



PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORK MODELING OF A BAR UNDER PURE AXIAL TENSION: AN EFFICIENT FRAMEWORK

Bui Thi Loan*, Tran Bao Viet, Nguyen Hoang Quan, Pham Thi Thanh Thuy,
Bui Thi Thanh Mai

University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 14/07/2025

Revised: 29/08/2025

Accepted: 11/10/2025

Published online: 15/10/2025

<https://doi.org/10.47869/tcsj.76.8.7>

* *Corresponding author*

Email: buithiloan@utc.edu.vn; Tel: +84979458331

Abstract. In structural mechanics, solving partial differential equations (PDEs) is traditionally performed using numerical methods such as the Finite Element Method (FEM). However, when applied to optimization problems, FEM often encounters limitations due to its high computational cost and difficulties in handling continuously varying geometries. Recently, Physics-Informed Neural Networks (PINNs) have emerged as a promising alternative, enabling the solution of PDEs without mesh generation by directly embedding physical laws into the loss function of deep learning models. This study initially develops a PINN model for the uniaxial tension bar problem, with the aim of evaluating the effectiveness of three commonly used training techniques: non-dimensionalization of input and output variables; the use of hard versus soft boundary conditions; and the choice between PDE-based and energy-based loss functions. Results show that non-dimensionalization improves accuracy by balancing gradients across physical quantities; hard boundary conditions lead to faster and more stable convergence; and PDE-based loss functions enforce local physical constraints more effectively than energy-based ones. This work represents only an initial study on a simple problem; nevertheless, the obtained results demonstrate the potential of PINNs in structural mechanics and provide a foundation for further development and extension to more complex problems.

Keywords: Physics-Informed Neural Networks; PINN, Structural Mechanics; Axial Tension
@ 2025 University of Transport and Communications



NGHIÊN CỨU XÂY DỰNG MÔ HÌNH MẠNG NƠ-RON TÍCH HỢP THÔNG TIN VẬT LÝ HIỆU QUẢ CHO BÀI TOÁN THANH CHỊU KÉO THUẦN TÚY

Bùi Thị Loan*, Trần Bảo Việt, Nguyễn Hoàng Quân, Phạm Thị Thanh Thủy,
Bùi Thị Thanh Mai

Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 14/07/2025

Ngày nhận bài sửa: 29/08/2025

Ngày chấp nhận đăng: 11/10/2025

Ngày xuất bản Online: 15/10/2025

<https://doi.org/10.47869/tcsj.76.8.7>

* Tác giả liên hệ

Email: buithiloan@utc.edu.vn; Tel: +84979458331

Tóm tắt. Trong cơ học kết cấu, việc giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng (PDEs) thường được thực hiện bằng các phương pháp số như phương pháp phần tử hữu hạn (FEM). Tuy nhiên, khi áp dụng cho các bài toán liên quan đến tối ưu hóa, FEM thường gặp hạn chế do chi phí tính toán cao và khó khăn trong xử lý hình học thay đổi liên tục. Gần đây, mạng nơ-ron thông tin vật lý (PINN) đã nổi lên như một phương pháp thay thế hiệu quả, cho phép giải PDEs mà không cần chia lưới phần tử, bằng cách tích hợp trực tiếp các định luật vật lý vào hàm mất mát của mô hình học sâu. Nghiên cứu này bước đầu xây dựng mô hình PINN cho bài toán thanh chịu kéo thuần túy, nhằm đánh giá hiệu quả của ba kỹ thuật huấn luyện phổ biến như đưa bài toán về dạng không thứ nguyên; sử dụng điều kiện biên cứng hoặc mềm; lựa chọn giữa hàm mất mát dạng PDE hoặc dạng năng lượng. Kết quả cho thấy việc đưa về dạng không thứ nguyên giúp cân bằng gradient và cải thiện độ chính xác; điều kiện biên cứng dẫn đến hội tụ nhanh và ổn định hơn; và hàm mất mát dạng PDE kiểm soát ràng buộc vật lý tốt hơn hàm năng lượng. Đây mới chỉ là nghiên cứu bước đầu trên một bài toán đơn giản, song các kết quả đạt được đã khẳng định tiềm năng của PINN trong cơ học kết cấu, đồng thời tạo nền tảng để phát triển và mở rộng cho các bài toán phức tạp hơn.

Từ khóa: Mạng nơ-ron thông tin vật lý, PINN, cơ học vật rắn, thanh chịu kéo thuần túy

@ 2025 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tính toán cơ học kết cấu đóng vai trò quan trọng trong lĩnh vực xây dựng, với trọng tâm là

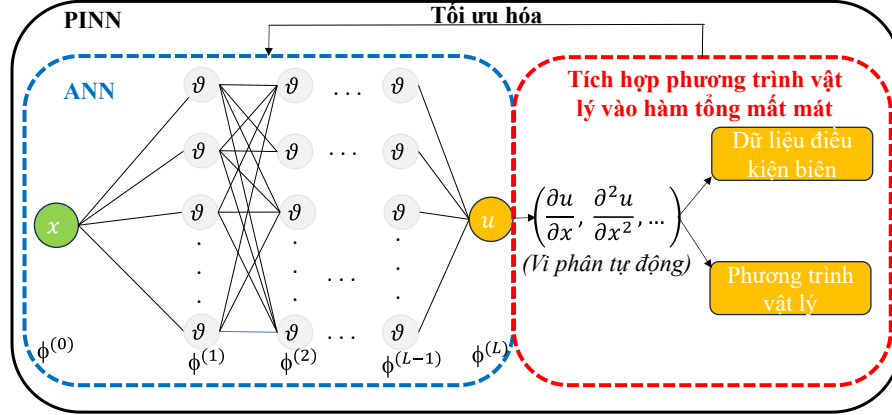
giải các phương trình vi phân riêng phần (PDEs). Hiện nay, phương pháp phổ biến nhất để giải PDEs là phương pháp phần tử hữu hạn (FEM – Finite Element Method). Tuy nhiên, FEM vẫn tồn tại một số hạn chế, đặc biệt trong các bài toán nhiều chiều khi số bậc tự do tăng theo cấp số nhân, làm tăng đáng kể độ phức tạp tính toán. Ngoài ra, FEM gặp nhiều khó khăn với bài toán phi tuyến (về hình học và vật liệu), do yêu cầu lựa chọn phần tử phù hợp và quá trình lập tính phức tạp, tốn thời gian và tài nguyên. Việc chia lưới trong các vùng có biến động mạnh hoặc biên hình học phức tạp cũng là một thách thức đáng kể.

Trong bối cảnh đó, trí tuệ nhân tạo (AI) đang nổi lên như một phương pháp thay thế hiệu quả nhờ sự phát triển mạnh mẽ của dữ liệu kỹ thuật số, sức mạnh tính toán và các thuật toán học sâu (deep learning). Đặc biệt, mạng thần kinh nhân tạo (ANN) đã được áp dụng rộng rãi trong cơ học kết cấu. Sự kết hợp giữa FEM với mô hình dữ liệu (data-driven) cũng được ứng dụng để nghiên cứu ứng xử của kết cấu và vật liệu [1–3]. Tuy nhiên, ANN truyền thống và thậm chí kết hợp FEM – data driven vẫn mang tính “hộp đen”, thiếu khả năng giải thích vật lý và thường đòi hỏi lượng dữ liệu lớn với độ chính xác cao khi áp dụng theo hướng học thuần dữ liệu.

Để khắc phục các vấn đề có thể gặp phải của hai phương pháp trên (FEM và data-driven), mạng nơ-ron thông tin vật lý (PINN) đã được đề xuất [4], trong đó các định luật vật lý cơ bản được xem xét thông qua việc kết hợp các phương trình vật lý vào mạng. PINN là giải pháp cân bằng giữa FEM và giải pháp dự đoán dựa trên dữ liệu thuần túy khi tích hợp dữ liệu với thông tin vật lý nhằm cải thiện hiệu suất dự đoán và khắc phục vấn đề thiếu hoặc mất cân bằng dữ liệu. Hơn thế nữa, Khác với FEM cần phần mềm thương mại (Abaqus, Ansys,...), PINN được lập trình trực tiếp bằng Python với các thư viện mã nguồn mở như PyTorch, TensorFlow, NumPy,... Hiện nay, PINN đã và đang được ứng dụng rộng rãi để giải quyết nhiều bài toán thực tế như các bài toán về cơ học chất lỏng [5–8], truyền nhiệt [9–12] và cơ học vật rắn [13–16], Tuy nhiên, ứng dụng PINN trong giải quyết các bài toán kết cấu vẫn đang ở giai đoạn đầu và có rất nhiều vấn đề phức tạp cần giải quyết ngay cả với bài toán đơn giản một chiều hoặc hai chiều. Thật vậy, mặc dù so với FEM, thì PINN không cần tạo lưới phần tử tiêu tốn nhiều thời gian, nhưng lại cần phải giải quyết vấn đề của bài toán tối ưu hóa. Cụ thể, các cấu trúc của PINN thường là các mạng đa lớp (Multi Layer Perception – MLP). Tương tự như các nhiệm vụ học sâu khác, cấu trúc kiến trúc và các tham số của mạng nơ ron đa lớp (như độ sâu, độ rộng, các hàm kích hoạt, tốc độ học, số lượng epoch huấn luyện, và các lựa chọn bộ tối ưu, ...) đều có ảnh hưởng lớn tới hiệu suất của PINN. Điều này đã được đề cập tới trong một số nghiên cứu. Chẳng hạn, Raissi và cộng sự [5] đã chỉ ra rằng việc tăng độ rộng và độ sâu của PINN có thể cải thiện độ chính xác của dự đoán. Ảnh hưởng của hàm kích hoạt tới hiệu quả của PINN đã được đề cập tới trong một số trường hợp [17]. Tuy nhiên, ngoài ảnh hưởng các tham số về cấu trúc của mô hình, khi xây dựng mô hình PINN để giải các bài toán cơ học, một số giải pháp kỹ thuật đã được đề xuất áp dụng như kỹ thuật đưa bài toán về dạng không thứ nguyên (dimensionless), kỹ thuật sử dụng các dạng điều kiện biên khác nhau (điều kiện biên cứng, điều kiện biên mềm), hoặc sử dụng các dạng hàm mất mát khác nhau. Tuy nhiên, hiệu quả của các giải pháp này vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ và điều này sẽ được thực hiện trong nghiên cứu này thông qua việc giải quyết một trong những bài toán cơ bản nhất trong cơ học kết cấu, đó là bài toán thanh chịu kéo thuần túy. Mục tiêu là triển khai xây dựng mô hình PINN để dự đoán ứng xử (chuyển vị, ứng suất và biến dạng dọc trục) của thanh chịu kéo thuần túy, đồng thời nghiên cứu ảnh hưởng một số giải pháp kỹ thuật áp dụng trong mô hình PINN để thấy rõ ưu, nhược điểm và khả năng áp dụng của từng giải pháp cho các trường hợp khác nhau

2. MÔ HÌNH MẠNG NƠ-RON TÍCH HỢP THÔNG TIN VẬT LÝ (PINN)

Mô hình mạng thần kinh tích hợp thông tin vật lý (Physics informed Neural Networks - PINN) là mô hình kết hợp mạng thần kinh nhân tạo (ANN) để “học” các quy luật vật lý. Mô hình mạng PINN gồm hai thành phần chính, đó là mạng nơ-ron nhân tạo ANN (phần màu xanh) và các ràng buộc vật lý (phần màu đỏ) trên Hình 1. ANN chịu trách nhiệm học từ dữ liệu, trong khi đó các ràng buộc vật lý sẽ được đảm bảo thông qua hàm mất mát để các nghiệm tìm được tuân thủ các định luật vật lý.



Hình 1. Cấu trúc mô hình mạng nơ-ron tích hợp thông tin vật lý (PINN).

2.1. Mạng thần kinh nhân tạo

Mạng nơ-ron nhân tạo (ANN) là một công cụ mạnh mẽ trong lĩnh vực học máy và trí tuệ nhân tạo, được thiết kế dựa trên cảm hứng từ cấu trúc và chức năng của bộ não con người. ANN bao gồm các lớp nơ-ron (neural) được sắp xếp thành ba loại chính: lớp đầu vào (input layer), lớp ẩn (hidden layer), và lớp đầu ra (output layer). Mỗi nơ-ron trong mạng có các kết nối (liên kết) với các nơ-ron ở lớp kế tiếp. Trong một ANN, các lớp mạng nơ-ron liên tiếp được kết nối với nhau thông qua trọng số, độ lệch và các hàm kích hoạt. Khi sử dụng ANN, thông tin đầu vào được đưa vào mạng nơ-ron thông qua lớp đầu vào, sau đó được lan truyền qua các lớp liên tiếp. Cuối cùng, dự đoán của ANN được xuất ra thông qua lớp đầu ra. Một ANN có L lớp có thể được biểu diễn toán học như sau:

$$\begin{cases} \phi^{(0)} = x \\ \tilde{\phi}^{(l)} = W^{(l)T} \theta^{(l-1)} + b^{(l)}, \quad l = 1, 2, \dots, L \\ \phi^{(l)} = \vartheta^{(l)}(\tilde{\phi}^{(l)}), \quad l = 1, 2, \dots, L \\ u = \phi^{(L)} \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó $W^{(l)}$ và $b^{(l)}$ là ma trận trọng số và véc tơ độ lệch của layer thứ (l) , còn $\vartheta^{(l)}$ là hàm kích hoạt giúp mạng nơ-ron học được các mối quan hệ phi tuyến.

2.2. Tích hợp thông tin vật lý vào mạng thần kinh nhân tạo thông qua hàm tổng mất mát

Trong mạng ANN thông thường (học từ dữ liệu, không được tích hợp thông tin vật lý), quá trình học của ANN diễn ra thông qua quá trình lan truyền xuôi để dự đoán đầu ra, và thuật toán thuật toán lan truyền ngược (backpropagation) để tính toán đạo hàm của hàm mất mát theo trọng số và độ lệch, sử dụng phương pháp gradient descent (GD) để tối ưu hóa mạng, điều chỉnh trọng số của các kết nối và độ lệch để tối thiểu hóa hàm mất mát (giảm sai số giữa đầu ra dự đoán và đầu ra thực tế).

Đối với mạng thông tin vật lý (PINN), thông tin vật lý được tích hợp vào mạng thần kinh nhân tạo thông qua hàm mất mát (phần màu đỏ trên Hình 1). Hàm mất mát khi này (biểu thức

(2)) ngoài mất mát liên quan sai số trong việc ước lượng nghiệm u_θ tại các điểm dữ liệu đã cho liên quan tới điều kiện biên ($\mathcal{L}_b$), thì còn một thành phần mất mát liên quan tới vật lý ($\mathcal{L}_{physic}$). Việc tính vi phân từng phần của nghiệm xấp xỉ ($\frac{\partial u_\theta}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}, \dots$) được thực hiện thông qua kỹ thuật vi phân tự động sử dụng các khung mã nguồn mở như Tensorflow [15].

$$\mathcal{L}(x, \theta) = \mathcal{L}_b(x, \theta) + \mathcal{L}_{physic}(x, \theta) \quad (2)$$

Bằng cách tối thiểu hóa hàm tổng mất mát sẽ thu được nghiệm xấp xỉ u_θ thỏa mãn cả dữ liệu và các ràng buộc vật lý:

$$\theta^* = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(x, \theta) = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} (\mathcal{L}_b(x, \theta) + \mathcal{L}_{physic}(x, \theta)) \quad (3)$$

θ^* chính là trọng số và độ lệch tối ưu của hàm mục tiêu $\mathcal{L}(x, \theta)$

3. MÔ HÌNH THÔNG TIN VẬT LÝ CHO BÀI TOÁN CƠ HỌC ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH

3.1. Bài toán cơ học vật rắn đàn hồi tuyến tính

Việc tính toán cơ học vật rắn đàn hồi tuyến tính dựa trên PINN sẽ dựa trên các phương trình cơ bản (phương trình (4) tới (8)). Các phương trình này mô tả sự cân bằng lực, mối quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị, cũng như mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong cơ học vật rắn.

- Phương trình cân bằng:

$$\nabla \sigma + f = 0 \quad \text{trên } \Omega \quad (4)$$

- Quan hệ ứng suất biến dạng (định luật Hooke):

$$\sigma = 2\mu \varepsilon(u) + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u)) \delta \quad (5)$$

- Phương trình biến dạng (hệ thức Cauchy):

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (6)$$

- Điều kiện biên (Boundary Conditions):

- Điều kiện biên tải trọng:

$$\sigma \cdot n = t \quad (7)$$

- Điều kiện biên về chuyển vị:

$$u = u_0 \quad (8)$$

- Phương trình cân bằng năng lượng:

$$W_{int} = W_{ext} \quad (9)$$

Trong đó:

W_{int} , là công của nội lực: $W_{int} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(x) : \sigma(x) d\Omega$

W_{ext} , là công của ngoại lực: $W_{ext} = \int_{\partial\Omega} \sigma(x) \cdot n(x) \cdot u(x) d\partial\Omega$

σ là tensor ứng suất; f là lực khối; μ và λ là các hằng số Lamé; δ là hàm delta Kronecker; $\varepsilon(u)$ là tensor biến dạng ứng với chuyển vị u ; n là véc tơ pháp tuyến

hướng ra ngoài bề mặt $\partial\Omega$; t là véc tơ lực tác động lên bề mặt biên; u_0 là véc tơ chuyển vị cho trước trên biên.

3.2. Mạng thần kinh thông tin vật lý cho bài toán cơ học vật rắn

Để giải bài toán cơ học vật rắn bằng phương pháp mạng thần kinh thông tin vật lý (PINN), tức là sử dụng mạng thần kinh để xấp xỉ nghiệm của hệ phương trình vi phân từ (4) đến (8), cần xem xét một số vấn đề quan trọng. Trong đó có việc xem xét đưa bài toán về dạng không thứ nguyên giúp; cách thức áp dụng điều kiện biên; và việc lựa chọn các hàm mất mát phù hợp (chẳng hạn như loss phương trình vi phân hoặc loss năng lượng) đóng vai trò then chốt trong huấn luyện mô hình hiệu quả.

a) Dạng không thứ nguyên

Các đại lượng trong phương trình cơ bản của cơ học vật rắn ở trên (phương trình (4) đến (9)), cụ thể là tọa độ không gian (x), ứng suất (σ), chuyển vị (u) cũng như các tham số vật liệu (λ, μ) có sự khác biệt lớn về giá trị tuyệt đối của chúng. Trong khi chuyển vị thường nằm trong khoảng $u \ll 1mm$, thì các tham số vật liệu nằm trong khoảng ($\lambda, \mu \gg 10^3 MPa$), tọa độ không gian nằm trong khoảng ($x \gg 1m$). Những sự khác biệt này dẫn đến khó khăn trong quá trình tối ưu hóa hàm tổng tổn thất $\mathcal{L}(x, \theta)$. Điều này cũng đã được ghi nhận trong một số nghiên cứu ([18–20]).

Để khắc phục vấn đề này, một phương pháp được đề xuất bởi (Langtangen và Pedersen, 2016) tạm được gọi là phương pháp đưa về dạng không thứ nguyên. Theo phương pháp này, các giá trị trên sẽ được đưa về dạng không thứ nguyên để nằm trong cùng một thang đơn vị trước khi tính toán tổn thất. Điều này cũng áp dụng cho các điều kiện biên. Mỗi đại lượng được chia bởi một giá trị tham chiếu tương ứng như sau:

$$\bar{x} = \frac{x}{x_c}; \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_c}; \bar{u} = \frac{u}{u_c}; \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_c}; \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_c} \quad (10)$$

Trong đó $\bar{\bullet}$ biểu thị các đại lượng không thứ nguyên và $\bullet_c$ là các giá trị tham chiếu tương ứng, thường được chọn là các giá trị lớn nhất của đại lượng đó trong miền Ω .

Khi đã giải được bài toán, các kết quả dự đoán có thể được đưa về dạng với đơn vị gốc ban đầu của chúng để đạt được kết quả định lượng chính xác.

b) Điều kiện biên

Việc xây dựng bài toán tối ưu hóa trong phương trình (13) áp đặt điều kiện biên thông qua một thành phần mất mát riêng biệt $\mathcal{L}_b(x, \theta)$ được gọi là cách tiếp cận điều kiện biên mềm trong PINN [2]. Với cách tiếp cận này, các điều kiện biên sẽ được thỏa mãn nếu thành phần mất mát $\mathcal{L}_b(x, \theta)$ bằng không.

Ngoài cách tiếp cận trên, một số nhà nghiên cứu [21–23] đã đề xuất cách tiếp cận theo điều kiện biên cứng. Theo cách tiếp cận này, điều kiện biên cứng được thực hiện bằng cách đề xuất hàm thử tự động thỏa mãn điều kiện biên như sau:

$$\mathcal{N}(x, \theta) = G(x) + D(x)\tilde{\mathcal{N}}(x; \theta) \quad (11)$$

Trong đó hàm $G(x)$ là hàm được xây dựng sao cho nó thỏa mãn các điều kiện biên một cách tự nhiên. Hàm $D(x)$ được thiết kế để có giá trị bằng không trên biên và tăng dần khi di chuyển ra xa khỏi biên. $\tilde{\mathcal{N}}(x; \theta)$ là đầu ra của mạng nơ ron cơ bản để tìm ra lời giải gần đúng cho phương trình vi phân (PDE) và không bị hạn chế bởi điều kiện biên. Ý tưởng chính là $G(x)$ và $D(x)$ được xây dựng để đảm bảo rằng các đầu ra của mạng nơ-ron nhân tạo $\mathcal{N}(x, \theta)$ tự động

thỏa mãn các điều kiện biên mà không cần thêm bất kỳ ràng buộc nào vào quá trình huấn luyện của $\tilde{N}(x; \theta)$.

Ưu điểm của điều kiện biên cứng so với điều kiện biên mềm là giảm sự phức tạp của bài toán tối ưu hóa trong phương trình (12), đơn giản thành:

$$\theta^* = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(x, \theta) = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}_{pde}(x, \theta) \quad (13)$$

Hàm mất mát khi đó chỉ còn lại mất mát của phương trình vi phân.

c) Hàm mất mát thông tin vật lý

Với trường hợp bài toán cơ học vật rắn tính toán dựa trên PINN, áp dụng các phương trình từ (4) đến (9) ở trên, hàm mất mát thông tin vật lý ($\mathcal{L}_{physic}(x, \theta)$) có thể tính theo hai cách: hàm mất mát tiêu chuẩn tính trực tiếp từ phương trình vi phân và điều kiện biên ($\mathcal{L}_{PDE}(x, \theta)$), và hàm mất mát dựa trên năng lượng (Energy-based loss function - $\mathcal{L}_{Energy}(x, \theta)$)

Hàm mất mát tiêu chuẩn là tổng mất mát tính theo trung bình bình phương sai số MSE (mean square errors) từ phương trình vi phân và điều kiện biên lực tại các điểm mẫu, được viết như sau:

$$\mathcal{L}_{PDE}(x, \theta) = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} (\nabla \sigma^i + f^i)^2 + \frac{1}{N_{b1}} \sum_{i=1}^{N_{b1}} (\sigma^i \cdot n - t^i)^2 + \frac{1}{N_{b2}} \sum_{i=1}^{N_{b2}} (u^i - u_0)^2 \quad (14)$$

Trong đó N_f , N_{b1} và N_{b2} lần lượt là tổng số điểm lấy mẫu trong miền tính toán (số điểm collocation point), số điểm dữ liệu trên biên áp tải trọng và số điểm trên biên áp chuyển vị.

Dựa trên nguyên lý cân bằng công của nội lực và ngoại lực (phương trình (9)), hàm mất mát dựa trên năng lượng được đề xuất dựa trên nguyên lý biến phân và được xác định bằng bình phương sai số giữa công nội lực và công ngoại lực:

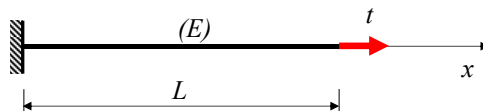
$$\mathcal{L}_{Energy}(x, \theta) = W_{int} - W_{ext} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(x) : \sigma(x) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sigma(x) \cdot n(x) \cdot u(x) d\partial\Omega \quad (15)$$

4. MÔ HÌNH THÔNG TIN VẬT LÝ GIẢI BÀI TOÁN THANH CHỊU KÉO THUẦN TÚY

Dựa trên nguyên lý xây dựng mô hình mạng PINN cho bài toán cơ học vật rắn, trong nghiên cứu này sẽ tiến hành triển khai mô hình PINN cho một trong những bài toán cơ bản nhất của lĩnh vực này, đó là bài toán thanh chịu kéo thuần túy. Mục tiêu là kiểm chứng và tối ưu hóa mô hình PINN cho bài toán, từ đó mở rộng cho các bài toán phức tạp hơn trong tương lai.

4.1. Bài toán thanh chịu kéo thuần túy

Xem xét bài toán thanh đồng nhất chịu kéo như trên Hình 2: Thanh có chiều dài $L = 1000mm$; mô đun đàn hồi Young của vật liệu thanh là $E = 210MPa$; một đầu thanh được ngàm cố định tại biên trái và ứng suất kéo $t = 200 (MPa)$ được áp vào biên phải của thanh.



Hình 2. Mô tả bài toán thanh chịu kéo thuần túy.

Phương trình cân bằng, định luật Hooke, phương trình biến dạng cho bài toán này được viết như sau:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma = E\varepsilon \quad (16)$$

Điều kiện biên tương ứng:

$$u(x=0) = 0; \quad \sigma(x=1) = 1 \quad (17)$$

4.2. Triển khai mô hình thông tin vật lý PINN cho bài toán thanh chịu kéo thuần túy

Khi triển khai mô hình PINN cho bài toán thanh chịu kéo thuần túy ở đây, chúng tôi sẽ xét tới các trường hợp sau để nghiên cứu ảnh hưởng của một số kỹ thuật khi tối ưu hóa mô hình PINN cho bài toán cơ học đã đề cập ở trên. Cụ thể sẽ nghiên cứu hiệu quả của việc đưa bài toán về dạng không thứ nguyên, đồng thời nghiên cứu ảnh hưởng của việc áp dụng hai dạng điều kiện biên là điều kiện biên cứng và điều kiện biên mềm, cũng như hiệu quả của việc áp dụng hai dạng hàm mất mát là hàm mất mát năng lượng và hàm mất mát tính trực tiếp từ phương trình vi phân.

a) Đưa bài toán về dạng không thứ nguyên (dimensionless)

Khi giải bài toán với phương trình gốc (16, 17) ở trên, các phương trình vật lý này được tích hợp vào mạng thần kinh thông qua hàm tổng mất mát sau:

$$\mathcal{L}_{PDE}(x, \theta) = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} - t \right)^2 + (u|_{x=0})^2 \quad (18)$$

Dạng không thứ nguyên của phương trình vi phân, phương trình biến dạng và định luật Hooke ở trên được viết như sau:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = 0; \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}; \quad \bar{\sigma} = \bar{E} \cdot \bar{\varepsilon} \quad (19)$$

Điều kiện biên dưới dạng không thứ nguyên:

$$\bar{u}(\bar{x}=0) = 0; \quad \bar{\sigma}(\bar{x}=\bar{L}) = \bar{t} \quad (20)$$

Trong đó các đại lượng $\bar{L}$; $\bar{x}$; $\bar{u}$; $\bar{\varepsilon}$ và $\bar{\sigma}$ lần lượt là chiều dài, các biến không gian, chuyển vị, biến dạng và ứng suất không thứ nguyên được xác định như sau:

$$\bar{L} = \frac{L}{L_c}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L_c}; \quad \bar{u} = \frac{u}{u_c}; \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}; \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_c}; \quad \bar{t} = \frac{t}{\sigma_c}; \quad \bar{E} = \frac{E}{E_c}$$

Và L_c ; u_c ; ε_c ; σ_c lần lượt là các giá trị tham chiếu, và thường được chọn là các giá trị lớn nhất của từng đại lượng. Cụ thể, với bài toán thanh đồng nhất chịu kéo thuần túy này thì giá trị tham chiếu được chọn như sau:

$$L_c = L; \quad \sigma_c = t; \quad E_c = E; \quad u_c = \frac{\sigma_c \times L_c}{E_c}; \quad \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

Việc đưa bài toán về dạng không thứ nguyên trong trường hợp này ngoài việc đơn giản hóa phương trình và loại bỏ đơn vị của các đại lượng thì còn đưa dữ liệu về trong khoảng [0, 1].

Hàm tổng mất mát trong trường hợp này được viết lại:

$$\mathcal{L}_{PDE}(\bar{x}, \theta) = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{L}} - \bar{t} \right)^2 + (\bar{u}|_{\bar{x}=0})^2 \quad (21)$$

Như vậy, ta sẽ xây dựng mô hình PINN cho hai trường hợp: Trường hợp 1 là mô hình PINN để giải các phương trình gốc (16, 17) thông qua việc tối thiểu hóa hàm tổng mất mát (18); và trường hợp 2 là mô hình PINN để giải hệ phương trình không thứ nguyên (19, 20) thông qua việc tối thiểu hóa hàm tổng mất mát (21). Sau khi giải xong bằng PINN với dạng không thứ nguyên, kết quả đầu ra dự đoán sẽ được nhân với đại lượng tham chiếu để ra được giá trị dự đoán với đơn vị gốc. Kết quả dự đoán của hai trường hợp được so sánh và cho thấy hiệu quả của giải pháp đưa bài toán về dạng không thứ nguyên (như kết quả thể hiện ở phần 4.3 dưới đây).

b) Điều kiện biên cứng và điều kiện biên mềm

Việc nghiên cứu ảnh hưởng của các điều kiện biên sẽ dựa trên mô hình PINN giải cho bài toán đưa về dạng không thứ nguyên (được chứng minh là hiệu quả vượt trội như kết quả phân tích ở mục 4.3 dưới đây)

Ảnh hưởng của hai dạng điều kiện biên là điều kiện biên cứng và điều kiện biên mềm cũng sẽ được xem xét trong nghiên cứu này. Hàm mất mát trong biểu thức (21) ở trên là viết tương ứng với trường hợp áp dụng điều kiện biên mềm. Khi áp dụng điều kiện biên cứng theo biểu thức (12) cho bài toán này, hàm thử $\mathcal{N}(\bar{x}, \theta)$ có dạng:

$$\bar{u}(\bar{x}, \theta) = 0 + \bar{x}\tilde{u}(\bar{x}; \theta) \quad (22)$$

Trong đó $\tilde{u}(\bar{x}; \theta)$ là đầu ra trực tiếp từ mạng Nơ-ron nhân tạo và $\bar{u}(\bar{x}, \theta)$ là đầu ra thực tế sau lớp đầu ra đã được điều chỉnh.

Khi đó điều kiện biên tại biên trái $\bar{u}|_{\bar{x}=0} = 0$ sẽ tự động thỏa mãn nên biểu thức hàm tổng mất mát chỉ còn hai thành phần là mất mát của phương trình vi phân và của điều kiện biên phải (biên tác dụng ứng suất kéo t):

$$\mathcal{L}_{PDE}(\bar{x}, \theta) = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{L}} - \bar{t} \right)^2 \quad (23)$$

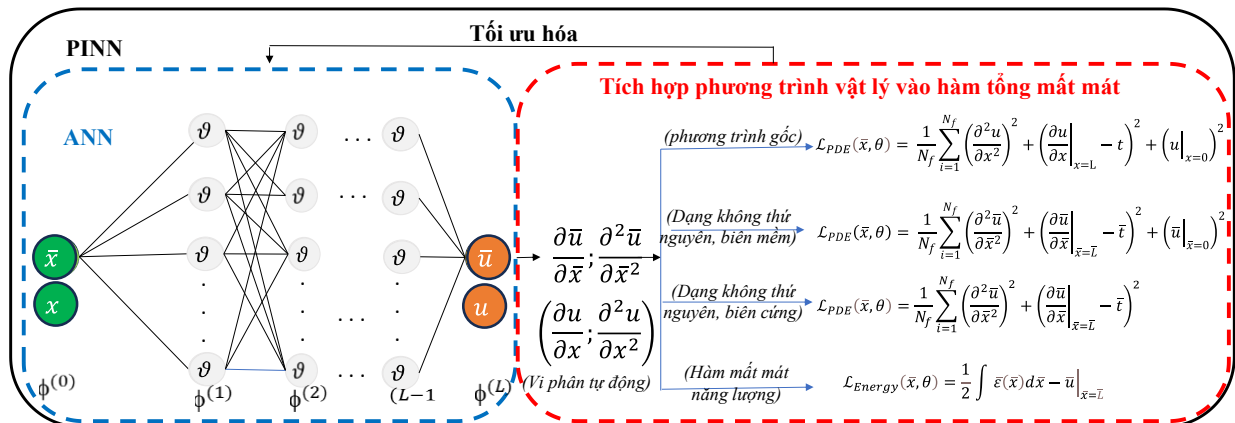
c) Dạng hàm mất mát

Như trên đã trình bày, với bài toán cơ học vật rắn khi giải bằng PINN, có hai dạng hàm mất mát là hàm mất mát tính trực tiếp từ phương trình vi phân và điều kiện biên ($\mathcal{L}_{PDE}(x, \theta)$) và hàm mất mát năng lượng ($\mathcal{L}_{Energy}(x, \theta)$). Với bài toán thanh chịu kéo thuần túy này, chúng tôi sẽ xét tới cả hai trường hợp hàm mất mát này để đánh giá ảnh hưởng của từng dạng hàm tới hiệu quả của mô hình PINN.

- Hàm mất mát tính theo tổng của sai số bình phương trung bình của phương trình vi phân và điều kiện biên (đã áp điều kiện biên cứng cho biên trái) chính là tính theo biểu thức (23) ở trên.
- Hàm mất mát năng lượng của bài toán này được tính như sau:

$$\mathcal{L}_{Energy}(\bar{x}, \theta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}(\bar{x}) d\bar{x} - \bar{u}|_{\bar{x}=1} \quad (24)$$

Cấu trúc mô hình PINN để giải bài toán thanh chịu kéo thuần túy cho các trường hợp khác nhau ở trên ở trên được mô tả như trên **Error! Reference source not found.** dưới đây. Một mạng nơ-ron sâu truyền thẳng FNN được sử dụng để xấp xỉ trường dịch chuyển u (hoặc $\bar{u}$) theo tọa độ x (hoặc $\bar{x}$). Kết quả đầu ra được nhập vào hàm mất mát. Tối thiểu hóa hàm mất mát sẽ thu được nghiệm xấp xỉ u (hoặc $\bar{u}$) thỏa mãn các điều kiện của bài toán.



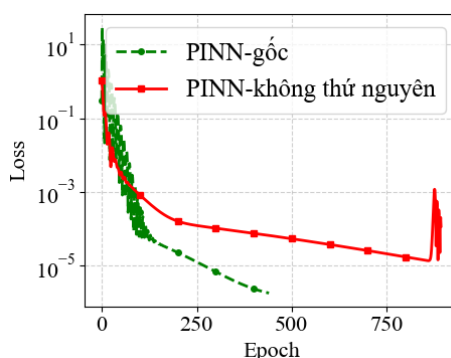
Hình 3. Cấu trúc mạng PINN cho bài toán thanh chịu kéo thuần túy.

Mô hình mạng nơ-ron PINN được xây dựng để giải quyết bài toán trên là một mạng truyền thẳng liên kết đầy đủ với hai lớp ẩn, mỗi lớp gồm 30 nơ-ron. Mỗi nơ-ron sử dụng hàm kích hoạt Tanh để tăng khả năng biểu diễn qua các hệ phi tuyến. Quá trình huấn luyện sử dụng thuật toán tối ưu Adam, với tốc độ học là 0,001. Mô hình được huấn luyện tối đa 5000 vòng lặp (epochs), nhưng sẽ dừng sớm nếu hàm mất mát không cải thiện sau 50 vòng lặp liên tiếp (thông qua sử dụng kỹ thuật early stopping), hoặc nếu sai số hội tụ nhỏ hơn ngưỡng định trước (10^{-6}). Kết quả của bài toán ứng với các trường hợp hàm mất mát khác nhau được phân tích ở dưới đây.

4.3. Kết quả và bàn luận

a) Ảnh hưởng của việc đưa về dạng không thứ nguyên

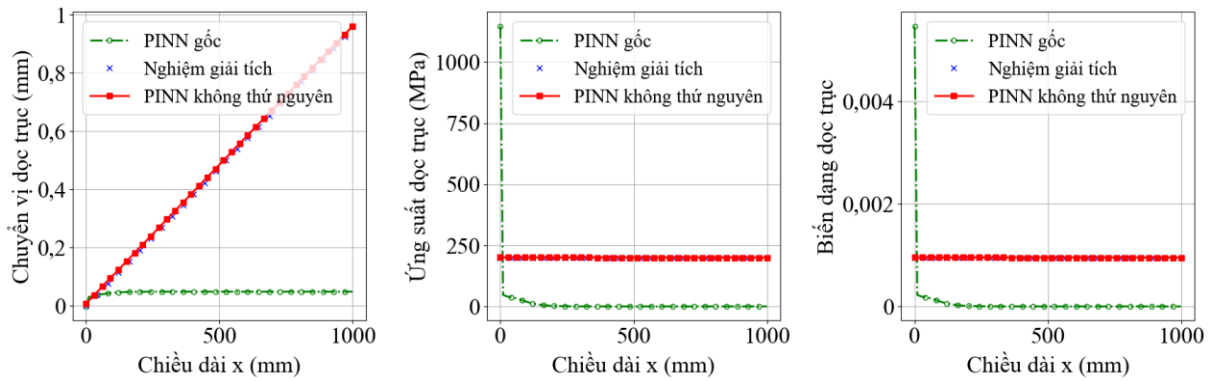
Kết quả trong Hình 4, Hình 5 và Bảng 1 cho thấy rằng mô hình PINN sử dụng trực tiếp các đại lượng vật lý đầu vào mà không chuẩn hóa (PINN-gốc) cho ra kết quả dự đoán sai lệch nghiêm trọng so với nghiệm giải tích. Sai số tương đối trung bình (MRE) đối với chuyển vị, ứng suất và biến dạng đều lên tới khoảng 82–92%, bất chấp việc hàm mất mát hội tụ về giá trị rất nhỏ ($\sim 10^{-5}$), như minh họa trong Hình 4.



Hình 4. Loss tổng theo số epoch cho hai trường hợp dùng mô hình PINN từ phương trình gốc và phương trình không thứ nguyên.

Hiện tượng này phản ánh một vấn đề cốt lõi trong quá trình huấn luyện mô hình học máy vật lý: sự mất cân bằng về thang đo giữa các đại lượng vật lý. Trong bài toán thanh chịu kéo đơn trục đang xét, các đại lượng như chiều dài thanh L , mô đun đàn hồi E , và ứng suất biên σ có độ lớn chênh lệch đáng kể so với các đại lượng vật lý bậc thấp hơn như biến dạng hay đạo hàm bậc hai của chuyển vị. Khi không được chuẩn hóa, các điều khoản trong hàm mất mát liên quan đến các đại lượng lớn sẽ sinh ra gradient lớn hơn, làm quá trình lan truyền ngược bị chi phối bởi các thành phần này. Ngược lại, các điều kiện vật lý có độ lớn nhỏ hơn - như điều kiện Neumann hay điều kiện cân bằng vi phân - lại tạo ra gradient rất nhỏ, dẫn đến bị bỏ qua trong quá trình huấn luyện. Kết quả là mô hình hội tụ về một nghiệm sai lệch, vi phạm các ràng buộc vật lý quan trọng, dù tổng thể hàm mất mát vẫn nhỏ. Đây là minh chứng rõ ràng cho hiện tượng gradient vanishing không đồng đều trong các mô hình PINN.

Ngược lại, khi bài toán được chuyển về dạng không thứ nguyên, mô hình PINN cho kết quả chính xác vượt trội: sai số tương đối trung bình giảm xuống chỉ còn 0,25% đối với chuyển vị và 0,017% đối với ứng suất và biến dạng. Việc chuẩn hóa các đại lượng vật lý về cùng một thang đo không thứ nguyên (thường nằm trong $[0, 1]$) giúp cân bằng ảnh hưởng của các điều khoản trong hàm mất mát, cải thiện đáng kể quá trình lan truyền ngược. Nhờ đó, mô hình học được đầy đủ các ràng buộc vật lý, hội tụ nhanh hơn, ổn định hơn và cho kết quả phù hợp với nghiệm giải tích trên toàn miền tính.



Hình 5: So sánh các nghiệm giải tích với nghiệm dự đoán bởi mô hình PINN dự đoán từ phương trình gốc và phương trình không thứ nguyên: (a) – chuyển vị dọc trục; (b) – ứng suất dọc trục và (c) – biến dạng dọc trục

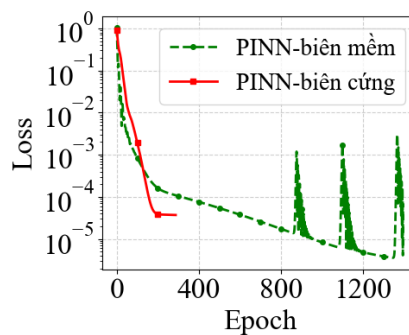
Bảng 1. So sánh hiệu quả của PINN- gốc và PINN- không thứ nguyên.

Mô hình	Thời gian tính toán (s)	MRE chuyển vị (%)	MRE ứng suất (%)	MRE biến dạng (%)
PINN-gốc	2,36	82	92	92
PINN-không thứ nguyên	5,76	0,25	0,017	0,017

Kết quả này cho thấy rằng việc chuẩn hóa dữ liệu và tham số vật lý không chỉ là bước kỹ thuật phụ trợ, mà đóng vai trò quyết định trong tính chính xác và độ tin cậy của PINN. Ngoài ra, kết quả này cũng gợi ý rằng việc chỉ dựa vào sự hội tụ của hàm mất mát tổng thể có thể gây “ảo tưởng” về sự đúng đắn vật lý của nghiệm. Đây là hiện tượng hội tụ sai trong PINN.

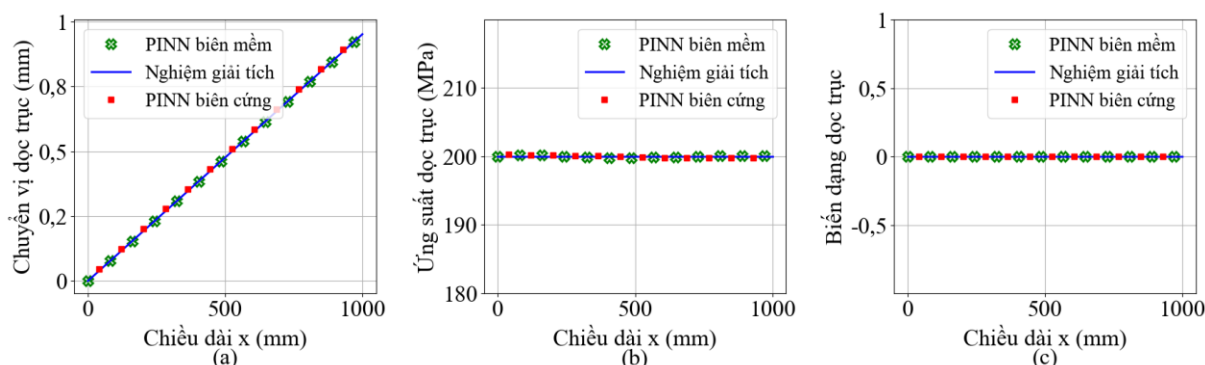
b) Ảnh hưởng của việc áp dụng điều kiện biên cứng và điều kiện biên mềm

Từ hiệu quả của việc sử dụng mô hình PINN để dự đoán nghiệm của phương trình vi phân dưới dạng không thứ nguyên đã trình bày ở trên, trong phần này, tôi tiếp tục nghiên cứu ảnh hưởng của điều kiện biên cứng và điều kiện biên mềm trên cùng cơ sở phương trình vi phân ở dạng không thứ nguyên



Hình 6. Loss tổng theo số epoch cho hai trường PINN-biên cứng và PINN-biên mềm.

Kết quả so sánh giữa hai mô hình áp dụng điều kiện biên khác nhau được đối chiếu với nghiệm giải tích, như thể hiện trong Hình 6, Hình 7 và Bảng 2 dưới đây. Có thể nhận thấy rằng cả hai mô hình đều đạt được độ chính xác cao trong dự đoán các đại lượng vật lý gồm: chuyển vị, ứng suất và biến dạng dọc trục. Các kết quả dự đoán gần như trùng khớp với nghiệm giải tích, cho thấy mô hình PINN có khả năng nội suy và biểu diễn bài toán vật lý một cách chính xác, bất kể hình thức áp dụng điều kiện biên.



Hình 7. So sánh nghiệm giải tích với nghiệm dự đoán bởi PINN-biên cứng và PINN-biên mềm: (a) – chuyển vị dọc trục; (b)- ứng suất dọc trục và (c)-biến dạng dọc trục.

Bảng 2. So sánh hiệu quả của PINN- biên cứng và PINN- biên mềm.

Mô hình	Thời gian tính toán (s)	MRE chuyển vị (%)	MRE ứng suất (%)	MRE biến dạng (%)
PINN-biên cứng	0,89	0,01	0,0004	0,0004
PINN-biên mềm	5,76	0,25	0,017	0,017

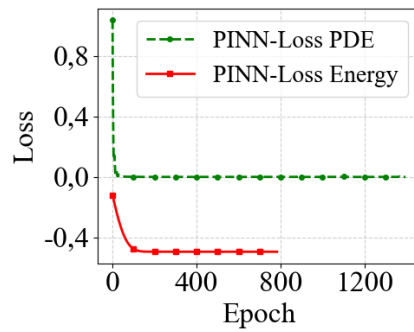
Tuy nhiên, sự khác biệt rõ rệt giữa hai mô hình thể hiện ở hiệu quả huấn luyện và mức độ ổn định của quá trình tối ưu. Mô hình sử dụng điều kiện biên cứng cho thấy khả năng hội tụ nhanh và ổn định hơn đáng kể (Hình 6): hàm mất mát giảm đều đặn và đạt giá trị rất nhỏ ($\sim 10^{-5}$) chỉ sau khoảng 200 vòng lặp. Trong khi đó, mô hình với điều kiện biên mềm mất nhiều thời gian hơn để hội tụ và xuất hiện các dao động rõ rệt trong giá trị hàm mất mát, đặc biệt sau khoảng 800 epoch, phản ánh tính nhạy cảm và thiếu ổn định của quá trình huấn luyện.

Bên cạnh đó, hiệu quả tính toán cũng khác biệt rõ rệt. Mô hình PINN-biên cứng hoàn tất quá trình huấn luyện chỉ trong 0,89 giây, trong khi mô hình PINN-biên mềm mất tới 5,76 giây. Đồng thời, sai số tương đối trung bình (MRE) của mô hình PINN-biên cứng cũng thấp hơn rõ rệt ở tất cả các đại lượng: chuyển vị (0,01% so với 0,25%), ứng suất và biến dạng (0,0004% so với 0,017%). Kết quả này cho thấy việc áp dụng điều kiện biên cứng vào đã giúp giảm bớt sự phụ thuộc của kết quả dự đoán vào quá trình tối ưu (đặc biệt là kết quả ở khu vực biên), do đó nâng cao độ tin cậy của mô hình.

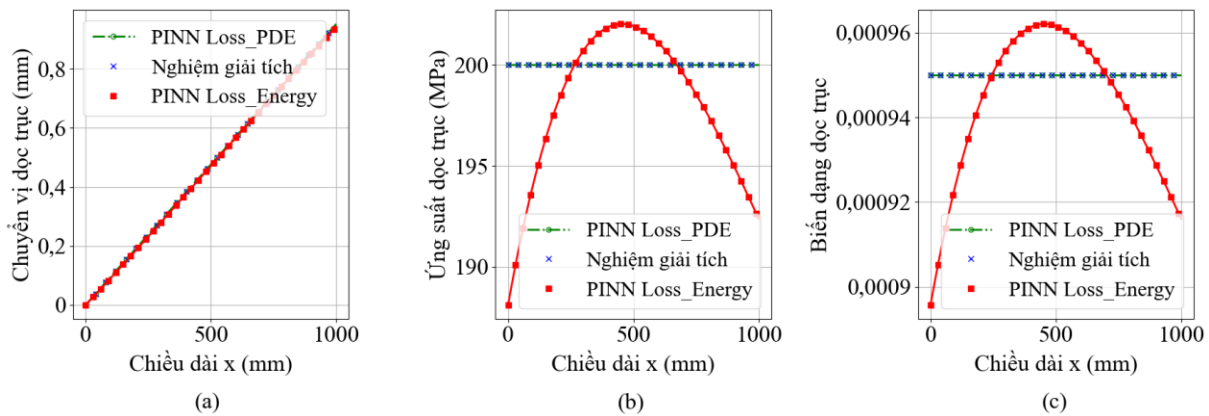
Sự chênh lệch lớn về thời gian tính toán cho thấy PINN-biên cứng không chỉ tối ưu hơn về mặt hội tụ mà còn mang lại lợi thế đáng kể khi mở rộng sang các bài toán 2D, 3D hoặc các mô hình nhiều tham số, nơi chi phí huấn luyện trở thành yếu tố then chốt.

c) Ảnh hưởng của việc áp dụng các dạng hàm mất mát khác nhau

Kết quả thể hiện trên Hình 8 và Bảng 3 cho thấy sự khác biệt rõ rệt về hiệu quả giữa hai phương pháp huấn luyện mô hình PINN sử dụng hàm mất mát dựa trên phương trình đạo hàm riêng (Loss_PDE) và hàm năng lượng (Loss_Energy). Mô hình PINN-Loss_PDE không những đạt độ chính xác vượt trội mà còn có tốc độ hội tụ nhanh hơn đáng kể so với PINN-Loss_Energy. Cụ thể, thời gian tính toán của mô hình PINN-Loss_PDE chỉ khoảng 0,89 giây, thấp hơn so với 1,37 giây của mô hình còn lại. Đáng chú ý, sai số tương đối trung bình (MRE) của mô hình sử dụng Loss_PDE đều thấp hơn 0,01% cho cả chuyển vị, ứng suất và biến dạng, trong khi các sai số tương ứng ở mô hình Loss_Energy cao hơn từ hai đến ba bậc độ lớn.



Hình 8: Loss tổng theo số epoch cho hai trường hợp Loss_pde và Loss_Energy



Hình 9. So sánh các nghiệm giải tích với nghiệm dự đoán bởi mô hình PINN dự đoán áp dụng hàm mất mát Loss_PDE và Loss_Energy: (a) – chuyển vị dọc trục; (b) - ứng suất dọc trục; và (c) – biến dạng dọc trục.

Hình 9 minh họa trực quan sự phù hợp giữa nghiệm giải tích và nghiệm dự đoán từ các mô hình, trong đó mô hình PINN-Loss_PDE tái hiện rất sát nghiệm chuẩn. Ngược lại, PINN-Loss_Energy xuất hiện sai lệch đáng kể, đặc biệt trong vùng có gradient trường vật lý lớn. Điều này có thể được lý giải bởi tính chất toàn cục của hàm năng lượng, thường làm che lấp các sai số cục bộ, trong khi Loss_PDE kiểm soát trực tiếp nghiệm vi phân tại từng điểm trong không gian.

Kết quả này cho thấy trong bài toán thanh chịu kéo thuần túy, việc áp dụng điều kiện biên cứng kết hợp với hàm mất mát Loss_PDE đem lại hiệu quả huấn luyện vượt trội cả về độ chính xác và tốc độ hội tụ. Tuy nhiên, cần nhấn mạnh rằng sự vượt trội này không đồng nghĩa với việc Loss_Energy trở nên kém giá trị. Trong các mô hình vật liệu phi tuyến hoặc bài toán có điều kiện biên phức tạp, Loss_Energy có thể đóng vai trò như một công cụ hỗ trợ quan trọng, góp phần ổn định quá trình huấn luyện và bảo toàn năng lượng hệ thống. Hướng tiếp cận kết hợp (hybrid loss), trong đó Loss_PDE và Loss_Energy được phối hợp theo tỷ trọng thích hợp, có thể mang lại sự cân bằng tối ưu giữa tính chính xác cục bộ và tính ổn định toàn cục, đặc biệt cho các bài toán phi tuyến hoặc đa vật lý.

Bảng 3. So sánh hiệu quả của PINN- Loss_PDE và PINN- Loss_Energy.

Mô hình	Thời gian tính toán (s)	MRE chuyển vị (%)	MRE ứng suất (%)	MRE biến dạng (%)
PINN-Loss_PDE	0,89	0,01	0,0004	0,0004
PINN-Loss_Energy	1,37	1,81	0,99	0,99

5. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã xây dựng và triển khai mô hình PINN để giải bài toán thanh chịu kéo thuần túy với mục tiêu phân tích và đánh giá ảnh hưởng của một số giải pháp kỹ thuật tối ưu hóa của mô hình để từ đó xây dựng được mô hình mạng thông tin vật lý hiệu quả nhất cho bài toán. Nghiên cứu đã thu được một số kết quả có giá trị quan trọng sau: (1) việc đưa bài toán về dạng không thứ nguyên là yếu tố thiết yếu giúp cân bằng gradient giữa các điều kiện vật lý trong hàm tổng mất mát, từ đó tăng độ chính xác mô hình và khắc phục hiện tượng hội tụ sai lệch dù giá trị hàm mất mát nhỏ. (2) việc áp dụng điều kiện biên cứng vượt trội hơn điều kiện biên mềm cả về tốc độ hội tụ, tính ổn định trong huấn luyện và sai số tương đối; điều này đặc biệt quan trọng trong các mô hình yêu cầu ràng buộc chính xác tại biên. (3) Việc sử dụng hàm mất mát dựa trên phương trình vi phân (Loss_PDE) cho thấy hiệu suất huấn luyện cao hơn so với hàm năng lượng (Loss_Energy), cả về thời gian tính toán và độ chính xác dự đoán, nhờ khả năng kiểm soát nghiệm cục bộ tốt hơn. Tuy nhiên, có thể xem xét kết hợp các dạng hàm mất mát này với nhau (dạng hybrid loss) đối với những bài toán phi tuyến, đa vật lý phức tạp.

Những kết quả này không chỉ khẳng định tiềm năng của PINN như một công cụ hiệu quả trong cơ học kết cấu, mà còn cho thấy rằng với các kỹ thuật hợp lý, mô hình có thể đạt độ chính xác cao (sai số tương đối trung bình so với kết quả giải tích chỉ từ 10^{-6} tới 10^{-4} về ứng suất, biến dạng và chuyển vị) và tốc độ tính toán nhanh (dưới 1 giây). Hướng phát triển tiếp theo là mở rộng nghiên cứu sang các bài toán nhiều chiều, vật liệu phi tuyến hoặc hình học phức tạp.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo theo mã số đề tài B2024-GHA-02

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Lê Cảnh Hưng, Lê Bá Anh, Bùi Thị Loan, Trần Bảo Việt, Phương pháp đồng nhất hóa kết hợp định hướng dữ liệu dự báo hệ số dẫn hữu hiệu dọc trục của vật liệu composite dẫn nhiệt thấp, Tạp Chí Khoa Học Giao Thông Vận Tải, 74 (2023) 934–45.
- [2]. B.A. Le , H.Q. Nguyen, B.V.Tran, T.S.Vu, T.L.Bui , Symbolic regression model for predicting compression strength of steel fiber-reinforced concrete, Transportation Research Procedia, 85 (2025) 94–101.
- [3]. H.Q. Nguyen , B.A. Le, B.V.Tran, T.S.Vu, T.L.Bui, Deep artificial neural network-powered phase field model for predicting damage characteristic in brittle composite under varying configurations, Machine Learning: Science and Technology, 5 (2024) 025062.
- [4]. G.E.Karniadakis , I.G.Kevrekidis , L.Lu , P.Perdikaris, S.Wang, L.Yang, Physics-informed machine learning, Nature Reviews Physics, 3 (2021) 422–40.
- [5]. M.Raissi , P.Perdikaris, G.E.Karniadakis, Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, Journal of Computational Physics, 378 (2019) 686–707.
- [6]. T.Botarelli, M.Fanfani, P.Nesi, L.Pinelli, Using Physics-Informed neural networks for solving Navier-Stokes equations in fluid dynamic complex scenarios, Engineering Applications of Artificial Intelligence, 148 (2025) 110347.
- [7]. S. Cai, Z. Mao, Z. Wang, M. Yin, G. E. Karniadakis, Physics-informed neural networks (PINNs) for fluid mechanics: a review, Acta Mech Sin, 37(2021) 1727–38. <https://doi.org/10.1007/s10409-021-01148-1>.
- [8]. J. C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet, A computational scheme for linear and non-linear composites with arbitrary phase contrast, Numerical Methods in Engineering, 52 (2001) 139–60.
- [9]. S. Cai, Z. Wang, S. Wang, P. Perdikaris, Physics-informed neural networks for heat transfer problems, Journal of Heat Transfer, 143 (2021) 060801.

- [10]. J. Xu ,H. Wei, H. Bao, Physics-informed neural networks for studying heat transfer in porous media, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 217 (2023) 124671.
- [11]. D.Jalili, S.Jang, M.Jadidi, G.Giustini, A.Keshmiri, Y.Mahmoudi, Physics-informed neural networks for heat transfer prediction in two-phase flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 221 (2024) 125089.
- [12]. Y.Chi, M.Li, R.Long, Z.Liu, W.Liu, Heat source field inversion and detection based on physics-informed deep learning, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 164 (2025) 108824.
- [13]. V.Kag, V.Gopinath, Physics-informed neural network for modeling dynamic linear elasticity, *Computer Science*, 2023.
- [14]. A.D. Mouratidou, G.A. Drosopoulos, G.E. Stavroulakis, Ensemble of physics-informed neural networks for solving plane elasticity problems with examples, *Acta Mech*, 235 (2024) 6703–22. <https://doi.org/10.1007/s00707-024-04053-3>.
- [15]. A.Chakraborty, C.Anitescu, S.Goswami, X.Zhuang, T.Rabczuk, Variational energy based XPINNs for phase field analysis in brittle fracture, *Computer Science - Computational Engineering*, (2022). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.02307>.
- [16]. M.Manav, R.Molinaro, S.Mishra, L.De Lorenzis, Phase-field modeling of fracture with physics-informed deep learning, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 429 (2024) 117104.
- [17]. A. Al-Safwan, C.Song, Is it time to swish? Comparing activation functions in solving the Helmholtz equation using physics-informed neural networks, (2021). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.07721>.
- [18]. M.Abadi, P.Barham, J.Chen, Z.Chen, A.Davis, J.Dean, TensorFlow: A System for Large-Scale Machine Learning, *Proceedings of the 12th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation (OSDI '16)*, 2016, p. 265–83.
- [19]. E.Haghighat, M.Raissi, A.Moure, H.Gomez, R.Juanes, A physics-informed deep learning framework for inversion and surrogate modeling in solid mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 379 (2021) 113741.
- [20]. X.Ren , X.Lyu, Mixed form based physics-informed neural networks for performance evaluation of two-phase random materials, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 127 (2024)107250.
- [21]. I.E. Lagaris, A.Likas, D.I.Fotiadis, Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9 (1998) 987–1000.
- [22]. M.Raissi, Deep hidden physics models: Deep learning of nonlinear partial differential equations, *Journal of Machine Learning Research*, 19 (2018) 1–24.
- [23]. L.Lu, X.Meng, Z.Mao , E.George, DeepXDE K, A deep learning library for solving differential equations, 2020.