathematical Modelling, 37 (2013) 6929–6939. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.043>