



STUDY OF THE STRESS STATE, DEFLECTION, AND VIBRATION OF CRACKED CONCRETE PLATES

Pham Minh Phuc¹, Mai Anh Dung², Nguyen Dinh Du^{3*}

¹University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.

²Graduate student, Graduate School, Lac Hong University, No 10, Huynh Van Nghe street, Dong Nai, Vietnam

³Faculty of Civil Engineering, Lac Hong University, No 10, Huynh Van Nghe street, Dong Nai, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 18/9/2025

Revised: 05/10/2025

Accepted: 12/10/2025

Published online: 15/10/2025

<https://doi.org/10.47869/tcsj.76.8.3>

* *Corresponding author*

Email: nguyendinhdu@lhu.edu.vn

Abstract. The Portland cement concrete (PCC) plates in transportation infrastructure and floor systems commonly develop cracks due to repeated loading, shrinkage, and environmental effects, which reduce stiffness, increase deflection, and alter dynamic characteristics. Accurate modeling of the stress state, deflection, and vibration is therefore essential for assessment and strengthening design. This paper presents a unified computational framework for cracked PCC plates that combines the first-order shear deformation theory (FSDT) to represent moderately thick plate behavior, a phase-field model to describe a continuous crack field without explicit crack-front tracking, and the finite element method (FEM) for static bending and free-vibration analyses. The model is validated against reputable studies (deflection of PCC plates, responses of cracked plates, and the relationship between cracking and natural frequencies), and then used for a parametric study with respect to crack length, crack inclination angle, boundary conditions, and thickness ratio. The results show that edge stresses and stresses in the crack-tip vicinity increase markedly, and the stress/deflection fields depend strongly on crack length and boundary conditions. The mid-plate deflection and natural frequencies decrease monotonically as crack length increases, whereas the influence of crack orientation is secondary compared with crack length for the cases investigated.

Keywords: Stress; deflection; phase-field; cracks; Portland cement concrete (PCC) plate; finite element method (FEM); FSDT.



NGHIÊN CỨU TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT, ĐỘ VÔNG VÀ DAO ĐỘNG CỦA TẤM BÊ TÔNG XI MĂNG CÓ VẾT NỨT

Phạm Minh Phúc¹, Mai Anh Dũng², Nguyễn Đình Du^{3*}

¹Trường Đại học Giao thông vận tải, 03 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

²Học viên cao học, Khoa Sau đại học, Trường Đại học Lạc Hồng, Số10, Huỳnh Văn Nghệ, Đồng Nai, Việt Nam

³Khoa Kỹ thuật công trình, Trường Đại học Lạc Hồng, Số10, Huỳnh Văn Nghệ, Đồng Nai, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 18/9/2025

Ngày nhận bài sửa: 05/10/2025

Ngày chấp nhận đăng: 12/10/2025

Ngày xuất bản Online: 15/10/2025

<https://doi.org/10.47869/tcsj.76.8.3>

* Tác giả liên hệ

Email: nguyendinhdu@lhu.edu.vn

Tóm tắt. Các tấm bê tông xi măng (BTXM) trong công trình giao thông và kết cấu sàn thường xuất hiện vết nứt do tải trọng lặp, co ngót và môi trường, làm suy giảm độ cứng, tăng độ võng và thay đổi đặc trưng dao động. Vì vậy, cần mô hình hóa chính xác trạng thái ứng suất, độ võng, dao động để phục vụ đánh giá và thiết kế tăng cường. Bài báo này trình bày một khung tính toán thống nhất cho tấm BTXM có vết nứt dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) để mô tả ứng xử tấm chiều dày trung bình, mô hình phase-field để mô tả trường nứt liên tục không cần theo dõi biên nứt, và phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) cho bài toán uốn tĩnh và dao động tự do. Mô hình được kiểm chứng bằng cách so sánh với các nghiên cứu uy tín (độ võng tấm BTXM, đáp ứng tấm nứt và mối liên hệ giữa vết nứt và tần số riêng), sau đó thực hiện khảo sát tham số theo chiều dài vết nứt, góc nghiêng vết nứt, điều kiện biên và tỷ số chiều dày. Kết quả cho thấy: ứng suất biên và vùng lân cận tip nứt tăng rõ rệt và trường ứng suất/độ võng phụ thuộc mạnh vào chiều dài vết nứt và điều kiện biên; độ võng tại giữa tấm và tần số riêng giảm đơn điệu khi chiều dài vết nứt tăng; trong khi đó góc nứt ảnh hưởng thứ yếu hơn so với chiều dài nứt trong các trường hợp khảo sát.

Từ khóa: Ứng suất; độ võng; phase field; vết nứt; tấm bê tông xi măng (BTXM); phần tử hữu hạn (PTHH); FSDT.

@ 2025 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Sự hình thành và lan truyền vết nứt trong các kết cấu dạng tấm là nguyên nhân trực tiếp dẫn đến suy giảm độ cứng, tăng độ võng và biến đổi đặc trưng dao động – những yếu tố chi phối an toàn khai thác và tuổi thọ công trình. Với các hệ vật liệu hiện đại, từ composite lớp đến vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM), cộng đồng nghiên cứu đã phát triển nhiều mô hình tấm và kỹ thuật tính để mô tả ứng xử cơ – nhiệt và ảnh hưởng của nứt. Tuy nhiên, với tấm bê tông xi măng (BTXM) – đối tượng chủ đạo trong kết cấu mặt đường và các bản sàn công nghiệp – việc xây dựng một khung mô hình thống nhất để đồng thời đánh giá trạng thái ứng suất, độ võng và dao động khi có vết nứt vẫn còn thiếu, đặc biệt theo hướng kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), phương pháp phase-field và phần tử hữu hạn (PTHH).

Ở hướng nền tảng, Singha [1] đã trình bày một mô hình PTHH cho tấm FGM chịu tải cơ – nhiệt, cho thấy hiệu quả của tiếp cận tấm Mindlin–Reissner trong xử lý bài toán tĩnh và dao động của tấm có chiều dày trung bình đến dày. Zenkour [2] tiếp tục phát triển các lý thuyết biến dạng cắt tổng quát (GSDT), khắc phục điểm yếu của FSDT về hệ số hiệu chỉnh cắt và thỏa điều kiện biên ứng suất cắt triệt tiêu ở hai mặt tấm theo cách tự nhiên hơn – một xu hướng quan trọng để mô tả phân bố ứng suất chính xác khi có bất liên tục.

Bên cạnh đó, các công trình trong nước về composite lớp dạng gấp nếp đã chứng minh tính ưu việt của PTHH trong mô tả cả uốn và dao động khi hình học và bố trí vật liệu phức tạp. Trần Ích Thịnh và cộng sự [3] xây dựng phần tử tấm 8 nút (5 bậc tự do/nút), thiết lập chương trình MATLAB, kiểm chứng hội tụ và khảo sát ảnh hưởng góc gấp đến tần số riêng và độ võng. Ở hướng tấm chịu uốn, một nghiên cứu khác [4] đã đối sánh kết quả độ võng và mô men uốn với các nghiệm kinh điển của Timoshenko, Zenkour và các lời giải PTHH khác, củng cố độ tin cậy của mô hình số khi xử lý tấm FGM tựa khớp trên chu vi. Các khảo sát phi tuyến gần đây cho tấm FGM xếp đặt trên nền đàn hồi cũng cho thấy ảnh hưởng mạnh của điều kiện biên, tham số nền và phân bố lỗ rỗng đến độ võng/nội lực; đồng thời nhấn mạnh rằng đánh giá phi tuyến cho “biên an toàn” tin cậy hơn so với tuyến tính [5]. Những kết luận này gợi mở yêu cầu mô hình hóa nhất quán khi chuyển sang vật liệu giòn như BTXM – nơi hiệu ứng nứt chi phối đáp ứng kết cấu.

Ở lĩnh vực mặt đường BTXM, đã có những tiếp cận chuyên sâu về ứng suất nhiệt và tương tác các lớp. Nghiên cứu [6] cho thấy sự phân bố ứng suất nhiệt trong tấm BTXM liên kết với các lớp vật liệu khác nhau có thể tạo điều kiện bất lợi khởi phát vết nứt. Gần đây, [7] phân tích trạng thái ứng suất – biến dạng của mặt đường BTXM có/không có tiếp xúc giữa các lớp, chứng minh vai trò quyết định của điều kiện tiếp xúc đến nội lực trong tấm.

Đối với mô tả vết nứt, các cách tiếp cận phong phú đã được phát triển cho tấm FGM. Natarajan và cộng sự [8] sử dụng phần tử hữu hạn mở rộng (XFEM) để tính tần số dao động riêng của tấm FGM có nứt, thể hiện lợi thế của phương pháp không cần tái chia lưới khi có bất liên tục hình học.

Ở hướng phase-field, các nghiên cứu trong nước [9] đã ghép FSDT + phase-field để mô tả dao động của tấm FGM có vết nứt tĩnh và chiều dày biến thiên, cho thấy tần số phụ thuộc tỉ lệ cạnh, chiều dài và góc nghiêng vết nứt - trong đó chiều dài là nhạy nhất. Mở rộng theo TSDT, công trình [10] tiếp tục xác nhận hiệu quả của phase-field trong mô tả vết nứt khuếch tán cho tấm chữ nhật chiều dày không đồng nhất. Bổ sung góc nhìn ổn định, Đức và cộng sự [11] phân tích ổn định của tấm nano biến thiên chiều dày có vết nứt tĩnh dưới hiệu ứng flexoelectric, nhấn mạnh vai trò liên hợp đa trường và hiệu ứng tỉ lệ.

Trên bình diện phương pháp số bậc cao, Singh và cộng sự [12] đề xuất phương pháp GHSDT–XIGA cho tấm FGM có nứt, đảm bảo điều kiện ứng suất cắt triệt tiêu tại bề mặt mà không cần hệ số hiệu chỉnh, đồng thời tận dụng NURBS để thỏa yêu cầu liên tục của HSDT và mô hình hóa vết nứt qua các hàm làm giàu. Bổ sung góc nhìn “nhận dạng hư hại”, Zhu và cộng sự [13] nghiên cứu dao động tự do và nhận dạng hư hại của tấm FGM có nứt, nhấn mạnh mối liên hệ giữa biến thiên tần số và mức độ suy giảm độ cứng – một cơ sở quan trọng để đánh giá trạng thái làm việc của tấm. Cuối cùng, các phát triển ba chiều gần đây cho kết cấu phức tạp như cánh quay tiền xoắn, chiều dày biến đổi và vật liệu phân bậc theo phương sai [14], cùng tinh thần isogeometric, cho thấy xu hướng mô hình hóa ngày càng “sát vật lý” đối với kết cấu có biến thiên vật liệu/hình học và khuyết tật.

Từ tổng quan trên có thể nhận thấy: (i) phần lớn các công trình tập trung vào FGM/composite, trong khi BTXM – vật liệu giòn, nứt do tải cơ – nhiệt – co ngót, và điều kiện tiếp xúc lớp phức tạp – chưa được nghiên cứu sâu dưới góc nhìn kết hợp đồng thời ứng suất, độ võng và dao động trong một khung mô hình thống nhất; (ii) nhiều nghiên cứu về nứt dùng XFEM/XIGA hoặc phase-field nhưng hoặc là tập trung vào dao động/buckling riêng lẻ, hoặc giả thiết vật liệu khác BTXM; (iii) ngay cả khi xét nứt, các tham số biên quan trọng của mặt đường BTXM như điều kiện tựa cạnh, tiếp xúc lớp, tải nhiệt chưa được tích hợp đồng thời. Điều này dẫn tới nhu cầu phát triển một mô hình có khả năng: (a) mô tả nứt khuếch tán không cần theo dõi mặt nứt (phase-field), (b) phản ánh biến dạng cắt hợp lý của tấm dày/vừa (FSDT), và (c) dễ dàng triển khai trên miền hình học phức tạp (PTHH).

Trong nghiên cứu này, mô hình FSDT–phase-field–PTHH được đề xuất dành riêng cho tấm BTXM có nứt. Cho phép đồng thời: (1) xác định trường ứng suất – biến dạng và độ võng dưới tải trọng, (2) phân tích dao động tự do khi tồn tại vết nứt, và (3) khảo sát một cách có hệ thống ảnh hưởng của điều kiện biên, chiều dài vết nứt và góc nghiêng vết nứt, qua đó cung cấp bức tranh đầy đủ hơn về độ an toàn và độ tin cậy của tấm nứt trong thực tế khai thác.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Nghiên cứu này xem xét một tấm hình chữ nhật có kích thước hình học của tấm bao gồm chiều dài L_x , chiều rộng L_y và chiều dày h .

Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Mindlin [9], sự dịch chuyển tại điểm bất kỳ của tấm được mô tả bởi các phương trình :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó $u_0; v_0; w_0$ là dịch chuyển theo ba phương x, y và z tại mặt giữa tấm; ϕ_x, ϕ_y là các góc quay quanh trục y và trục x .

Trường biến dạng tuyến tính khác không của tấm được mô tả như dưới đây:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + z\kappa_x, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^0 + z\kappa_y, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 \quad (2)$$

$$\text{Với: } \{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}; \{\gamma^0\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Mối quan hệ tuyến tính giữa ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Hooke được mô tả như sau [9].

$$\{\sigma\} = \mathbf{D}_m \left(\{\varepsilon^0\} + z \{\kappa\} \right); \{\tau\} = \mathbf{D}_s \{\gamma^0\} \quad (4)$$

Trong đó:

$$\mathbf{D}_m = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \mathbf{D}_s = \frac{k.E.h}{2.(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Tích phân các thành phần ứng suất dọc theo chiều dày tấm, ta nhận được các mô men uốn:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (6)$$

Phương trình cân bằng của tấm dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều $q(x, y)$ có dạng [1]:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = q(x, y) \quad (7)$$

Năng lượng biến dạng của tấm:

$$U(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \{\varepsilon^0\}^T \mathbf{A} \{\varepsilon^0\} + \{\varepsilon^0\}^T \mathbf{B} \{\kappa\} + \{\kappa\}^T \mathbf{B}^T \{\varepsilon^0\} + \{\kappa\}^T \mathbf{D}_b \{\kappa\} + \{\gamma^0\}^T \mathbf{D}_s \{\gamma^0\} \right\} d\Omega \quad (8)$$

$$\text{Với } (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}_b) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \mathbf{D}_m dz$$

Trong cơ học phá hủy, tiếp cận phase-field mô tả mức độ hư hỏng của vật liệu bằng một trường vô hướng $s \in [0, 1]$ [9, 10]. Ở đây $s=1$ biểu thị vật liệu còn nguyên vẹn, $s=0$ ứng với trạng thái phá hủy hoàn toàn; các giá trị $0 < s < 1$ phản ánh giai đoạn mềm hóa, khi các vi nứt (*micro-crack*) xuất hiện và độ cứng suy giảm dần. Nhờ vậy, một vết nứt không còn là biên rời rạc mà được “trải” thành một vùng khuếch tán hẹp nơi s biến thiên liên tục từ $0 \rightarrow 1$ (phá hủy $\rightarrow$ mềm hóa $\rightarrow$ nguyên vẹn). Cách mô tả liên tục này loại bỏ mặt bất liên tục hình học, cho phép tính đạo hàm và tích phân trơn tru trên toàn miền tính. Trong khuôn khổ bài báo, biến s đi vào hàm năng lượng biến dạng của tấm thông qua các hạng phụ thuộc s trong (9–10), với ý nghĩa làm suy giảm năng lượng đàn hồi về gần 0 tại các vùng nứt.

Năng lượng biến dạng của tấm khi có vết nứt:

$$U(\mathbf{d}, s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} s^2 \left\{ \{\varepsilon^0\}^T \mathbf{A} \{\varepsilon^0\} + \{\varepsilon^0\}^T \mathbf{B} \{\kappa\} + \{\kappa\}^T \mathbf{B} \{\varepsilon^0\} + \{\kappa\}^T \mathbf{D}_b \{\kappa\} + \{\gamma^0\}^T \mathbf{D}_s \{\gamma^0\} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} G_c h \left[\frac{(1-s)^2}{4\ell_c} + \ell_c |\nabla s|^2 \right] d\Omega \quad (9)$$

Động năng của tấm [9]:

$$T(\mathbf{d}, s) = \frac{1}{2} \int_V s^2 \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (10)$$

Hàm Lagrangian cho tấm có thể được biểu diễn như sau:

$$L(\mathbf{d}, s) = T(\mathbf{d}, s) - U(\mathbf{d}, s) \\ \Rightarrow L(\mathbf{d}, s) = \int_{\Omega} s^2 \Gamma(\mathbf{d}) d\Omega - \int_{\Omega} G_c h \left[\frac{(1-s)^2}{4\ell_c} + \ell_c |\nabla s|^2 \right] d\Omega \quad (11)$$

Biến phân bậc nhất của hàm Lagrangian được tính như sau:

$$\begin{cases} \delta L(\mathbf{d}, s, \delta \mathbf{d}) = 0 \\ \delta L(\mathbf{d}, s, \delta s) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Từ đó, ta có hệ phương trình xác định tần số dao động tự do của tấm có vết nứt:

$$\begin{cases} (\sum \mathbf{K}^e + \omega^2 \sum \mathbf{M}^e) \mathbf{d} = 0 \\ \int_{\Omega} 2s\Gamma(\mathbf{d}) \delta s d\Omega - \int_{\Omega} G_c h \left[\frac{(1-s)^2}{4\ell_c} + \ell_c |\nabla s|^2 \right] = 0 \end{cases} \quad (13)$$

trong đó: $\mathbf{K}^e; \mathbf{M}^e$ tương ứng là ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của phần tử tấm, chúng có công thức tính được mô tả cụ thể trong tài liệu [9].

3. KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

3.1. Kiểm chứng độ chính xác

3.1.1. Bài toán tấm chịu uốn:

Đối tượng khảo sát là một tấm vuông với cạnh $L_x = 1$ m, chiều dày $h = L_x/100$, và các thông số cơ học của vật liệu bao gồm: mô đun đàn hồi $E = 380$ GPa (Al_2O_3), hệ số Poisson $\nu = 0,3$ và khối lượng riêng $\rho = 3800$ kg/m³. Tấm chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều q_0 . Kết quả chuyển vị tại tâm tấm ($L_x/2, L_y/2$) và mô men uốn lớn nhất không thứ nguyên được so sánh với các kết quả của Singha và cộng sự [1] và Phụng và cộng sự [3].

$$\hat{w}_{\max} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)q_0L_x^4} w\left(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2}\right); \quad \hat{M}_{x\max} = \frac{1}{q_0L_x^2} M_x\left(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2}\right); \quad (14)$$

Bảng 1. Độ võng và mô men uốn lớn nhất không thứ nguyên của tấm vuông đồng nhất, liên kết khớp trên chu vi.

	Singha và cộng sự [1]	Phượng và cộng sự [3]	Kết quả với chia lưới khác nhau			
			4x4	8x8	15x15	25x25
$\hat{w}_{\max}$	0,00406	0,00406	0,0040633	0,00406437	0,00406402	0,00406403
$\hat{M}_{x\max}$	0,0477	0,0479	0,04792	0,04799	0,04794	0,04794

3.1.2. Bài toán dao động tự do:

Trong bài toán này, xét tấm vuông ($L_x = L_y$) có vết nứt ở tâm tấm với chiều dài $L_c/L_x=0,1; 0,3; 0,5$, các thông số cơ học của vật liệu bao gồm: mô đun đàn hồi $E = 380 \text{ GPa}$ (Al_2O_3), hệ số Poisson $\nu = 0,3$ và khối lượng riêng $\rho = 3800 \text{ kg/m}^3$. Công thức xác định tần số dao động tự do không thứ nguyên của tấm:

$$\hat{\omega} = \frac{\omega L_x^2 \sqrt{\rho/E}}{h} \quad (15)$$

Kết quả số được so sánh với các kết quả của Huang và cộng sự [15] trong Bảng 2:

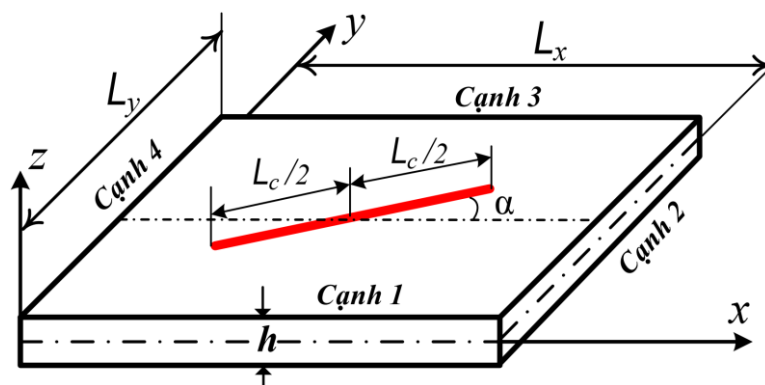
Bảng 2. Tần số dao động không thứ nguyên của tấm đồng nhất có vết nứt ở tâm.

	Chiều dài vết nứt (L_c/L_x)			
	0	0,1	0,3	0,5
Huang và cộng sự [15]	5,965	5,939	5,665	5,318
Bài báo	5,96681	5,9194	5,65907	5,3228
Sai khác	0,03%	-0,33%	-0,10%	0,09%

Các kết quả trong bảng 1 và 2 cho thấy thuật toán và chương trình tính của nhóm tác giả là đáng tin cậy khi so sánh với kết quả trong nghiên cứu của [1, 3] và [15]. Lưới 15×15 cho kết quả hội tụ. Các giá trị về độ võng và mô men uốn rất sát với các nghiên cứu so sánh, các giá trị về tần số dao động riêng chênh lệch lớn nhất là 0,33%. Từ đó, chương trình tính được phát triển để tính độ võng, ứng suất, tần số dao động tự do của tấm bê tông có vết nứt như mục 3.2 dưới đây.

3.2. Kết quả khảo sát số

Trong phần này, nhóm tác giả xét tấm bê tông xi măng (BTXM) hình chữ nhật với kích thước L_x, L_y ; làm việc theo mô hình tấm biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) kết hợp mô phỏng phase-field để mô tả trạng thái nứt. Thuộc tính vật liệu BTXM được chọn theo các nghiên cứu thực nghiệm–mô phỏng cho mặt đường: mô đun đàn hồi $E=29\text{GPa}$; hệ số Poisson $\nu = 0,15$; khối lượng riêng $\rho=2400 \text{ kg/m}^3$. Tấm có một vết nứt ở tâm, chiều dài ký hiệu L_c , tạo với trục x một góc α (Hình 1). Phương pháp PTHH được triển khai nhất quán cho cả bài toán tĩnh và dao động, với ảnh hưởng của vết nứt lên độ cứng, tần số đã được chứng thực qua các nghiên cứu về tâm nứt. Điều kiện biên được mô tả thống nhất trong nghiên cứu, ví dụ CSCF: cạnh 1 và cạnh 3 liên kết ngầm (C); cạnh 2 tựa (S); cạnh 4 tự do (F).



Hình 1. Dạng hình học tấm BTXM có vết nứt ở tâm.

3.2.1. Độ võng và ứng suất trong tấm

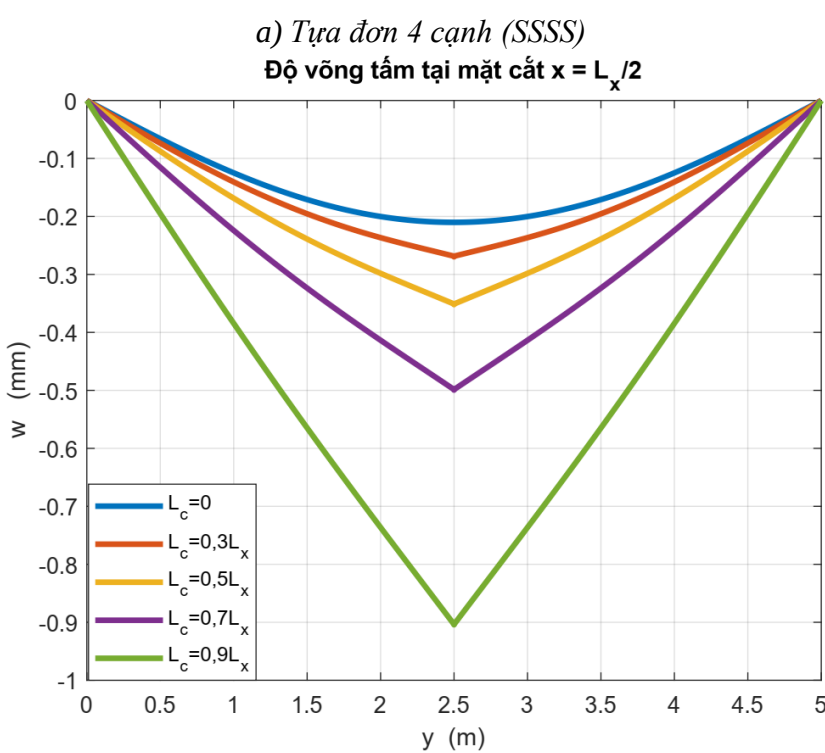
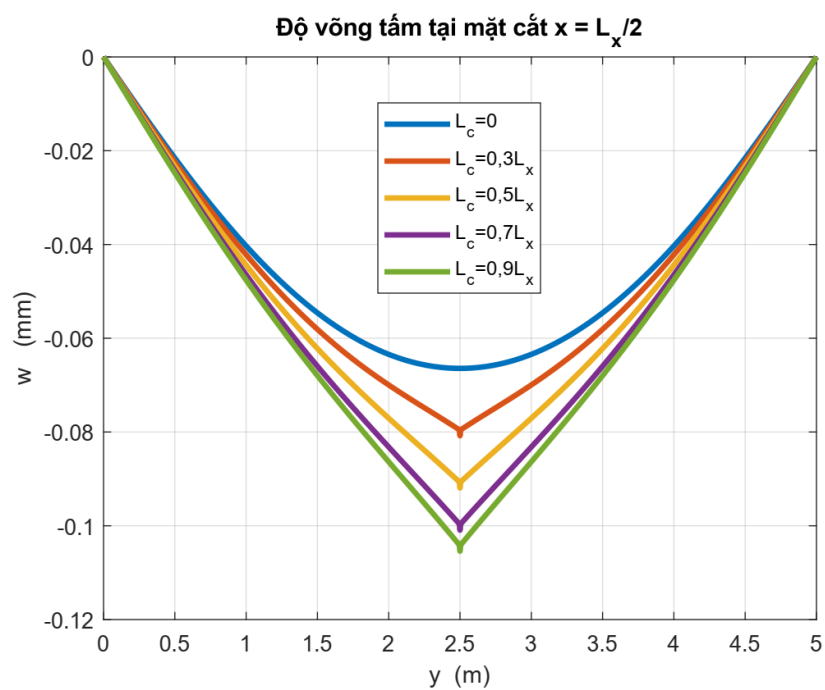
Mục này trình bày đáp ứng tĩnh của tấm BTXM kích thước $L_x=L_y=5\text{m}$; chiều dày $h=25\text{cm}$, nứt dưới tải cơ học phân bố đều trên mặt tấm ($q=1\text{kN/m}^2$), gồm chuyển vị (độ võng) w và trường ứng suất uốn–cắt. Với E , ν và ρ đã nêu, mô hình phase-field làm suy giảm độ cứng tại vùng nứt theo biến s , qua đó phản ánh đúng hiện tượng mềm hóa và tập trung ứng suất ở đầu nứt. Độ võng tại tâm và ứng suất được khảo sát theo các tham số L_c và α , cùng các tổ hợp điều kiện biên đặc trưng của tấm BTXM.

Hình 2 minh họa đường võng dọc theo trục giữa $x=L_x/2$ khi chiều dài vết nứt L_c tăng từ 0 đến $0,9L_x$. Ở cấu hình SSSS (a), các đường cong đối xứng và chập về $w=0$ tại biên, cho thấy ràng buộc tựa khớp chi phối. Độ võng cực đại tăng đơn điệu theo L_c , nhưng mức tăng tương đối vừa phải. Ngược lại, với SFSF (b), biên tự do làm giảm độ cứng toàn cục nên độ võng lớn hơn đáng kể (khoảng bội số so với SSSS), và độ nhạy với L_c rất mạnh - trường hợp $L_c=0,9L_x$ cho w_{min} sâu nhất. Cả hai đồ thị đều cho dạng “chữ V” đặc trưng; sự chập đường gần biên ở SSSS và không chập ở SFSF phù hợp với điều kiện biên. Kết quả nhấn mạnh tầm quan trọng của chiều dài vết nứt L_c và điều kiện biên trong đánh giá sử dụng.

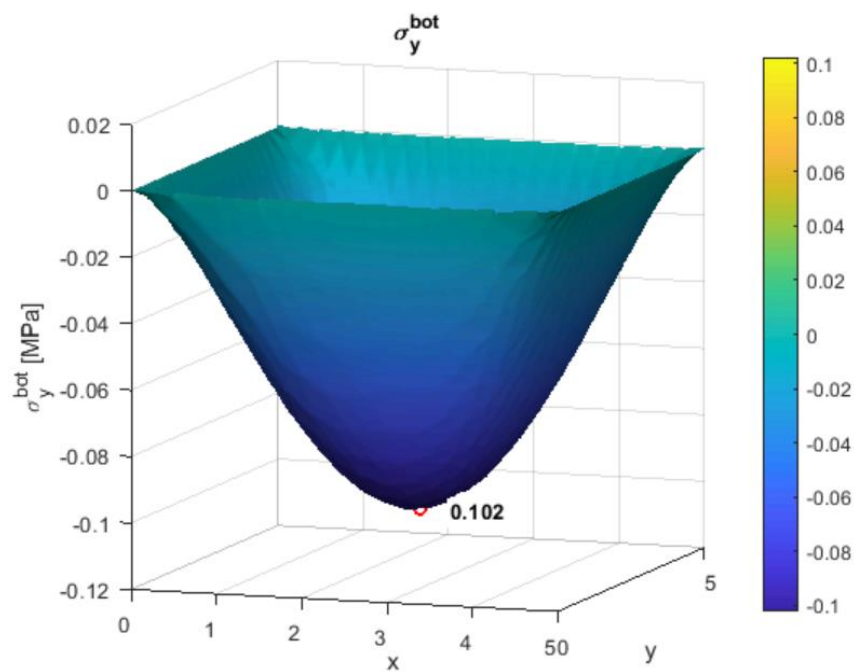
Hình 3 minh họa phân bố ứng suất pháp σ_y tại mặt dưới của tấm BTXM cho hai điều kiện biên: SSSS và SFSF. Với SSSS, trường ứng suất kéo có dạng “chảo” đối xứng, cực đại xuất hiện tại tâm; gần biên, σ_y tiến nhỏ dần về biên do liên kết tựa khớp. Trái lại, tấm với điều kiện biên SFSF cho phép quay lớn ở hai biên tự do, khiến độ cong theo y tăng mạnh và đẩy vị trí ứng suất lớn về sát mép tự do; giá trị cực đại xấp xỉ gấp ba trường hợp SSSS. Kết quả nhấn mạnh vai trò chi phối của điều kiện biên: biên càng “mềm” (tự do) thì biên độ ứng suất càng lớn.

3.2.2. Phân tích dao động của tấm BTXM có vết nứt

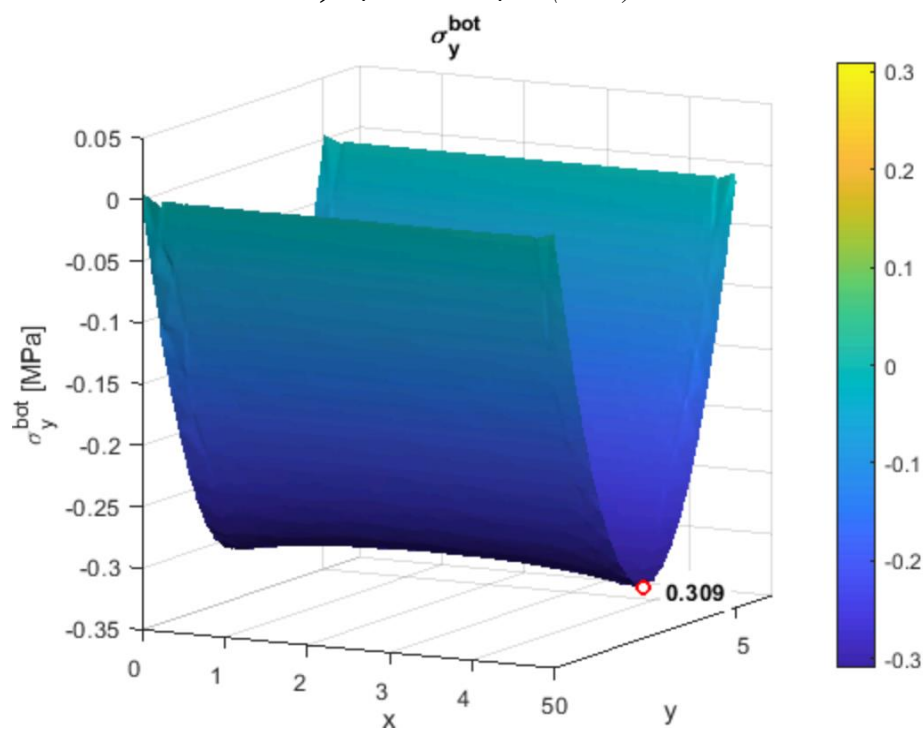
Tiếp theo, khảo sát dao động tự do nhằm định lượng ảnh hưởng của nứt tới tần số riêng và dạng dao động. Bài toán trị riêng được giải trên cùng lưới phân tử với bài toán tĩnh để đảm bảo nhất quán ma trận khối lượng, độ cứng. Các thuộc tính của tấm BTXM được lấy số liệu theo mục 3.2.1; kích thước tấm $L_x=1\text{m}$; $h=10\text{cm}$. Tham số tần số được tính theo công thức (15).



b) Hai cạnh tựa, hai cạnh tự do (SFSF)
Hình 2. Độ võng tằm tại mặt cắt giữa vuông góc với vết nứt.



a) Tựa đơn 4 cạnh (SSSS)



b) Hai cạnh tựa, hai cạnh tự do (SFSF)

Hình 3. Ứng suất pháp σ_y tại mặt dưới tấm BTXM.

Bảng 3. Tần số dao động tự do của tấm BTXM có vết nứt khi tỉ lệ cạnh tấm thay đổi $\alpha=0$; SSSS.

Chiều dài vết nứt (L_c/L_x)	Tỉ lệ cạnh của tấm (L_y/L_x)						
	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
0	13,4224	7,68387	5,59411	4,61133	4,07321	3,74728	3,53515
0,1	13,0424	7,58098	5,55742	4,5957	4,0655	3,74287	3,53218
0,3	11,3761	7,08272	5,3625	4,50494	4,01745	3,71473	3,51432
0,5	9,70533	6,51757	5,12337	4,38733	3,95264	3,67568	3,48905
0,7	8,57622	6,10191	4,93564	4,29035	3,89729	3,64147	3,46647

Các giá trị trong Bảng 3 là tham số tần số chuẩn hoá theo công thức (15). Với mọi tỉ lệ cạnh L_y/L_x ; tham số tần số giảm đơn điệu khi chiều dài vết nứt tăng - phù hợp với việc độ cứng suy giảm. Mức độ nhạy phụ thuộc mạnh vào L_y/L_x :

$L_y/L_x=0,5$: tham số tần số giảm từ 13,4224 ($L_c=0$) xuống 8,5762 ($L_c/L_x=0,7$), tức giảm 36% – ảnh hưởng nứt rất rõ.

$L_y/L_x=1$: từ 5,5941 xuống 4,9356 (11,8%).

$L_y/L_x=2$: từ 3,5352 xuống 3,4665 (1,9%).

Như vậy, tấm “ngắn-rộng” (L_y/L_x nhỏ) nhạy với nứt hơn bản dài-hẹp (L_y/L_x lớn). Xu thế giảm đều của tần số theo L_c/L_x ở mọi L_y/L_x xác nhận vai trò chi phối của chiều dài vết nứt đối với đặc trưng dao động của tấm BTXM tựa khớp bốn cạnh.

Bảng 4. Tham số tần số của tấm BTXM vuông phụ thuộc góc nghiêng vết nứt; SSSS.

L_c/L_x	Góc nghiêng vết nứt α					
	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	45^0
0	5,59411	5,59411	5,59411	5,59411	5,59411	5,59411
0,2	5,47291	5,4725	5,47148	5,47023	5,46925	5,46901
0,4	5,24149	5,23754	5,22736	5,2156	5,20762	5,20634
0,6	5,01888	5,00462	4,96771	4,92427	4,89463	4,89031
0,8	4,87801	4,8456	4,75976	4,65442	4,58003	4,56959

Do tấm đối xứng nên chỉ khi tính tần số của tấm phụ thuộc góc nghiêng vết nứt, ta chỉ cần xét $0^0 \leq \alpha \leq 45^0$ như Bảng 4. Với mỗi chiều dài vết nứt, tham số tần số giảm đơn điệu theo góc nghiêng α : góc α càng lớn, độ cứng hữu hiệu càng suy giảm và tần số càng thấp. Mức ảnh hưởng của góc phụ thuộc mạnh vào độ dài nứt:

Giảm ít nhất (góc tác động rất nhỏ): $L_c/L_x=0,2$ từ $\alpha=0^0$ đến 45^0 chỉ giảm thêm $\approx 0,07\%$ ($5,47291 \rightarrow 5,46901$). So với tấm nguyên vẹn, mức giảm là $\approx 2,2\%$ tại 0^0 và 45^0 , chênh lệch do góc gần như không đáng kể.

Giảm nhiều nhất (góc tác động mạnh): $L_c/L_x=0,8$ từ $\alpha=0^0$ đến 45^0 giảm thêm $\approx 6,3\%$ ($4,87801 \rightarrow 4,56959$). Tính từ mức nguyên vẹn, tần số giảm $\approx 12,8\%$ ở 0^0 và $\approx 18,3\%$ ở 45^0 .

Như vậy, chiều dài vết nứt vẫn chi phối mức suy giảm chính, nhưng góc nghiêng trở thành yếu tố tăng cường suy giảm đáng kể khi vết nứt đã đủ dài; với nứt ngắn, ảnh hưởng của góc gần như thứ yếu.

Bảng 5. Tham số tần số của tấm BTXM với các điều kiện biên khác nhau; SSSS.

L_c/L_x	Điều kiện biên					
	<i>CCCC</i>	<i>CSCS</i>	<i>CFCF</i>	<i>SSSS</i>	<i>SSSF</i>	<i>SFSF</i>
0	9,63767	7,88162	6,14116	5,59411	3,43815	2,82189
0,2	9,4395	7,67207	5,99976	5,47291	3,35891	2,71716
0,4	9,08599	7,28278	5,70059	5,24149	3,187	2,49059
0,6	8,81517	6,92434	5,32393	5,01888	2,95684	2,17435
0,8	8,69749	6,70536	4,90478	4,87801	2,68034	1,75641

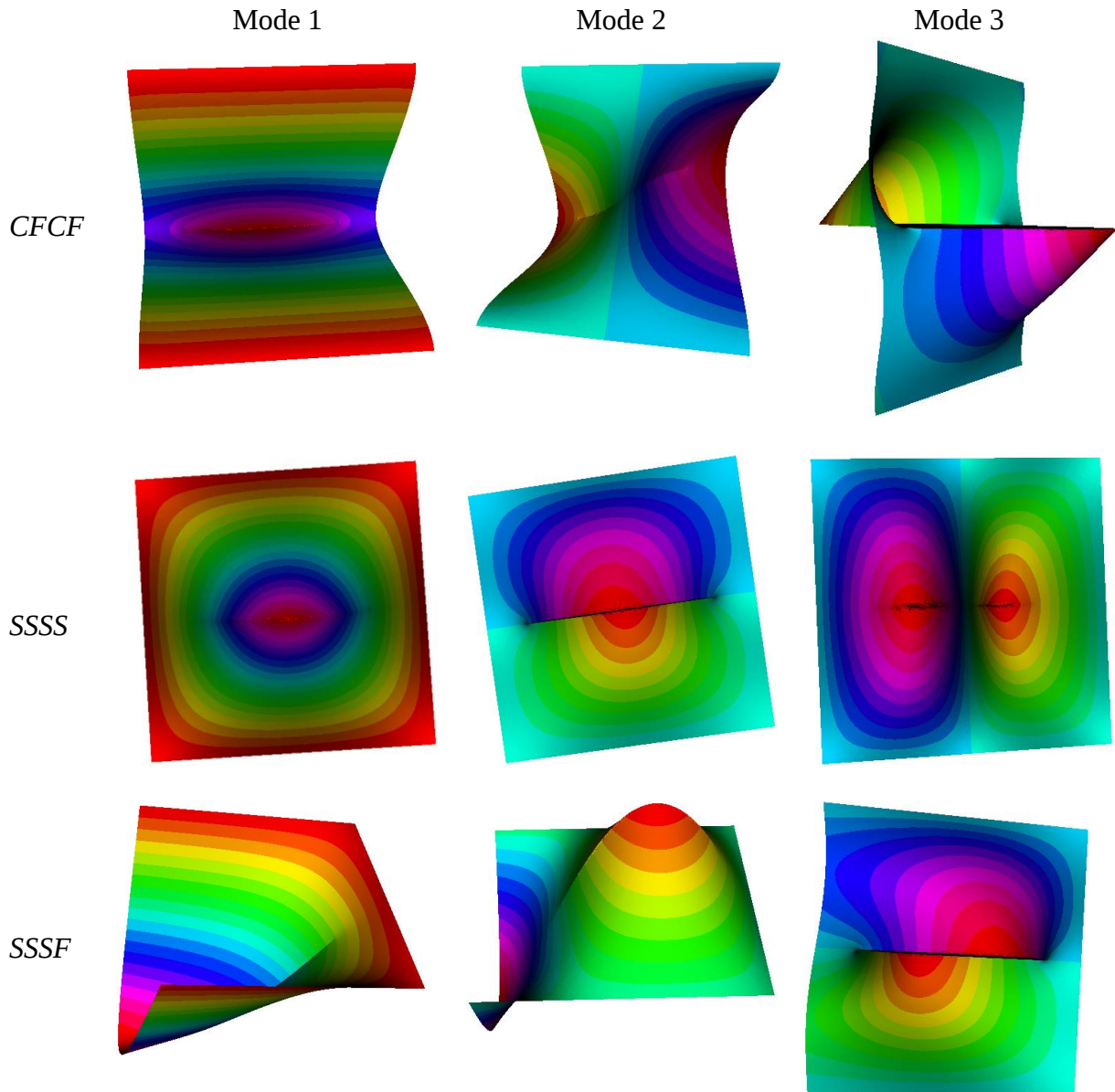
Bảng 5 đã tính toán tham số tần số dao động của tấm phụ thuộc vào điều kiện biên ở các cạnh tấm, với ký hiệu được quy ước, chẳng hạn *CSCF* nghĩa là cạnh 1 và 3 ngàm (*C*), cạnh 2 tựa (*S*), cạnh 4 tự do (*F*). Ta thấy rằng, tham số tần số giảm khi vết nứt dài ra với mọi điều kiện biên, nhưng mức giảm phụ thuộc mạnh vào độ “cứng biên”. Trật tự giá trị luôn theo $CCCC > CSCS > CFCF > SSSS > SSSF > SFSF$, phản ánh biên ngàm nhiều thì cứng hơn, tần số cao hơn. Độ nhạy với nứt lớn nhất ở các biên có cạnh tự do: ví dụ *SFSF* giảm từ 2,82189 ($L_c/L_x=0$) xuống 1,75641 ($L_c/L_x=0,8$), tương đương $-37,8\%$. Ngược lại, tấm *CCCC* chỉ giảm $\approx 9,8\%$ ($9,63767 \rightarrow 8,69749$). Kết quả cho thấy điều kiện biên vừa quyết định mức tần số nền, vừa điều tiết mức suy giảm do nứt: biên càng “mềm” (có cạnh tự do) thì tần số càng thấp và càng nhạy với chiều dài vết nứt.

Hình 4 minh họa ba dạng dao động đầu tiên của tấm BTXM có vết nứt $L_c=0,7L_x$; $\alpha=0^\circ$ dưới ba điều kiện biên: *CFCF*, *SSSS*, *SSSF*. Có thể thấy rằng, điều kiện biên quyết định hình dạng mode và mức độ biến dạng.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã xây dựng một mô hình tính toán hợp nhất cho tấm bê tông xi măng (BTXM) có vết nứt dựa trên FSDT (mô tả biến dạng cắt của tấm chiều dày trung bình), mô hình phase-field (biểu diễn trường nứt liên tục không cần theo dõi biên nứt) và PTHH (giải bài toán uốn tĩnh và dao động tự do). Cách tiếp cận này cho phép đánh giá đồng thời trạng thái ứng suất, độ võng và đặc trưng dao động trong cùng một hệ phương trình nhất quán về năng lượng và trường biến, phù hợp để phân tích các kết cấu tấm BTXM dùng trong thực tế.

Kết quả kiểm chứng cho thấy mô hình tái hiện tốt độ võng và phân bố ứng suất của tấm cũng như xu thế suy giảm tần số khi xuất hiện nứt. Khảo sát tham số khẳng định ba kết luận chính: (i) chiều dài vết nứt là yếu tố chi phối: độ võng tăng và tần số giảm đơn điệu khi vết nứt dài ra; (ii) điều kiện biên quyết định mức đáp ứng nền và độ nhạy, các trường hợp có cạnh tự do cho biến dạng lớn và tần số thấp hơn rõ rệt; (iii) góc nghiêng vết nứt chỉ tạo hiệu ứng thứ yếu trong miền tham số xét, nhưng có thể làm tăng mức suy giảm tần số khi vết nứt đã dài. Tại vùng lân cận đầu nứt, độ cứng hiệu dụng suy giảm được mô hình hóa tự nhiên nhờ biến trường hư hỏng của phase-field. Các kết quả hiện tại đã cho thấy tính khả dụng và độ tin cậy của sự kết hợp Phase-field–FSDT–PTHH như một nền tảng vững chắc cho nghiên cứu và ứng dụng kỹ thuật.



Hình 4. Ba dạng dao động đầu tiên của tấm BTXM nứt ($L_c=0,7L_x$; $\alpha = 0^0$)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. M.K. Singha, T. Prakash, M. Ganapathi, Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load, Finite Elements in Analysis and Design, (2011). <https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.12.001>
- [2]. A.M. Zenkour, Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates, Applied Mathematical Modelling, (2006). <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.009>
- [3]. T.Í. Thịnh, T.M. Tú, B.V. Bình, Tính toán uốn và dao động tấm composite gấp nếp bằng phương pháp phần tử hữu hạn, Tạp chí Khoa học và Công nghệ, (2011).
- [4]. N.T.B. Phụng, T.M. Tú, P.T.T. Hiền, Tính toán tấm chịu uốn làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên, Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, (2012).
- [5]. N.V. Long, T.M. Tú, L.T. Hải, V.T.T. Trang, Phân tích phi tuyến ứng xử uốn của tấm bằng vật liệu FGM xếp đặt trên nền đàn hồi Pasternak với các điều kiện biên khác nhau có xét đến vị trí thực của mặt trung hòa, Journal of Science and Technology in Civil Engineering (NUCE), (2020). [https://doi.org/10.31814/stce.nuce2020-14\(4V\)-01](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2020-14(4V)-01)

- [6]. T.N. Hung, P.D. Tiep, Investigation of thermal stress in concrete pavement based on the finite element method, *Journal of Science and Transport Technology*, (2022).
- [7]. T.V. Hùng, V.D. Hải, H.A. Tài, C.Q. Mô, L.T. Thành, N.V. Lượng, N.Đ. Đức, Phân tích trạng thái ứng suất biến dạng mặt đường bê tông xi măng có và không kể đến ứng xử của lớp phân cách bằng phương pháp phần tử hữu hạn, *Journal of Science in Transport and Technology*, (2025).
- [8]. S. Natarajan, P.M. Baiz, S. Bordas, T. Rabczuk, P. Kerfriden, Natural frequencies of cracked functionally graded material plates by the extended finite element method, *Composite Structures*, (2011). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.04.007>
- [9]. P.M. Phuc, Analysis free vibration of the functionally grade material cracked plates with varying thickness using the phase-field theory, *Transport and Communications Science Journal*, (2019). <https://doi.org/10.25073/tcsj.70.2.35>
- [10]. P.M. Phuc, Using phase field and third-order shear deformation theory to study the effect of cracks on free vibration of rectangular plates with varying thickness, *Transport and Communications Science Journal*, (2020). <https://doi.org/10.47869/tcsj.71.7.10>
- [11]. H.D. Doan, V.T. Do, P.M. Pham, Buckling analysis of variable thickness cracked nanoplates considering the flexoelectric effect, *Transport and Communications Science Journal*, 73 (2022) 470–485. <https://doi.org/10.47869/tcsj.73.5.3>
- [12]. S.K. Singh, I.V. Singh, B.K. Mishra, G. Bhardwaj, Analysis of cracked functionally graded material plates using XIGA based on generalized higher-order shear deformation theory, *Composite Structures*, (2019). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111038>
- [13]. X. Zhu, S. Zhao, Y. Zhu, H. Dai, S. Natarajan, Y. Yang, Free vibration and damage identification of cracked functionally graded plates, *Composite Structures*, (2020). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112517>
- [14]. M. Chen, J. Wu, C. Yin, D. Zhang, B. Lin, Y. Chen, G. Jin, Three-dimensional vibration analysis of rotating pre-twisted variable thickness blades composed of spanwise graded functional materials, *Composite Structures*, (2023). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.116836>
- [15]. C.S. Huang, P.J. Yang, M.J. Chang, Three-dimensional vibration analyses of functionally graded material rectangular plates with through internal cracks, *Compos. Struct.*, (2012). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.04.003>