



A CLOSED-FORM SOLUTION TO PREDICT THE BUCKLING LOAD OF STEEL BARS STRENGTHENED WITH LAMINATES

Doan Tan Thi¹, Cao Thi Mai Huong², Phe Van Pham^{2*}, Nguyen Xuan Huy²,
Nguyen Duc Binh²

¹Faculty of Civil Engineering, Campus in Ho Chi Minh City, University of Transport and Communications, No. 450- 451 Le Van Viet Street, Ho Chi Minh City, Vietnam

²University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 29/08/2025

Revised: 29/10/2025

Accepted: 10/12/2025

Published online: 15/12/2025

<https://doi.org/10.47869/tcsj.76.9.8>

* *Corresponding author*

Email: phe.phamvan@utc.edu.vn

Abstract. The investigation of elastic buckling in steel trusses strengthened with FRP sheets is of great importance for enhancing structural performance and durability, especially in the context of increasing demand for lightweight and efficient materials. This study proposes a simple closed-form solution, derived from the variational principle of structural strain energy, to evaluate the critical load and buckling mode of FRP-strengthened steel truss members. The proposed formula was verified against numerical solutions obtained from structural analysis software, demonstrating good agreement and confirming the accuracy and applicability of the analytical model. A parametric study further revealed that (i) FRP sheets with fibers oriented at 0° provided the highest buckling resistance, whereas sheets with angles equal to or greater than $\pm 45^\circ$ had negligible influence, (ii) the buckling load increased linearly with the thickness of the FRP sheets, and (iii) FRP strengthening proved to be highly effective in improving the stability of steel trusses. These findings highlight the feasibility of the proposed approach and provide a useful scientific basis for the practical design and strengthening of steel truss structures with FRP materials.

Keywords: stability, steel truss member, FRP laminate strengthening.

@ 2025 University of Transport and Communications



CÔNG THỨC NGHIỆM KÍN TÍNH TOÁN TẢI TRỌNG MẮT ỔN ĐỊNH CỦA THANH DÀN THÉP GIA CƯỜNG TẮM DÁN NGOÀI

Đoàn Tấn Thi¹, Cao Thị Mai Hương², Phạm Văn Phê^{2*}, Nguyễn Xuân Huy²,
Nguyễn Đức Bình²

¹Phân hiệu tại Thành phố Hồ Chí Minh, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 450-451 Lê Văn Việt, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

²Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 29/08/2025

Ngày nhận bài sửa: 29/10/2025

Ngày chấp nhận đăng: 10/12/2025

Ngày xuất bản Online: 15/12/2025

<https://doi.org/10.47869/tcsj.76.9.8>

* Tác giả liên hệ

Email: phe.phamvan@utc.edu.vn

Tóm tắt. Việc nghiên cứu mắt ổn định dàn hồi của kết cấu dàn thép gia cường tấm FRP có ý nghĩa quan trọng trong việc nâng cao khả năng chịu lực và độ bền công trình, đặc biệt khi nhu cầu sử dụng các vật liệu nhẹ, bền và hiệu quả ngày càng gia tăng. Nghiên cứu này xây dựng một công thức nghiệm kín đơn giản, dựa trên lý thuyết biến phân của thể năng biến dạng kết cấu, nhằm tính toán tải trọng tới hạn và dạng mắt ổn định của thanh dàn thép có gia cường FRP. Kết quả tính toán từ công thức được kiểm chứng và cho thấy sự phù hợp với lời giải số bằng phần mềm phân tích kết cấu, chứng minh tính chính xác và khả năng ứng dụng của mô hình. Thông qua phân tích tham số, nghiên cứu chỉ ra rằng (i) tấm FRP với hướng sợi 0° tạo ra tải trọng mắt ổn định lớn nhất, trong khi các tấm có góc bằng hoặc lớn hơn $\pm 45^\circ$ gần như không ảnh hưởng đến tải trọng, (ii) tải trọng mắt ổn định tăng tuyến tính theo chiều dày tấm dán, và (iii) việc sử dụng FRP mang lại hiệu quả rõ rệt trong gia cường dàn thép. Những kết quả này khẳng định tính khả thi của công thức đề xuất, đồng thời cung cấp cơ sở khoa học hữu ích cho thiết kế và gia cường kết cấu thép bằng vật liệu FRP trong thực tiễn.

Từ khóa: ổn định, thanh dàn thép, gia cường tấm dán FRP.

@ 2025 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hiện nay trên thế giới nói chung và ở Việt Nam nói riêng, các kết cấu dàn thép đã và đang

được sử dụng trong nhiều lĩnh vực của cuộc sống vì nhiều ưu điểm nổi bật của chúng. Chúng có ưu điểm là có thể chế tạo sẵn, thi công nhanh và gọn nhẹ, khả năng vượt nhịp/tính không tương đối lớn, giá thành phải chăng so với các dạng kết cấu bằng vật liệu khác. Mặc dù vậy, các cấu kiện thép khai thác trong một khoảng thời gian trung bình và dài có thể bị ăn mòn làm giảm tiết diện và ảnh hưởng tới khả năng làm việc của chúng. Vấn đề này có thể gây ảnh hưởng và làm giảm một phần nào đó khả năng chịu tải trọng của kết cấu. Trong các kết cấu thép có cấu kiện bị khiếm khuyết như trên, nếu điều kiện cho phép thì có thể sửa hoặc thay thế cấu kiện bị hư hại bằng cấu kiện mới. Tuy nhiên, có nhiều kết cấu có cấu kiện bị khiếm khuyết nhưng vẫn phải làm việc để phục vụ nhu cầu vận hành khai thác. Lúc này, cần có một giải pháp sửa chữa gia cường khả năng chịu lực cho dạng kết cấu này. Gần đây, việc gia cường kết cấu thép bằng các tấm dán FRP đang được nghiên cứu áp dụng như là một giải pháp tiềm năng.

Tấm polyme gia cường sợi thủy tinh (FRP) thường được xếp chồng từ các lớp FRP trực hướng để tạo thành các tấm tương đối dày có khả năng chịu ứng suất kéo, nén, cắt [1-3]. Dựa trên tỷ lệ độ bền trên trọng lượng cao và khả năng chống ăn mòn tốt, tấm FRP ngày càng được sử dụng làm vật liệu cải tạo cho dầm/cột thép [3-6]. Tấm FRP có thể được liên kết với thép bằng cách sử dụng các lớp keo mỏng có mô đun đàn hồi thường thấp (so với thép và vật liệu FRP), do đó tạo ra sự tương tác một phần giữa thành phần thép và tấm FRP. Bên cạnh đó, biến dạng cắt và trình tự xếp chồng tấm FRP cũng có tác động đáng kể đến hành vi xoắn của các kết cấu composite [7, 8]. Các tác động như vậy trong các thành phần thép được gia cường bằng FRP có thể được nắm bắt một cách đáng tin cậy bằng cách sử dụng phân tích phần tử hữu hạn ba chiều (3D FEA). Tuy nhiên, các giải pháp FEA thường liên quan đến nỗ lực đáng kể để xây dựng các mô hình và chúng liên quan đến nỗ lực tính toán cao. Do đó, một thiết kế hiệu quả cho các thành phần thép gia cường FRP đòi hỏi phải phát triển các giải pháp dạng khép kín vừa đơn giản vừa đủ chính xác (so với các giải pháp FEA 3D).

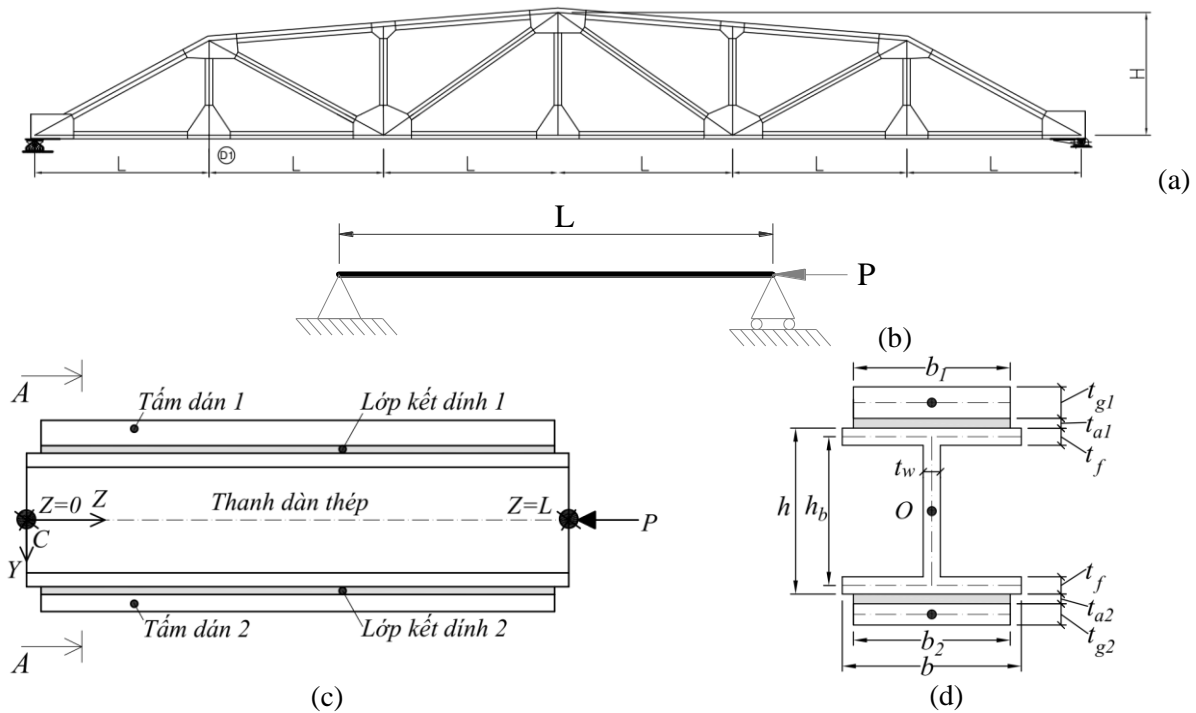
Để dự đoán khả năng mất ổn định của cấu kiện dầm/cột nhiều lớp, một số lời giải giải tích đã được phát triển dựa trên các phương pháp xử lý động học khác nhau [9-14]. Girhammar và Pan [10] đã phát triển một giải pháp uốn xoắn cho các cấu kiện hai lớp. Tuy nhiên, ảnh hưởng của biến dạng cắt và tương tác bán phần giữa các lớp đã bị bỏ qua trong nghiên cứu của họ. Challamel và Girhammar [11] đã đề xuất một lời giải cho uốn xoắn ngang của dầm composite nhiều lớp, nhưng lại bỏ qua biến dạng cắt. Schnabl và Planinc [12] đã phát triển một lý thuyết biến dạng không cắt cho phép phân tích uốn không đàn hồi của các cột composite hai lớp. Kabir và Seif [13] đã phát triển một lời giải phân tích mất ổn định uốn ngang của dầm thép chữ I gia cường tấm FRP mà không xét đến ảnh hưởng biến dạng cắt. Shojaee và cộng sự [14] đã phát triển một phương pháp phần tử hữu hạn đẳng hình học để phân tích độ võng của các tấm composite nhiều lớp. Nhìn chung, các lời giải của các nghiên cứu trên có thể không áp dụng được cho các thanh dầm thép được gia cường bằng các lớp FRP trực hướng bằng cách sử dụng các lớp keo mỏng, trong đó tương tác giữa thép và lớp không đạt được hoàn toàn (tức là tương tác một phần). Ngoài ra, việc bỏ qua biến dạng cắt trong tấm FRP trong bài toán uốn xoắn đã dẫn đến việc dự đoán thấp đáng kể đối với các phản ứng của hệ thống, như đã được chỉ ra trong các tài liệu [9, 15]. Gần đây, Phe [15] đã phát triển một lời giải tổng quát để dự đoán tải trọng mất ổn định cho cấu kiện dầm-cột gia cường tấm dán FRP, tuy nhiên lời giải cho kết cấu thanh dầm chưa được thực hiện.

Dựa trên bối cảnh này, nghiên cứu hiện tại sẽ điều chỉnh một lý thuyết tổng quát và xây dựng một công thức nghiệm kín mới, đơn giản để dự đoán tải trọng mất ổn định của thanh dầm thép được gia cường bằng các tấm dán FRP. Công thức này có xem xét tính chất trực hướng

của tấm FRP với hướng sợi, độ cứng các lớp và chiều dày tấm khác nhau. Ảnh hưởng của biến dạng cắt và biến dạng oằn (warping) cũng được xem xét trong nghiên cứu này.

2. MÔ TẢ BÀI TOÁN

Xét một kết cấu dàn minh họa như trình bày trong hình 1a. Nghiên cứu hiện tại xem xét các thanh dàn làm việc theo sơ đồ hai đầu khớp và chịu lực nén P (hình 1b). Thanh dàn này được gia cường bằng hai tấm dán giống nhau vào hai bản cánh của thanh dàn (hình 1c, d). Các kích thước mặt cắt ngang của thanh dàn thép, các tấm dán, lớp kết dính được thể hiện trong hình 1d. Vật liệu thanh dàn là thép, trong khi đó các tấm dán có thể là thép hoặc vật liệu FRP. Lớp kết dính có thể tạo ra tương tác hoàn toàn hoặc bán phần giữa thanh dàn và tấm dán. Nghiên cứu hiện tại sẽ xây dựng lời giải nghiệm kín tổng quát để dự đoán tải trọng mất ổn định cho thanh dàn thép gia cường bằng các tấm dán này. Kết quả lời giải nghiệm kín sẽ được so sánh kiểm chứng với kết quả mô phỏng số trong phần mềm tính toán thương mại ABAQUS.

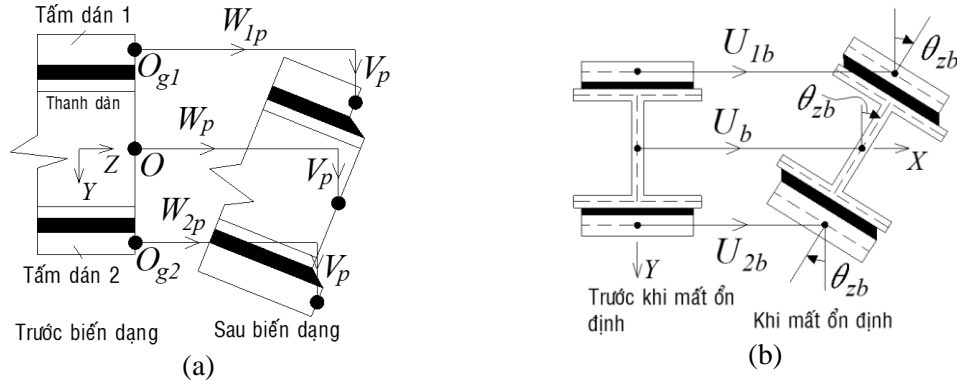


Hình 1. Mô tả bài toán và các kích thước.

3. TÓM TẮT LÝ THUYẾT TÍNH TOÁN TẢI TRỌNG MẤT ỔN ĐỊNH

Nghiên cứu của Phê [15] đã phát triển một lý thuyết tổng quát và các bài toán trị riêng để dự đoán tải trọng mất ổn định của cấu kiện dầm-cột thép gia cường hai tấm dán ngoài. Sơ đồ biến dạng của mặt cắt ngang trước khi và ngay khi mất ổn định được thể hiện trong hình 2. Tương tác bán phần giữa các tấm dán và thanh dàn qua lớp chất kết dính yếu được xem xét trong mô hình này. Khi kết cấu bị uốn phẳng (hình 2a, trước khi mất ổn định xảy ra), biến dạng trên mặt cắt ngang của cấu kiện gồm 4 thành phần chính, là chuyển vị dọc trục W_p của thanh dàn, chuyển vị dọc trục W_{1p} của tấm dán 1, chuyển vị dọc trục W_{2p} của tấm dán 2, và chuyển vị thẳng đứng V_p của cả 3 vật liệu. Khi mất ổn định xảy ra (hình 2b), biến dạng trên mặt cắt ngang của cấu kiện được mô tả bởi 4 chuyển vị chính, gồm chuyển vị nằm ngang U_b của thanh dàn thép, chuyển vị nằm ngang U_{1b} của tấm dán 1, chuyển vị nằm ngang U_{2b} của tấm dán 2 và chuyển vị góc xoay Θ_{zb} của cả ba vật liệu.

Với giả thiết biến dạng như vậy, các trường chuyển vị địa phương và các biến dạng tại các điểm trong vật liệu được diễn giải theo các trường chuyển vị chính nêu trên, ứng suất được giả thiết liên hệ với biến dạng thông qua định luật Hook trong giới hạn đàn hồi [15].



Hình 2. Biến dạng của thanh dãn thép gia cường (a) khi uốn phẳng (b) khi mất ổn định xảy ra.

Thế năng toàn phần π của hệ được thiết lập dựa trên đóng góp của các biến dạng pháp tuyến dọc trục, biến dạng cắt phẳng, xoắn St Venant và xoắn oằn. Mất ổn định xảy ra khi biến phân bậc hai của thế năng biến dạng bằng 0, và được diễn giải như sau:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \delta^2 \pi \right) = \delta \left[\frac{1}{2} (\delta^2 U + \delta^2 V) \right] = 0 \quad (1)$$

Trong đó U là thế năng biến dạng tổng cộng của hệ khi mất ổn định xảy ra, và V là thế năng của tải trọng ngoài. Biến phân bậc hai của các năng lượng này được diễn giải trong các phương trình (2, 3) như sau:

$$\begin{aligned} \delta^2 U = & \int_0^L \langle \delta U_b''(z) \quad \delta \theta_{zb}''(z) \rangle \begin{bmatrix} E_s I_{s,yy} & 0 \\ 0 & E_s I_{s,oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_b''(z) \\ \delta \theta_{zb}''(z) \end{Bmatrix} dz + \int_0^L N_p(z) \left[(\delta U_b')^2 + \frac{I_{s,xx} + I_{s,yy}}{A_s} (\delta \theta_{zb}')^2 \right] dz \\ & + \int_0^L \delta \theta_{zb}'(z) (G_s J_s) \delta \theta_{zb}'(z) dz + \int_0^L \delta \theta_{y1b}'(z) (\bar{B}_{g1,11} b_1^3 / 12) \delta \theta_{y1b}'(z) dz \\ & + \int_0^L \langle \delta U_{1b}'(z) \quad \delta \theta_{y1b}(z) \rangle \bar{B}_{g1,66} b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_{1b}'(z) \\ \delta \theta_{y1b}(z) \end{Bmatrix} dz \\ & + \int_0^L \langle \delta U_b'(z) \quad \delta \theta_{zb}'(z) \quad \delta \theta_{y1b}(z) \rangle k_{a1,yy} \begin{bmatrix} 4 & 2h_{a1,o} & -4 \\ 2h_{a1,o} & h_{a1,o}^2 & -2h_{a1,o} \\ -4 & -2h_{a1,o} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_b'(z) \\ \delta \theta_{zb}'(z) \\ \delta \theta_{y1b}(z) \end{Bmatrix} dz \\ & + \int_0^L \langle \delta U_b(z) \quad \delta \theta_{zb}(z) \quad \delta U_{1b}(z) \rangle k_{a1,a} \begin{bmatrix} 4 & 2d_{a1,o} & -4 \\ 2d_{a1,o} & d_{a1,o}^2 & -2d_{a1,o} \\ -4 & -2d_{a1,o} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_b(z) \\ \delta \theta_{zb}(z) \\ \delta U_{1b}(z) \end{Bmatrix} dz \\ & + \int_0^L \delta \theta_{zb}'(z) (G_{a1} J_{a1}) \delta \theta_{zb}'(z) dz + \int_0^L \delta \theta_{y2b}'(z) (\bar{B}_{g2,11} b_2^3 / 12) \delta \theta_{y2b}'(z) dz \\ & + \int_0^L \langle \delta U_{2b}'(z) \quad \delta \theta_{y2b}(z) \rangle \bar{B}_{g2,66} b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_{2b}'(z) \\ \delta \theta_{y2b}(z) \end{Bmatrix} dz \\ & + \int_0^L \langle \delta U_b'(z) \quad \delta \theta_{zb}'(z) \quad \delta \theta_{y2b}(z) \rangle k_{a2,yy} \begin{bmatrix} 4 & -2h_{a2,o} & -4 \\ -2h_{a2,o} & h_{a2,o}^2 & 2h_{a2,o} \\ -4 & 2h_{a2,o} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_b'(z) \\ \delta \theta_{zb}'(z) \\ \delta \theta_{y2b}(z) \end{Bmatrix} dz \\ & + \int_0^L \langle \delta U_b(z) \quad \delta \theta_{zb}(z) \quad \delta U_{2b}(z) \rangle k_{a2,a} \begin{bmatrix} 4 & -2d_{a2,o} & -4 \\ -2d_{a2,o} & d_{a2,o}^2 & 2d_{a2,o} \\ -4 & 2d_{a2,o} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_b(z) \\ \delta \theta_{zb}(z) \\ \delta U_{2b}(z) \end{Bmatrix} dz \\ & + \int_0^L \delta \theta_{zb}'(z) (G_{a2} J_{a2}) \delta \theta_{zb}'(z) dz \end{aligned} \quad (2)$$

Biến phân bậc hai của tải trọng do lực dọc trục P gây ra là

$$\delta^2 V = -P \cdot y_P \cdot \left[\delta \theta_{zb} (z_P) \right]^2 \quad (3)$$

Các đặc trưng hình học mặt cắt ngang trong phương trình (2) được tính toán như sau:

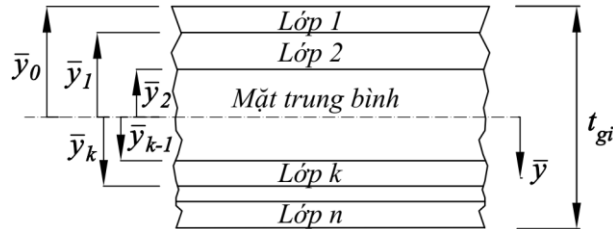
$$\begin{aligned} I_{s,yy} &= (h - 2t_f) t_w^3 / 12 + 2t_f b^3 / 12, & a_{a1,o} &= 1/4 t_{a1}^2, & a_{a2,o} &= 1/4 t_{a2}^2, \\ I_{s,xx} &= 2 \left[b t_f^3 / 12 + b t_f (h_b / 2)^2 \right] + t_w (h - 2t_f)^3 / 12, & k_{a1,yy} &= G_{a1} I_{a1,yy} a_{a1,o}, & k_{a2,yy} &= G_{a2} I_{a2,yy} a_{a2,o}, \\ I_{s,\omega\omega} &= h_b^2 b^3 t_f / 24 + 2b^3 t_f^3 / 144 + (h - 2t_f)^3 t_w^3 / 144, & k_{a1,a} &= G_{a1} A_{a1} a_{a1,o}, & k_{a2,a} &= G_{a2} A_{a2} a_{a2,o}, \\ J_s &= 2b t_f^3 / 3 + (h - 2t_f) t_w^3 / 3, & A_{a1} &= t_{a1} b_1, & A_{a2} &= t_{a2} b_2, \\ A_s &= 2b t_f + (h - 2t_f) t_w, & I_{a1,yy} &= t_{a1} b_1^3 / 12, & I_{a2,yy} &= t_{a2} b_2^3 / 12, \\ J_{a1} &= \left[(t_f - t_{g1}) / 2 \right]^2 A_{a1} + \left[(t_f + t_{g1}) / 2 t_{a1} \right]^2 b_1 t_{a1}^3 / 3, & d_{a1,o} &= h + 2t_{a1} + t_{g1}, & d_{a2,o} &= h + 2t_{a2} + t_{g2}, \\ J_{a2} &= \left[t_{g2} / 2 \right]^2 A_{a2} + \left[t_{g2} / t_{a2} \right]^2 b_2 t_{a2}^3 / 3, & h_{a1,o} &= h_b - t_f - t_{g1} - 2t_{a1}, & h_{a2,o} &= h - t_{g2} - 2t_{a2} \end{aligned} \quad (4)$$

Các đặc trưng vật liệu trong phương trình (2) bao gồm: E_s và G_s là các mô đun đàn hồi và mô đun cắt của vật liệu thanh dàn thép. G_{ai} , $\bar{B}_{gi,11}$, $\bar{B}_{gi,66}$ ($i=1,2$) là đặc trưng vật liệu của tấm dán FRP. Đặc trưng này phụ thuộc vào độ cứng của các lớp (lamina), số lượng lớp, và góc hướng dán (stacking angle orientation angles). Độ cứng rút gọn của lớp thứ k có thể tính như sau [7,8]:

$$Q_{k,11} = E_{k,z} / (1 - \nu_{zs} \nu_{sz}), \quad Q_{k,12} = \nu_{zs} E_{k,s} / (1 - \nu_{zs} \nu_{sz}), \quad Q_{k,22} = E_{k,s} / (1 - \nu_{zs} \nu_{sz}), \quad Q_{k,66} = G_{k,sz} \quad (5)$$

Ở đây, $E_{k,z}$, $E_{k,s}$, $G_{k,sz}$, và $\nu_{k,zs}$, $\nu_{k,sz}$ là mô đun đàn hồi, mô đun cắt và hệ số Poisson của lớp k [7,8, 15]. Các độ cứng quy đổi theo góc hướng sợi γ_k của lớp k (hình 3) được tính như sau:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{k,11} &= Q_{k,11} \cos^4 \gamma_k + 2(Q_{k,12} + 2Q_{k,66}) \sin^2 \gamma_k \cos^2 \gamma_k + Q_{k,22} \sin^4 \gamma_k, \\ \bar{Q}_{k,12} &= (Q_{k,11} + Q_{k,22} - 4Q_{k,66}) \sin^2 \gamma_k \cos^2 \gamma_k + Q_{k,12} (\sin^4 \gamma_k + \cos^4 \gamma_k), \\ \bar{Q}_{k,22} &= Q_{k,11} \sin^4 \gamma_k + 2(Q_{k,12} + 2Q_{k,66}) \sin^2 \gamma_k \cos^2 \gamma_k + Q_{k,22} \cos^4 \gamma_k, \\ \bar{Q}_{k,16} &= (Q_{k,11} - Q_{k,12} - 2Q_{k,66}) \sin \gamma_k \cos^3 \gamma_k + (Q_{k,12} - Q_{k,22} + 2Q_{k,66}) \sin^3 \gamma_k \cos \gamma_k, \\ \bar{Q}_{k,26} &= (Q_{k,11} - Q_{k,12} - 2Q_{k,66}) \sin^3 \gamma_k \cos \gamma_k + (Q_{k,12} - Q_{k,22} + 2Q_{k,66}) \sin \gamma_k \cos^3 \gamma_k, \\ \bar{Q}_{k,66} &= (Q_{k,11} + Q_{k,22} - 2Q_{k,12} - 2Q_{k,66}) \sin^2 \gamma_k \cos^2 \gamma_k + Q_{k,66} (\sin^4 \gamma_k + \cos^4 \gamma_k) \end{aligned} \quad (6)$$



Hình 3. Tọa độ và xếp xếp các lớp (lamina) của một tấm dán [7, 8, 15].

Các độ cứng hiệu dụng của tấm dán được tính theo lý thuyết vật liệu composite như sau:

$$B_{gi,ej} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{k,ej} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k) \quad (7)$$

ở đây $e, j=1,2,\dots,6$. Dựa trên phương trình (7), các độ cứng của tấm $\bar{B}_{gi,11}$, $\bar{B}_{gi,66}$ trong phương trình (2) tính được như sau:

$$\bar{B}_{gi,11} = B_{gi,11} - B_{gi,12}^2 / B_{gi,22}, \quad \bar{B}_{gi,66} = B_{gi,66} - B_{gi,26}^2 / B_{gi,22} \quad (8)$$

Đối với các tấm dán có lớp vật liệu đẳng hướng (nghĩa là $E_{k,z} = E_{k,s} = E_{gi}, G_{k,sz} = G_{gi}$), các độ cứng của tấm dán được đơn giản hóa như sau:

$$\bar{B}_{gi,11} b_{gi}^3 / 12 = E_{gi} I_{yy,gi}, \quad \bar{B}_{gi,66} b_{gi} = G_{gi} B_{gi} \quad (9)$$

Ở đây $I_{yy,gi}, B_{gi}, J_{gi}, I_{\omega\omega,gi}$ là mô men quán tính quanh trục Y, diện tích mặt cắt ngang, hằng số xoắn St. Venant và hằng số xoắn oằn warping của mặt cắt ngang tấm dán.

Trong Công thức (2), ký hiệu $N_p(z)$ là nội lực dọc trục trong kết cấu trước khi mất ổn định xảy ra.

4. PHÁT TRIỂN CÔNG THỨC NGHIỆM KÍN TÍNH TOÁN TẢI TRỌNG MẤT ỔN ĐỊNH THANH DÀN HAI ĐẦU KHỚP

Trong nghiên cứu này, ta xem xét cho trường hợp thanh dàn hai đầu khớp chịu tác dụng của tải trọng đúng tâm dọc trục. Các chuyển vị chính thỏa mãn điều kiện biên hai đầu khớp được giả thiết như sau:

$$\begin{aligned} \delta U_b(z) &= \delta u_o \sin(\alpha z), & \delta \theta_{zb}(z) &= 0, & \delta U_{1b}(z) &= \delta u_{1o} \sin(\alpha z), \\ \delta \theta_{y1b}(z) &= \delta \theta_{y1o} \cos(\alpha z), & \delta U_{2b}(z) &= \delta u_{2o} \sin(\alpha z), & \delta \theta_{y2b}(z) &= \delta \theta_{y2o} \cos(\alpha z) \end{aligned} \quad (10)$$

Nội lực trong kết cấu khi uốn phẳng (trước khi mất ổn định) là $N_p(z) = P$. Thay tải trọng này và các hàm chuyển vị giả thiết trong phương trình (10) vào các phương trình (2), (3), và (1), ta lấy biến phân bậc hai theo véc-tơ chuyển vị $\langle \delta u_o \quad \delta \theta_{zo} \quad \delta u_{1o} \quad \delta \theta_{y1o} \quad \delta u_{2o} \quad \delta \theta_{y2o} \rangle$ sẽ thu được công thức trị riêng sau:

$$\left[[K_e]_{6 \times 6} - [K_g]_{6 \times 6} \right] \{ \Delta \}_{6 \times 1} = 0 \quad (11)$$

Trong đó ma trận độ cứng $[K_e]$ được định nghĩa như sau :

$$[K_e]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} k_{(1,1)} & k_{(1,2)} & -4k_{a1,a} & -4\alpha k_{a1,yy} & -4k_{a2,a} & -4\alpha k_{a2,yy} \\ 0 & k_{(2,2)} & -2\chi_{a1,a} d_{a1,o} & -2\alpha k_{a1,yy} h_{a1,o} & +2k_{a2,a} d_{a2,o} & +2\alpha k_{a2,yy} h_{a2,o} \\ 0 & 0 & k_{(3,3)} & -\alpha \bar{B}_{g1,66} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{(4,4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{(5,5)} & -\alpha \bar{B}_{g2,66} b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{(6,6)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

ở đây

$$k_{(1,1)} = \alpha^4 E_s I_{s,yy} + 4\alpha^2 k_{a1,yy} + 4k_{a1,a} + 4\alpha^2 k_{a2,yy} + 4k_{a2,a},$$

$$k_{(1,2)} = 2\alpha^2 k_{a1,yy} h_{a1,o} + 2k_{a1,a} d_{a1,o} - 2\alpha^2 k_{a2,yy} h_{a2,o} - 2\chi_{a2,a} d_{a2,o},$$

$$k_{(2,2)} = EI_{\omega\omega} \alpha^4 + GJ \alpha^2 + \alpha^2 k_{a1,yy} h_{a1,o}^2 + k_{a1,a} d_{a1,o}^2 + \alpha^2 k_{a2,yy} h_{a2,o}^2 + k_{a2,a} d_{a2,o}^2,$$

$$k_{(3,3)} = \alpha^2 \bar{B}_{g1,66} b_1 + 4k_{a1,a},$$

$$k_{(4,4)} = \alpha^2 \bar{B}_{g1,11} b^3 / 12 + \bar{B}_{g1,66} b_1 + 4k_{a1,yy}, \quad k_{(5,5)} = \alpha^2 \bar{B}_{g2,66} b + 4k_{a2,a},$$

$$k_{(6,6)} = \alpha^2 \bar{B}_{g2,11} b^3 / 12 + \bar{B}_{g2,66} b + 4\chi_{a2,yy}, \quad \text{và } \alpha = \pi / L.$$

Và ma trận hình học $[K_g]$ được định nghĩa như sau:

$$[K_g]_{6 \times 6} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(I_{s,xx} + I_{s,yy})/A_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Thay các phương trình (12) và (13) vào phương trình (12), ta có

$$\begin{bmatrix} k_{(1,1)} - P\alpha^2 & k_{(1,2)} & -4k_{a1,a} & -4\alpha k_{a1,yy} & -4k_{a2,a} & -4\alpha k_{a2,yy} \\ k_{(1,2)} & k_{(2,2)} - P(I_{s,xx} + I_{s,yy})\alpha^2/A_s & -2k_{a1,a}d_{a1,o} & -2\alpha k_{a1,yy}h_{a1,o} & +2k_{a2,a}d_{a2,o} & +2\alpha k_{a2,yy}h_{a2,o} \\ -4k_{a1,a} & -2k_{a1,a}d_{a1,o} & k_{(3,3)} & -\alpha \bar{B}_{g1,66}b_1 & 0 & 0 \\ -4\alpha k_{a1,yy} & -2\alpha k_{a1,yy}h_{a1,o} & -\alpha \bar{B}_{g1,66}b_1 & k_{(4,4)} & 0 & 0 \\ -4k_{a2,a} & +2k_{a2,a}d_{a2,o} & 0 & 0 & k_{(5,5)} & -\alpha \bar{B}_{g2,66}b \\ -4\alpha k_{a2,yy} & +2\alpha k_{a2,yy}h_{a2,o} & 0 & 0 & -\alpha \bar{B}_{g2,66}b & k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_o \\ \delta \theta_{z_o} \\ \delta u_{1_o} \\ \delta \theta_{y1_o} \\ \delta u_{2_o} \\ \delta \theta_{y2_o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Trong phương trình (14), ta chú ý véc-tơ của các chuyển khác khác 0, điều này nghĩa là định thức của ma trận vuông 6x6 phải bằng 0, dẫn tới kết quả lời giải nghiệm kín của tải trọng mất ổn định như sau:

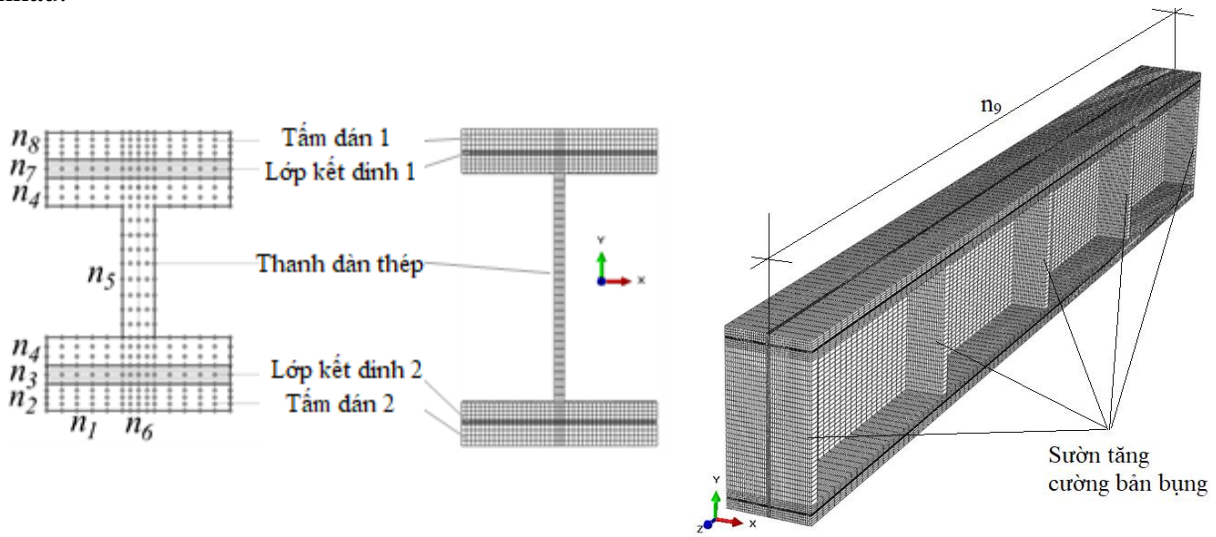
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_s I_{s,yy}}{L^2} + \frac{(\pi^2 \bar{B}_{g1,11} b^3 / 12L^2 + \pi^2 \bar{B}_{g2,11} b_2^3 / 12L^2)(4k_{a1,yy} + 4k_{a2,yy} + \bar{B}_{g1,66} b_1 + \bar{B}_{g2,66} b)}{(\pi^2 \bar{B}_{g1,11} b^3 / 12L^2 + \pi^2 \bar{B}_{g2,11} b_2^3 / 12L^2) + (4k_{a1,yy} + 4k_{a2,yy} + \bar{B}_{g1,66} b_1 + \bar{B}_{g2,66} b)} \quad (15)$$

5. KIỂM CHỨNG LỜI GIẢI

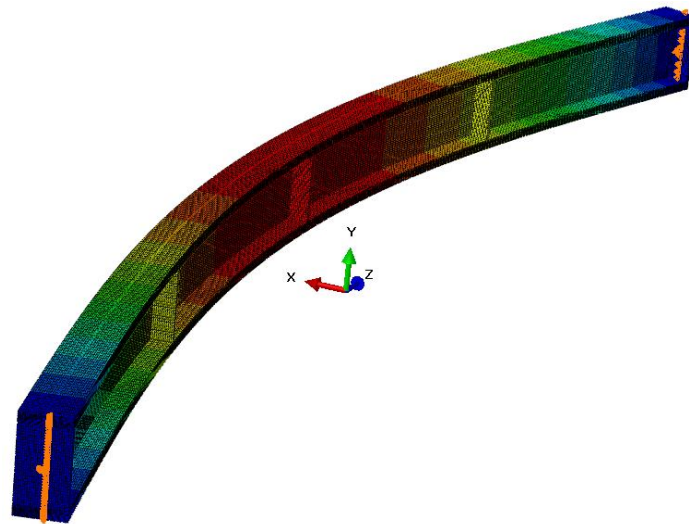
Để kiểm chứng công thức (15), một lời giải khác dựa trên mô phỏng số trong phần mềm ABAQUS được thực hiện. Mô hình thanh dàn gia cường hai tấm dán ngoài được tạo bởi các phần tử khối C3D8R. Để kiểm soát lưới phần tử hữu hạn, 9 thông số độc lập là số phần tử trên các cạnh của khối dàn được đề xuất và ký hiệu là n₁, n₂, n₃, n₄, n₅, n₆, n₇, n₈, n₉ (hình 4). Các điều kiện biên, tải trọng áp dụng, và nghiên cứu lưới của mô hình số được thực hiện một cách tương tự như trình bày trong nghiên cứu [15]. Hình dạng mất ổn định theo mode 1 của thanh dàn được thể hiện trong hình 5.

Thí dụ kiểm chứng sẽ được thực hiện cho một thanh dàn có chiều dài nhịp L = 5,0 m và mặt cắt ngang có các kích thước: h = 266 mm, b = 148 mm, t_f = 13 mm và t_w = 7,6 mm. Thanh dàn được gia cường hai tấm FRP dày 20 mm thông qua các lớp kết dính dày 1 mm. Mô đun đàn hồi và hệ số Poát-xong của thép là E_s = 200 GPa và μ = 0,3. Còn của lớp kết dính là E_{a1} = 3,182 GPa và μ = 0,3. Hai loại tấm FRP được xem xét. Trong đó Loại 1 là tấm FRP đẳng hướng với mô đun đàn hồi và hệ số Poát-xong là E_{k,z} = 36,87 GPa và μ_{k,sz} = 0,33. Loại 2 là tấm FRP trục hướng được tạo bởi 16 lớp GF600 xếp theo trình tự góc là (0/90/90/0/0/90/90/0)_s. So sánh kiểm chứng kết quả: Tải trọng mất ổn định: Đối với trường hợp loại 1 khi thanh dàn thép gia cường bằng 2 tấm FRP đẳng hướng, tải trọng mất ổn định tính được dựa trên phương trình (13) là 712,5 kN, còn tải trọng mất ổn định của lời giải số trong phần mềm ABAQUS là 712,9 kN, tương ứng với một sự khác biệt rất nhỏ là 0,1%. Đối với trường hợp loại 2 khi thanh dàn thép gia cường bằng 2 tấm FRP trục hướng, tải trọng mất ổn định tính được dựa trên Phương trình (13) là 658,0 kN, và của lời giải số là 698,6 kN, tương ứng với sự khác biệt là 5,8%. Như vậy, có thể nói tải trọng dự đoán bởi công thức (15) là phù hợp tốt với lời giải số trong phần mềm ABAQUS.

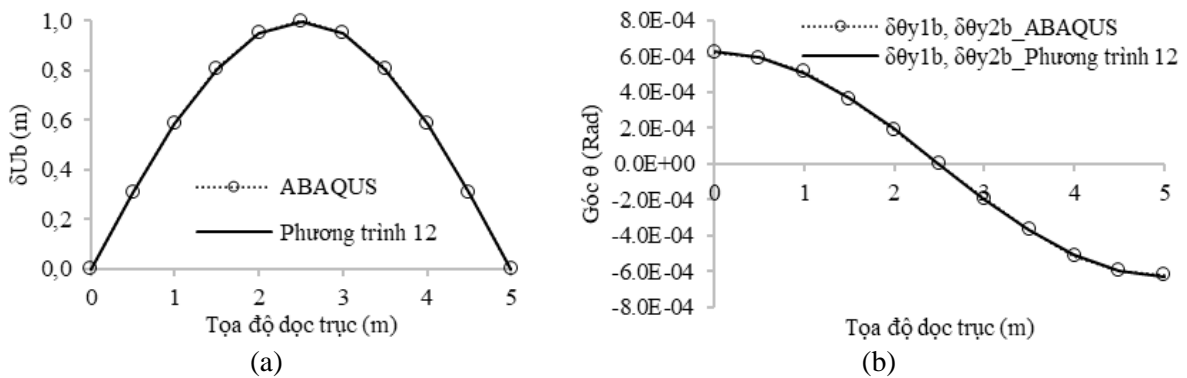
Dạng mắt ổn định: Hình 6 so sánh dạng mắt ổn định giữa lời giải số ABAQUS và lời giải của nghiên cứu hiện tại. Kết quả so sánh cho thấy dạng mắt định của hai lời giải là giống nhau.



Hình 4. Mô hình hóa theo số lượng phần tử dọc theo các cạnh thanh dầm trong ABAQUS.



Hình 5. Hình dạng mắt ổn định xoắn ngang của dầm trong lời giải số ABAQUS.



Hình 6. So sánh dạng mắt ổn định giữa lời giải nghiên cứu hiện tại với lời giải số ABAQUS.

6. NGHIÊN CỨU ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC THÔNG SỐ TỚI TẢI TRỌNG MẤT ỔN ĐỊNH

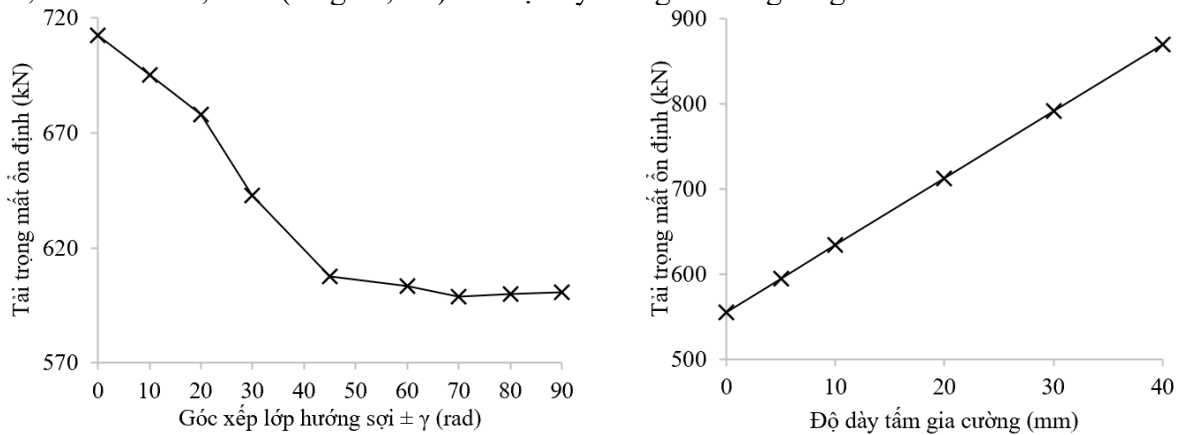
Dựa trên phương trình (15), nghiên cứu thông số thay đổi của vật liệu tấm dán được thực hiện để làm rõ ảnh hưởng của chúng tới tải trọng mất ổn định của kết cấu thanh dầm. Trong phạm vi nghiên cứu, hai ảnh hưởng được xem xét, gồm ảnh hưởng của góc xếp lớp của vật liệu composite của tấm dán và ảnh hưởng của chiều dày tấm dán. Kết cấu thanh dầm gia cường tấm FRP trục hướng trong mục Kiểm chứng được lấy làm trường hợp tham chiếu. Góc xếp lớp của các lớp vật liệu được thay đổi theo thứ tự $\pm i$, trong đó $i = 0, 10, 20, 30, 45, 60, 70, 80$ và 90 độ. Độ dày của tấm được thay đổi từ 0 tới 40 mm tạo bởi các lớp dày 1,25 mm và có góc hướng sợi 0 độ. Khi một thông số thay đổi, các thông số khác được giữ nguyên như của trường hợp tham chiếu.

6.1. Ảnh hưởng của góc xếp các lớp

Hình 7a thể hiện mối quan hệ giữa góc xếp lớp hướng sợi và tải trọng mất ổn định. Có thể quan sát thấy rằng tải trọng mất ổn định đạt giá trị cao nhất là 712,5 kN với các tấm dán có góc hướng sợi 0 độ, giá trị này cũng bằng tải trọng mất ổn định của tấm đẳng hướng. Tải trọng này giảm dần từ 712,5 kN xuống 607,7 kN (tương ứng 14,7%) khi góc hướng sợi thay đổi từ 0 tới ± 45 độ. Khi góc hướng sợi nằm trong khoảng từ ± 45 độ tới ± 90 độ, tải trọng mất ổn định chỉ giảm nhẹ từ 607,7 kN xuống 600,7 kN, giảm nhẹ 1,2%.

6.2. Ảnh hưởng của chiều dày gia cường

Hình 7b thể hiện mối quan hệ giữa chiều dày tấm dán có góc hướng sợi 0 độ và tải trọng mất ổn định. Mối quan hệ này được thấy là tuyến tính, trong đó tải trọng mất ổn định tăng từ 555,3 kN lên 869,7 kN (tăng 56,6%) khi độ dày tấm gia cường tăng từ 0 tới 40 mm.



Hình 7. Ảnh hưởng của (a) góc hướng sợi, (b) độ dày tấm dán tới tải trọng mất ổn định của kết cấu thanh dầm.

7. KẾT LUẬN

Nghiên cứu hiện tại đã xây dựng thành công một công thức nghiệm kín đơn giản, dựa trên lý thuyết biến phân của thể năng biến dạng kết cấu, để tính toán tải trọng mất ổn định đàn hồi của thanh dầm của kết cấu dầm thép. Lời giải tải trọng và dạng mất ổn định của công thức đã được so sánh và phù hợp xuất sắc với các mô phỏng số thực hiện trong phần mềm ABAQUS. Dựa trên công thức nghiệm kín, nghiên cứu ảnh hưởng thông số đã chỉ ra rằng ảnh hưởng của tấm dán có góc hướng sợi 0 độ tạo ra tải trọng mất ổn định lớn nhất, trong khi các tấm có góc không nhỏ hơn ± 45 gần như không thay đổi tải trọng mất ổn định. Bên cạnh đó, nghiên cứu thông số cũng cho thấy tải trọng mất ổn định tăng tuyến tính với chiều dày tấm dán.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2023.54.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. H. Xin, Y. Liu, A.S. Mosallam, J. He, A. Du, Evaluation on material behaviors of pultruded glass fiber reinforced polymer (GFRP) laminates, *Composite Structures*, 182 (2017) 283-300. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.006>
- [2]. A. El Damatty, M. Abushagur, M. A., Youssef, Experimental and analytical investigation of steel beams rehabilitated using GFRP sheets, *Steel & Composite Structures*, 3 (2005) 421-438. <https://doi.org/10.12989/scs.2003.3.6.421>
- [3]. E. Accord, C.J. Earls, Use of fiber-reinforced polymer composite elements to enhance structural steel member ductility, *Journal of composite for construction ASCE*, 10 (2006) 337-344. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(2006\)10:4\(337](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(2006)10:4(337)
- [4]. M. Youssef, Analytical Prediction of the Linear and Nonlinear Behaviour of Steel Beams Rehabilitated using FRP Sheets. *Engineering Structures*, 28 (2006) 903-911. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.10.018>
- [5]. M.A.A. Siddique, A.A. El Damatty, Improvement of local buckling behavior of steel beams through bonding GFRP plates, *Composite Structures*, 96 (2013) 44–56. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.042>
- [6]. K.A. Harries, A.J. Peck, E.J. Abraham, Enhancing stability of structural steel sections using FRP, Thin-walled structures, 47 (2009) 2092-1101. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2008.10.007>
- [7]. R.M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, 2nd ed., Taylor & Francis, Philadelphia, 1998.
- [8]. J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells – Theory and Analysis*, 2nd edition, CRC Press, Boca Raton, Florida, 2004.
- [9]. P.V. Phe, M. Mohareb, A. Fam, Lateral Torsional Buckling Analysis of Steel Beams Strengthened with GFRP plate, *Journal of Thin-Walled Structures*, 131 (2018) 55-75. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.06.025>
- [10]. U.A. Girhammar, D.H. Pan, Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns, *International Journal Mechanical Sciences*, 49 (2007) 239–255. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.07.005>
- [11]. N. Challamel, U.A. Girhammar, Lateral-torsional buckling of vertically layered composite beams with interlayer slip under uniform moment, *Engineering Structures*, 34 (2012) 505–513. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.10.004>
- [12]. S. Schnabl, I. Planinc, Inelastic buckling of two-layer composite columns with nonlinear interface compliance, *Int. J. Mechanical Sciences*, 53 (2011) 1077-1083. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.09.002>
- [13]. M.Z. Kabir, A.E. Seif, Lateral-Torsional Buckling of Retrofitted Steel I-Beams Using FRP Sheets, *Int. J. Science and Tech., Transaction A: Civil Engineering*, 17 (2010) 262-272. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-17487-2_202
- [14]. S. Shojaee, N. Valizadeh, E. Izadpanah, T. Bui, T.V. Vu, Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based isogeometric finite element method, *Composite Structures*, 94 (2012) 1677-1693. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.01.012>
- [15]. P.V. Phe, An innovated theory and closed form solutions for the elastic lateral torsional buckling analysis of steel beams/columns strengthened with symmetrically balanced GFRP laminates, *Engineering Structures*, 256 (2022) 114046. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114046>