Transport and Communications Science Journal

DETERMINATION OF REPRESENTATIVE AREA ELEMENT SIZE FOR 2D POROUS MEDIA WITH DOUBLE POROSITY

Tran Thi Bich Thao

University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article
Received: 19/02/2025
Revised: 28/03/2025
Accepted: 12/04/2025
Published online: 15/04/2025
https://doi.org/10.47869/tcsj.76.3.10
[*] *Corresponding author*
Email: tbthao.tran@utc.edu.vn

Abstract. A doubly porous medium can be considered and treated as a heterogeneous material consisting of a permeable matrix solid phase containing pores. Therein the numerical estimate of effective permeability from the constitutive law and the complexity of the microstructure is a fundamental and important subject in the context of double porous materials. In this work, the representative area element (RAE) is usually seen as an area containing doubly porous materials. It is sufficiently large to include many micro-pores, it must however remain small enough to be considered as an area element of continuum mechanics. The purpose of this work is therefore to numerically estimate/analyze the optimal size of the RAE of doubly porous material under consideration. To achieve this objective, the real microstructure is first idealized with a virtual microstructure. Here, the virtual microstructure of RAE is made of an isotropic permeable host matrix in which elliptical pores of arbitrary sizes are randomly distributed and oriented. Then, the well-known boundary element method (BEM) for the computation of the effective permeability of RAE has been used. The mean effective permeability of doubly porous material can be calculated by using the Monte-Carlo method. Finally, the quantitative estimation of the optimal size of the RAE will be discussed in detail.

Keywords: representative area element (RAE), effective permeability, double porosity, Monte-Carlo, boundary element method (BEM).

Transport and Communications Science Journal, Vol 76, Issue 3 (04/2025), 320-332

Tạp chí Khoa học Giao thông Vận tải

XÁC ĐỊNH KÍCH THƯỚC PHẦN TỬ ĐƠN VỊ ĐẶC TRƯNG CHO MÔI TRƯỜNG RỖNG VỚI ĐỘ RỖNG KÉP

Trần Thị Bích Thảo

Trường Đại học Giao thông Vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

Chuyên mục: Công trình khoa học
Ngày nhận bài: 19/02/2025
Ngày nhận bài sửa: 28/03/2025
Ngày chấp nhận đăng: 12/04/2025
Ngày xuất bản Online: 15/04/2025
https://doi.org/10.47869/tcsj.76.3.10
* *Tác giả liên hệ*
Email: tbthao.tran@utc.edu.vn

Tóm tắt. Môi trường rỗng kép có thể được xem xét và xử lý như là vật liệu không đồng nhất được tạo bởi một chất nền rắn cho phép thấm có chứa các lỗ rỗng vi mô. Trong đó việc dự báo bằng phương pháp số giá trị độ thấm có hiệu từ quy luật ứng xử nội tại và mức độ phức tạp của cấu trúc vi mô vật liệu là một chủ đề cơ bản và quan trọng trong bối cảnh vật liệu rỗng kép. Trong nghiên cứu này phần tử đơn vị đặc trưng (RAE) được xem là phần diện tích hàm chứa vật liệu rỗng kép. Phần diện tích này đủ lớn để bao hàm nhiều lỗ rỗng vi mô, nhưng nó cũng phải đủ nhỏ để được xem xét là phần diện tích đặc trưng theo quan điểm cơ học môi trường liên tục. Do đó mục đích của nghiên cứu này là ước tính/phân tích kích thước tối ưu của phần tử đơn vị đặc trưng cho vật liệu rỗng kép xem xét. Để đạt được mục tiêu này, cấu trúc vi mô thực tế trước tiên được lý tưởng hóa thành cấu trúc vi mô ảo. Ở đây cấu trúc vi mô ảo của phần tử đơn vị đặc trưng được tạo nên bởi một môi trường chất nền thấm được trong đó các lỗ rỗng hình elip với kích thước bất kỳ được phân bố và định hướng một cách ngẫu nhiên. Sau đó phương pháp phần tử biên được ứng dụng để xác định độ thấm có hiệu của RAE. Giá trị độ thấm có hiệu trung bình của vật liệu rỗng kép được tính toán bằng cách sử dụng phương pháp Monte-Carlo. Cuối cùng việc xác định kích thước tối ưu của RAE sẽ được phân tích một cách đầy đủ và chi tiết.

Từ khóa: phần tử đơn vị đặc trưng (RAE), độ thấm có hiệu, độ rỗng kép, Monte-Carlo, phương pháp phần tử biên (BEM).

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

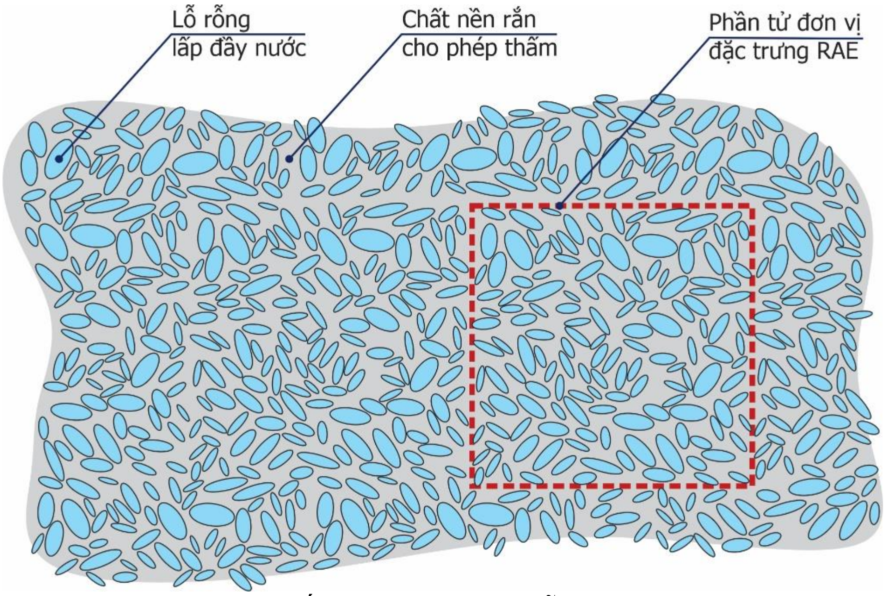
Vật liệu rỗng nói chung hay vật liệu rỗng kép nói riêng có mặt ở mọi nơi và đóng vai trò quan trọng trong nhiều ngành kỹ thuật và công nghiệp [1]. Chúng ta biết rằng các vấn đề liên quan đến tính thấm của vật liệu rỗng kép về mặt bản chất là bài toán xác định đặc tính truyền dẫn có hiệu của môi trường vật liệu không đồng nhất. Chúng ta có thể liệt kê sau đây một số công bố quốc tế làm minh chứng cho nhận định này như nghiên cứu của Auriault và cộng sự [2], nghiên cứu của Sanchez-Palencia [3], nghiên cứu của Whittaker [4], nghiên cứu của Alcocer và Singh [5, 6], nghiên cứu của Monchiet và cộng sự [7] và nghiên cứu của Tran và cộng sự [8, 9, 10]. Môi trường vật liệu không đồng nhất nói trên có thể được quan niệm như một vật liệu hỗn hợp hai thành phần bao gồm chất nền rắn có tính thấm (tính thấm này có được do nội tại của pha nền có chứa các lỗ rỗng nano) và trong đó các lỗ rỗng vi mô lấp đầy nước phân bố rải rác một cách ngẫu nhiên. Mô hình vật liệu này có thể dùng để lý tưởng hóa các vật liệu thực tế như đá, đá cát kết, đất, bê tông, xương, gỗ và rất nhiều vật liệu nhân tạo khác.

Để mô phỏng ứng xử với vật liệu đa pha/vật liệu nhiều thành phần/vật liệu không đồng nhất đòi hỏi thông tin về tính chất cơ lý của từng pha cấu thành vật liệu. Điều này đòi hỏi một khối lượng tính toán đồ sộ do tính rời rạc ở cấp độ vi mô. Để giải quyết vấn đề này, một môi trường đồng nhất tương đương (môi trường có hiệu) được đưa vào thay thế cho môi trường vật liệu hỗn độn và bài toán trở thành xây dựng mối quan hệ giữa hai môi trường cũng như xác định quy luật ứng xử của môi trường có hiệu. Trong cơ học vật liệu, để giải bài toán này thông thường có hai phương pháp: Trước tiên là phương pháp thực nghiệm, phương pháp này thì đòi hỏi thực hiện nhiều thí nghiệm. Ngược lại phương pháp đồng nhất hóa là một kỹ thuật có hiệu năng cao cho phép xác định ứng xử có hiệu của môi trường không đồng nhất với mức độ hỗn độn cao. Về cơ bản việc xác định các đặc tính có hiệu của môi trường đồng nhất tương đương thực hiện qua ba bước chính: Xác định kích thước của phần tử đơn vị đặc trưng (trong không gian hai chiều gọi là phần tử diện tích đặc trưng RAE), giải bài toán quy luật ứng xử nội tại /cục bộ và đồng nhất hóa. Trong đó việc định nghĩa phần tử đơn vị đặc trưng thực sự cần thiết, nó cho phép mô tả ở cấp độ vi mô các dạng thành phần vật liệu, sự phân bố và ứng xử cơ lý của chúng. Kích thước của RAE cần đủ lớn so với cấp độ xem xét các thành phần hỗn độn để chứa đựng đủ dạng vật liệu cấu thành, nhưng nó cũng cần đủ nhỏ để được coi là miền đặc trưng cho vật liệu nhiều thành phần mà chúng ta đang xem xét đồng thời giảm nhẹ khối lượng tính toán của bài toán quy luật ứng xử cục bộ. Chủ đề xác định kích thước phần tử đơn vị đặc trưng cũng được đề cập nhiều trong các công bố trên thế giới, có thể kể đến các nghiên cứu của Gusev [11], của Lachihab và Sab [12], của Terada và cộng sự [13], của Ostoja-Starzewski [14], của Kanit và cộng sự [15]. Đây cũng chính là mục tiêu cơ bản của nghiên cứu này, cụ thể là sử dụng phương pháp số nhằm phân tích, xác định kích thước tối ưu của phần tử đơn vị đặc trưng (RAE) dùng trong bài toán đồng nhất hóa môi trường vật liệu rỗng kép và tính toán đặc tính thấm có hiệu của nó.

Bài báo được cấu trúc theo các nội dung cụ thể sau: Mục 2 dành để giới thiệu cách thức khởi tạo mô hình lý tưởng hóa của vật liệu rỗng kép xem xét đồng thời xây dựng hệ thống các phương trình cơ bản nhằm xác định độ thấm có hiệu trung bình của môi trường vật liệu đã được mô hình. Sau đó trong mục 3 chúng ta sẽ đưa ra một số ví dụ tính toán số cụ thể kèm theo các đánh giá và bình luận. Cuối cùng, các kết luận và kiến nghị cơ bản rút ra từ nghiên cứu sẽ được trình bày một cách ngắn gọn trong mục 4.

2. KHỞI TẠO CẤU TRÚC VI MÔ VÀ XÁC ĐỊNH ĐỘ THẤM CÓ HIỆU

Vi cấu trúc thực tế của vật liệu rỗng kép là rất phức tạp và việc phân tích ứng xử cơ lý cho mỗi dạng hình học là vô cùng khó. Do vậy trong nghiên cứu này cấu trúc thực tế được lý tưởng hóa thành mô hình cấu trúc gần đúng mà việc khởi tạo ra nó có thể dễ dàng thực hiện nhờ các thuật toán lập trình với sự hỗ trợ của công cụ máy tính điện tử. Ở đây vi cấu trúc của mô hình vật liệu rỗng kép có dạng môi trường hai pha cấu thành tạo nên bởi một hệ thống lỗ rỗng hình elip có kích thước khác nhau chứa đầy nước, được phân bố và định hướng một cách ngẫu nhiên trong chất nền rắn cho phép thấm. Hình 1 dưới đây thể hiện hình ảnh minh họa cho vi cấu trúc mô hình của vật liệu rỗng kép, trong đó hình vuông kích thước ℓ là biểu diễn của phần tử đơn vị đặc trưng (RAE) cho môi trường này.



Hình 1. Mô hình vi cấu trúc của vật liệu rỗng kép và RAE của nó.

Để tiến hành thiết lập các quy luật ứng xử thủy lực nội tại của cấu trúc vật liệu mô hình trước tiên chúng ta gọi Ω là miền tính toán trong phạm vi phần tử đơn vị đặc trưng RAE. Trong đó $\Omega^{(i)} (i = 1,2,\cdots,N)$ là các lỗ rỗng được lấp đầy nước, $\Omega^{(0)}$ là ký hiệu cho phần chất nền không chứa các lỗ rỗng. Đường tiếp xúc giữa pha nền $\Omega^{(0)}$ và pha lỏng thứ-i $\Omega^{(i)}$được ký hiệu bởi $\Gamma^{(i)}$. Toàn bộ miền tính toán Ω này được đặt trong một trường gradient áp suất $\widehat{\mathbf{G}}$ biểu diễn như sau:

$$\hat{p}(\hat{\mathbf{x}}) = -\widehat{\mathbf{G}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \text{ với } \widehat{\mathbf{G}} = (G\cos\theta + G\sin\theta), \tag{1}$$

ở đây θ là góc nghiên tạo bởi vector gradient áp suất và trục tọa độ x; $\hat{p}(\hat{\mathbf{x}})$ là trường áp suất tại điểm $\hat{\mathbf{x}}$.

Trước khi tiến hành phân tích và giải quyết bài toán quy luật ứng xử nội tại, để đơn giản chúng ta thống nhất đưa toàn bộ các đại lượng vật lý trong cơ học chất lỏng vi mô về dưới dạng không thứ nguyên. Để thực hiện được việc này chúng ta lần lươt lựa chọn ℓ, $G\ell^2/\mu$, ℓ^2, G, $G\ell$ trong đó μ là độ nhớt động lực của chất lỏng là thang đo của độ dài, của vận tốc, của độ thấm, của gradient áp suất và của áp suất.

Pha chất nền được giả định là đồng nhất, đẳng hướng và cho phép thấm do vậy dòng chảy chất lỏng lưu chuyển qua nó được miêu tả bằng quy luật Darcy không có thứ nguyên như sau:

$$\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x})=-k\nabla p^{(s)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega^{(0)}, \tag{2}$$

trong đó $\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x})$ và $p^{(s)}(\mathbf{x})$ lần lượt là vận tốc và áp suất không thứ nguyên trong miền chứa pha nền $\Omega^{(0)}$; k đại diện cho hệ số độ thấm không thứ nguyên của chất lỏng.

Dòng chảy chất lỏng bên trong lỗ rỗng được giả định là tuân theo phương trình Stokes không thứ nguyên:

$$\Delta\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x})=\nabla p^{(f)}(\mathbf{x}), \quad \nabla\cdot\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x})=0, \quad \mathbf{x}\in\Omega^{(i)} \tag{3}$$

với $\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x})$ và $p^{(f)}(\mathbf{x})$ là vận tốc và áp suất không thứ nguyên của chất lỏng trong lỗ rỗng $\Omega^{(i)}$.

Vận tốc và áp suất của dòng chất lỏng đi qua mặt tiếp xúc lỏng/rắn $\Gamma^{(i)}$ tuân theo điều kiện chuyển tiếp Beavers–Joseph–Saffman, cụ thể là ba phương trình sau đây:

$$\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})=\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) \ \forall\ \mathbf{x}\in\Gamma^{(i)}, \tag{4}$$

$$[\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x})-\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x})]\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x})=-\lambda\sqrt{k}\left[\boldsymbol{\sigma}^{(f)}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\right]\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x}) \ \forall\ \mathbf{x}\in\Gamma^{(i)}, \tag{5}$$

$$p^{(f)}(\mathbf{x})-p^{(s)}(\mathbf{x})=\mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot\left[\nabla\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x})+\nabla^{\mathrm{T}}\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x})\right]\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) \ \forall\ \mathbf{x}\in\Gamma^{(i)}. \tag{6}$$

Trong đó $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ là vector pháp tuyến với đường cong $\Gamma^{(i)}$, hướng ra ngoài lỗ rỗng; $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ là vector tiếp tuyến đơn vị với $\Gamma^{(i)}$; $\boldsymbol{\sigma}^{(f)}(\mathrm{x})$ là tensor ứng suất của khối chất lỏng trong lỗ rỗng; λ là hệ số trượt bán kinh nghiệm.

Trường vận tốc và áp suất bên trong và bên ngoài lỗ rỗng chính là nghiệm của bài toán quy luật ứng xử nội tại trong nghiên cứu này. Để giải quyết bài toán này chúng ta sử dụng một trong những phương pháp số truyền thống đó là phương pháp phần tử biên (BEM), ở đây chúng ta không đi sâu vào trình bày chi tiết về kỹ thuật triển khai phương pháp này vì có rất nhiều tài liệu liên quan đã được công bố như của Tran và cộng sự [10, 16], của Pozrikidis [17], của Brebbia và Dominiguez [18]. Sau khi xác định được trường nghiệm vận tốc và áp suất của bài toán quy luật ứng xử nội tại trên miền tính toán Ω, chúng ta tiến hành xây dựng mối quan hệ giữa các đại lượng vi mô và vĩ mô từ đó thiết lập quy luật ứng xử tổng thể của môi trường có hiệu bằng phép toán trung bình trên miền tính toán của phần tử đơn vị đặc trưng, cụ thể ứng xử có hiệu được biểu diễn như sau:

$$\mathbf{U}=-\mathbf{K}^{\mathrm{eff}}\nabla P, \tag{7}$$

trong đó

$$\mathbf{K}^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} k^{\text{eff}} & 0 \\ 0 & k^{eff} \end{bmatrix}; \tag{8}$$

$\mathbf{K}^{\text{eff}}$ là tensor độ thấm có hiệu; $\mathbf{U}$ và ∇P là vận tốc và gradient áp suất vĩ mô, hai đại lượng này có mối liên hệ với trường vận tốc và áp suất vi mô bằng hai biểu thức dưới đây:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{S}\int_{\partial\Omega} [\mathbf{u}^{(\text{s})}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})]\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{9}$$

và

$$\nabla P = \frac{1}{S}\int_{\partial\Omega} p^{(\text{s})}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{10}$$

trong đó $\partial\Omega$ là biên ngoài của Ω, $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ là vector pháp tuyến với $\partial\Omega$ có chiều hướng ra ngoài miền Ω, còn S là diện tích của RAE.

Chúng ta quay trở lại để mô tả rõ hơn về nguyên tắc khởi tạo vi cấu trúc của RAE sử dụng trong nghiên cứu này như sau. Gọi L là kích thước không thứ nguyên của RAE sau khi đã chuẩn hóa cho ℓ; a_i và a_i/w_i là kích thước không thứ nguyên của hai bán trục tạo nên lỗ rỗng hình elip thứ-i nằm trong miền RAE với w_i là tỷ lệ hai bán trục; ϕ là hàm lượng (tỷ diện) lỗ rỗng chứa đựng trong miền RAE, nghĩa là:

$$\phi = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N}\frac{\pi a_i^2}{w_i}. \tag{11}$$

Nguyên tắc để tạo ra các lỗ rỗng ngẫu nhiên trước tiên đó là khống chế hàm lượng ϕ, sau đó lựa chọn ngẫu nhiên hai giá trị a_i và w_i trong một khoảng nhất định đảm bảo lỗ rỗng không vượt ra ngoài miền RAE, đồng thời gieo ngẫu nhiên tọa độ trọng tâm và góc xoay của elip nhưng luôn đảm bảo rằng elip được tạo ra nằm gọn trong miền RAE và các elip được tạo ra sau không chồng lấn lên elip trước đó. Với nguyên tắc trên chúng ta biết rằng với một giá trị ϕ nhất định, nếu tăng kích thước L sẽ làm tăng số lượng lỗ rỗng N và ngược lại. Như vậy L phải đủ lớn để chứa đựng đầy đủ các dạng lỗ rỗng được tạo ra nhưng nó cũng phải đủ nhỏ để được coi là phần tử đơn vị đặc trưng và giảm nhẹ khối lượng tính toán. Đây chính là mục tiêu xem xét và phân tích của nghiên cứu này.

Với một RAE có giá trị kích thước L nhất định và M lần thực hiện khởi tạo một cách độc lập vi cấu trúc của vật liệu rỗng kép lý tưởng hóa như hình 1, gọi $(k_1^{\text{eff}}, k_2^{\text{eff}}, \cdots, k_M^{\text{eff}})$ là một tập hợp đại diện cho M giá trị độ thấm có hiệu thu được sau khi thực hiện tính toán trên miền RAE tương ứng với mỗi lần khởi tạo vi cấu trúc. Giá trị độ thấm có hiệu trung bình $\overline{k_M^{\text{eff}}}$ được xác định theo phương pháp Monte-Carlo với biểu thức cụ thể sau:

$$\overline{k_M^{\text{eff}}} = \frac{1}{M}(k_1^{\text{eff}} + k_2^{\text{eff}} + \cdots + k_M^{\text{eff}}), \tag{12}$$

giá trị phương sai tương ứng được tính toán bằng công thức dưới đây

$$\delta_M^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(k_i^{\text{eff}} - \overline{k_M^{\text{eff}}})^2\,. \tag{13}$$

Khi sử dụng phương pháp Monte-Carlo thì sai số tuyệt đối và sai số tương đối của giá trị trung bình thu được sau M lần khởi tạo cấu trúc RAE lượt được xác định bởi hai công thức dưới đây:

$$\epsilon_{abs} = 1.96\frac{\delta_M}{\sqrt{M}} \tag{14}$$

và

$$\epsilon_{rel} = 1.96\frac{\delta_M}{\overline{k_M^{\text{eff}}}\sqrt{M}}. \tag{15}$$

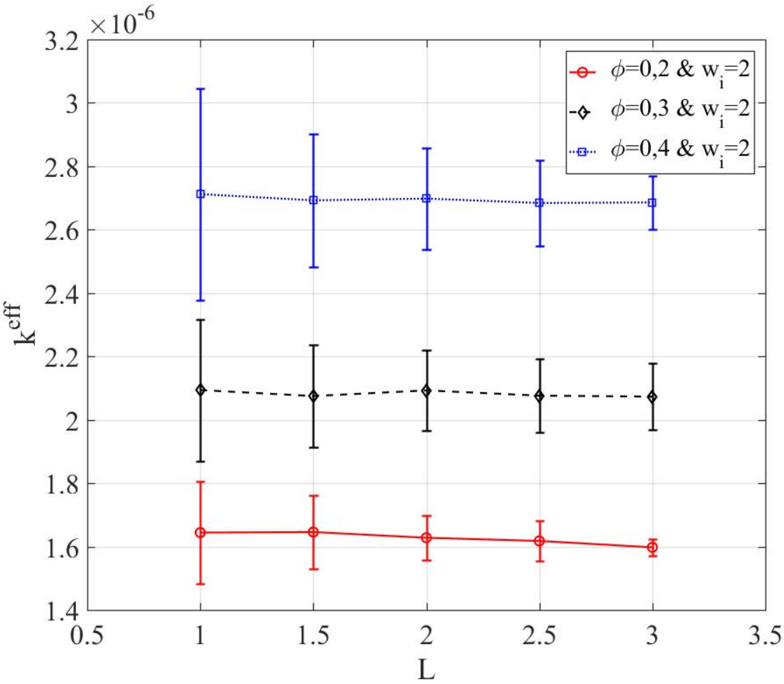
Khi giá trị M đủ lớn thì khả năng giá trị độ thấm có hiệu trung bình $\overline{k_M^{\text{eff}}}$ nằm trong khoảng giá trị $\left[\overline{k_M^{\text{eff}}} - \epsilon_{rel}\overline{k_M^{\text{eff}}}, \overline{k_M^{\text{eff}}} + \epsilon_{rel}\overline{k_M^{\text{eff}}}\ \right]$ chiếm xác suất là 95%.

Trong nghiên cứu này chúng ta sẽ khống chế sai số tương đối ϵ_{rel}^* đầu vào với một giá trị nhất định, cụ thể ở đây là 1%, tiến hành khởi tạo vi cấu trúc của phần tử đơn vị đặc trưng RAE tương ứng với một giá trị L cụ thể. Sau đó sử dụng phương pháp phần tử biên để tính toán giá trị độ thấm có hiệu tương ứng với một trạng thái cấu trúc RAE được khởi tạo. Tiếp theo tính toán giá trị sai số tương đối ϵ_{rel} và so sánh nó với sai số đầu vào ϵ_{rel}^*, nếu lớn hơn thì tiếp tục khởi tạo vi cấu trúc và tính toán độ thấm có hiệu, nếu nhỏ hơn thì xuất kết quả giá trị trung bình độ thấm có hiệu $\overline{k_M^{\text{eff}}}$, số lần khởi tạo vi cấu trúc M và sai số tương ứng.

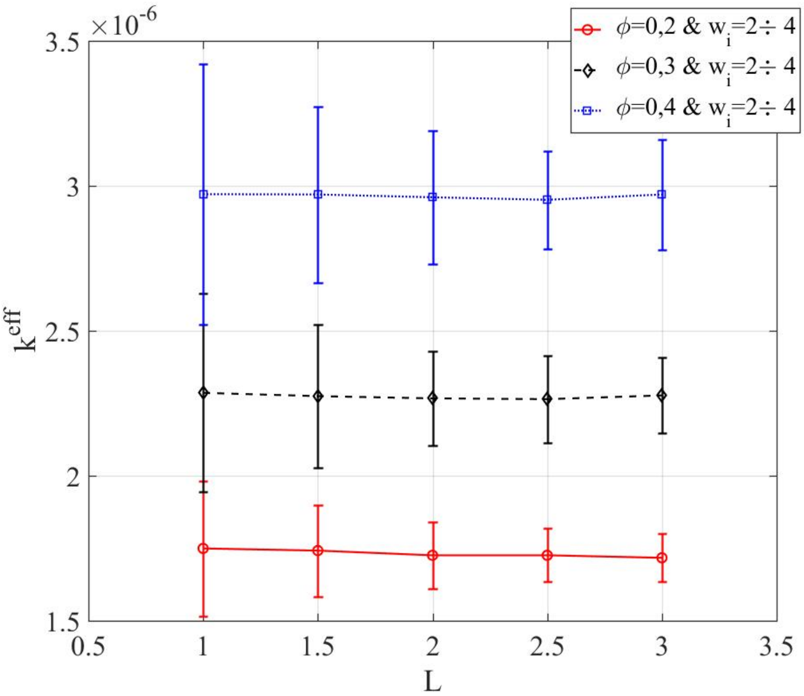
3. GIẢI SỐ VÀ PHÂN TÍCH KẾT QUẢ

Giá trị độ thấm có hiệu của môi trường vật liệu rỗng kép mô phỏng không những phụ thuộc vào đặc tính vật liệu (độ thấm của chất nền, tính chất của chất lỏng) mà còn phụ thuộc vào kích thước L của RAE, hàm lượng lỗ rỗng ϕ, tính bất đẳng hướng của lỗ rỗng (ở đây được đặc trưng bởi tỷ số bán trục w_i). Ở đây chúng ta chỉ tập trung vào phân tích ảnh hưởng của vi cấu trúc được khởi tạo trong RAE đến giá trị độ thấm có hiệu từ đó đưa ra các bình luận liên quan đến kích thước tối ưu của RAE. Để làm rõ vấn đề này, chúng ta xem xét một số ví dụ áp dụng số với các dữ kiện đầu vào biến thiên của L, ϕ và w_i, từ đó phân tích và bình luận ảnh hưởng của nó đến $\overline{k_M^{\text{eff}}}$ và M.

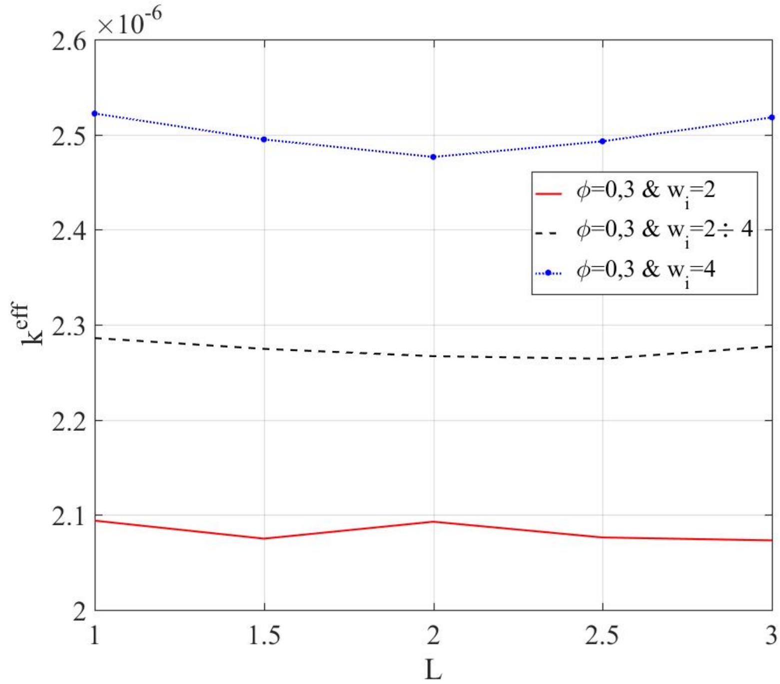
Ở đây chúng ta lựa chọn một số thông số và điều kiện đầu vào cụ thể như sau: Hàm lượng lỗ rỗng $\phi = 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$. Kích thước RAE không thứ nguyên $L = 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3$. Lỗ rỗng hình elip có kích thước bán trục nằm trong khoảng $a_i = 0{,}08 \div 0{,}2$, tỷ số giữa hai bán trục $w_i = 2 \div 4$. Trong đó chúng ta chia làm 3 trường hợp cụ thể đó là: (i) Trường hợp thứ nhất cấu trúc vi mô chỉ chứa các lỗ rỗng có tỷ số bán trục cố định bằng 2; (ii) Trường hợp thứ hai cấu trúc vi mô có chứa các lỗ rỗng có tỷ số bán trục biến thiên ngẫu nhiên từ 2 đến 4; Trường hợp thứ ba cấu trúc vi mô chỉ chứa các lỗ rỗng có tỷ số bán trục cố định bằng 4), lưu ý rằng kích thước của bán trục được lấy ngẫu nhiên trong các khoảng nêu trên. Để giải bài toán đồng nhất hóa thì cần áp vào phần tử đơn vị đặc trưng RAE một điều kiện biên nhất định, ở đây chúng ta chọn grandient áp suất không đổi có giá trị $\mathbf{G}^0 = (1{,}0)$.



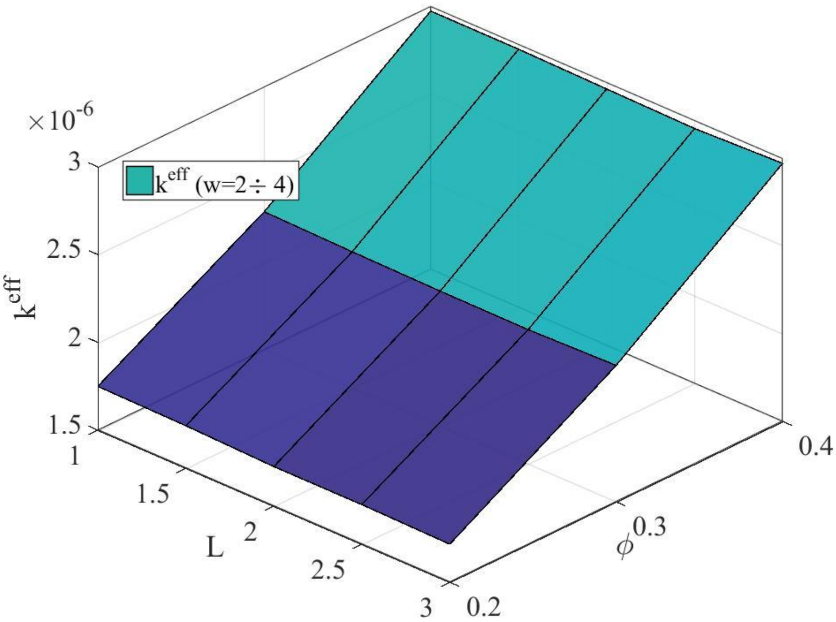
Hình 2. Biến thiên độ thấm có hiệu trung bình, phương sai tương ứng theo kích thước RAE trong trường hợp tỷ số bán trục ấn định $w_i = 2$ và hàm lượng lỗ rỗng lần lượt là $\phi = 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$.



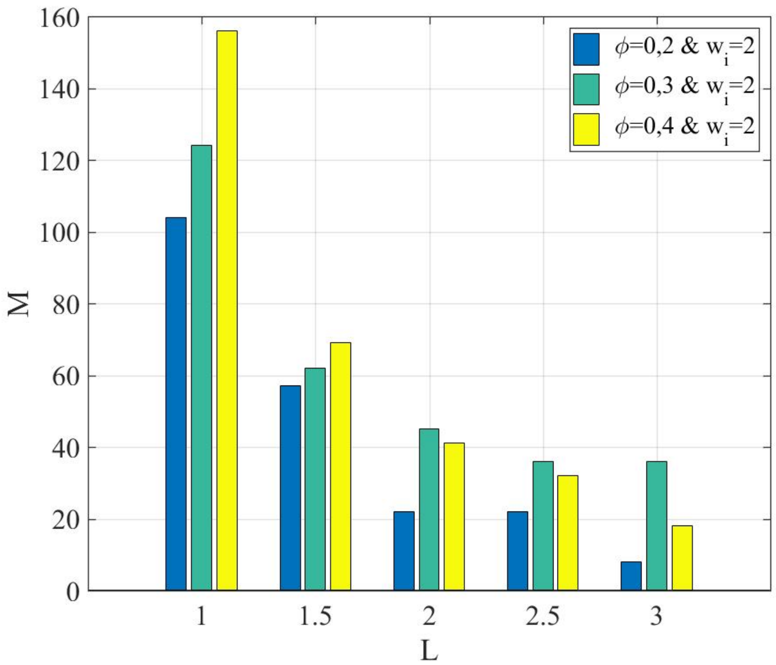
Hình 3. Biến thiên độ thấm có hiệu trung bình, phương sai tương ứng theo kích thước RAE trong trường hợp tỷ số bán trục biến thiên $w_i = 2 \div 4$ và hàm lượng lỗ rỗng lần lượt là $\phi = 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$.



Hình 4. Biến thiên độ thấm có hiệu trung bình theo kích thước RAE trong trường hợp hàm lượng lỗ rỗng ϕ cùng là 0,3 và tỷ số bán trục thay đổi.



Hình 5. Biến thiên độ thấm có hiệu trung bình theo sự biến thiên của kích thước RAE và hàm lượng lỗ rỗng khi tỷ số bán trục biến thiên trong khoảng $w_i = 2 \div 4$.

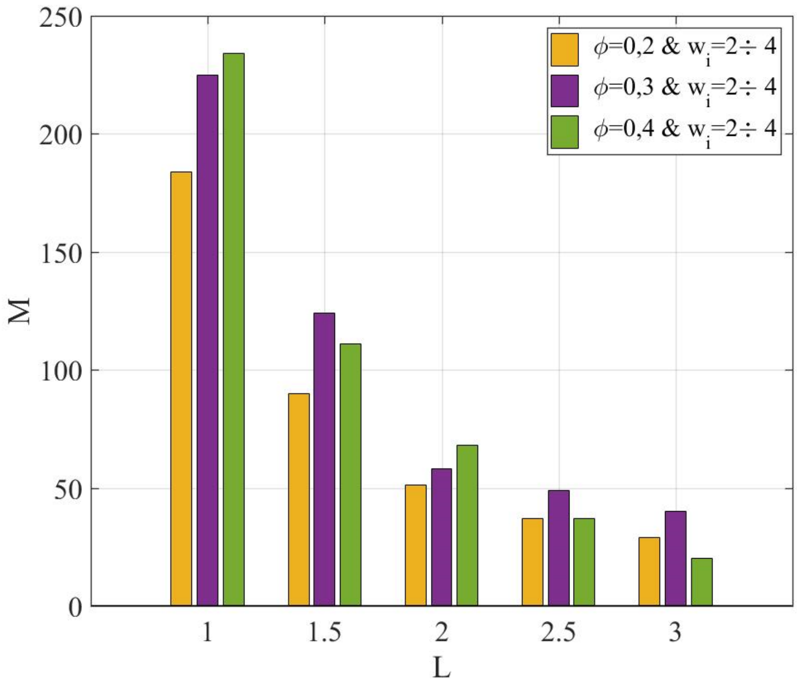


Hình 6. Biến thiên số lần khởi tạo cấu trúc vi mô theo sự biến thiên kích thước RAE trong trường hợp tỷ số bán trục ấn định $w_i = 2$ và hàm lượng lỗ rỗng lần lượt là $\phi = 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$.

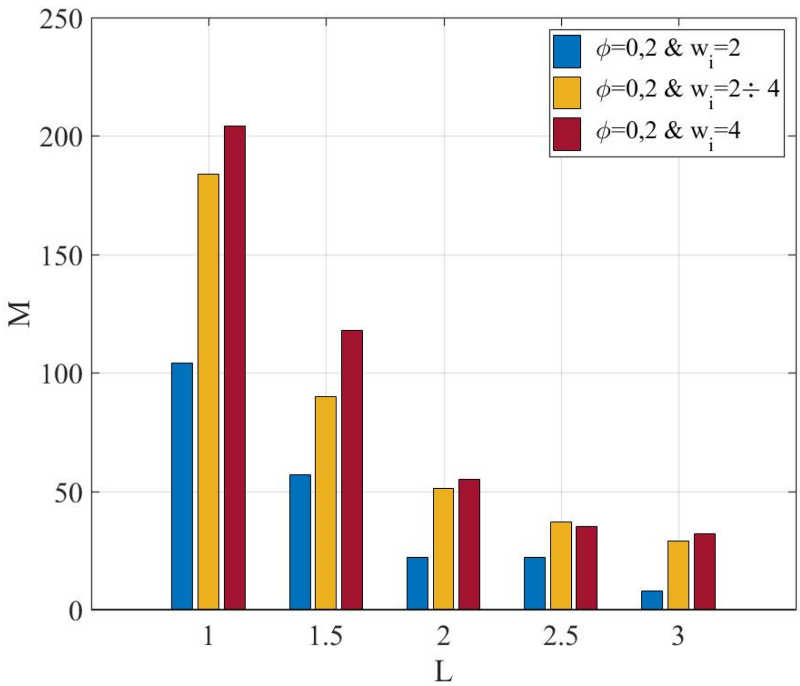
Hình 2, 3 biểu diễn sự biến thiên giá trị độ thấm có hiệu trung bình $\overline{k_M^{\text{eff}}}$ và phương sai tương ứng của nó theo sự thay đổi của kích thước phần tử đơn vị đặc trưng RAE. Chúng ta có thể rút ra một số nhận định tổng quan như sau: (i) Độ thấm có hiệu trung bình về cơ bản là ổn định khi kích thước L của RAE tăng lên; (ii) Phương sai nhỏ khi kích thước L của RAE tăng, như vậy kích thước L đủ lớn thì giá trị độ thấm có hiệu trung bình đủ đại diện cho độ thấm có hiệu của vật liệu rỗng kép xem xét, với $L = 3$ có thể sử dụng RAE tương ứng làm đại diện cho vật liệu xem xét, khi đó giá trị độ thấm có hiệu trung bình có tính hội tụ cao; (iii) Khi hàm lượng lỗ rỗng càng lớn thì độ thấm có hiệu của vật liệu rỗng kép càng tăng, điều này hoàn toàn hợp lý về mặt lý thuyết.

Hình 4 là sự so sánh giá trị độ thấm có hiệu trung bình khi hàm lượng lỗ rỗng là không đổi $\phi = 0{,}3$ cho các trường hợp tỷ số bán trục khác nhau. Thông qua sự so sánh này chúng ta có thể rút ra một nhận định đó là khi tỷ số bán trục càng lớn thì độ thấm có hiệu của vật liệu càng tăng, như vậy lỗ rỗng càng có tính dị hướng thì càng làm tăng độ thấm tổng thể của vật liệu.

Hình 5 là biểu diễn 3 chiều giữa sự biến thiên độ thấm có hiệu trung bình so với sự thay đổi của kích thước RAE và mật độ lỗ rỗng, biểu đồ này nhằm khẳng định rõ hơn về tính đồng biến của độ thấm có hiệu so với hàm lượng lỗ rỗng, trong khi đó nó hầu như ổn định khi kích thước RAE biến đổi trong khoảng từ 1 đến 3, khẳng định tính hội tụ của giá trị độ thấm tổng thể của vật liệu lý tưởng hóa.



Hình 7. Biến thiên số lần khởi tạo cấu trúc vi mô theo sự biến thiên kích thước RAE trong trường hợp tỷ số bán trục biến thiên trong khoảng $w_i = 2 \div 4$ và hàm lượng lỗ rỗng lần lượt là $\phi = 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$.



Hình 8. Biến thiên số lần khởi tạo cấu trúc vi mô theo sự biến thiên kích thước RAE trong 3 trường hợp: Hàm lượng lỗ rỗng không đổi $\phi = 0{,}2$ và tỷ số bán trục (i) $w_i = 2$, (ii) $w_i = 2 \div 4$, $w_i = 4$.

Trên hình 6 và 7 chúng ta biểu diễn mối quan hệ giữa số lần khởi tạo cấu trúc vi mô cần thiết để độ thấm có hiệu trung bình đạt được sai số nhỏ hơn 1% tương ứng với từng giá trị cụ thể của kích thước *L*. Qua các biểu đồ nói trên chúng ta nhận thấy rằng số lần khởi tạo cần thiết giảm đi khi tăng kích thước RAE, điều đó có nghĩa rằng khi kích thước RAE càng lớn nó càng có tính đại diện cho vật liệu rỗng kép đang xem xét đồng thời số lần cần tính toán giám đi. Qua so sánh giá trị biểu đồ ở hai hình nói trên chúng ta nhận thấy rằng khi hình dạng lỗ rỗng càng có tính dị hướng thì về cơ bản càng cần tăng kích thước RAE mới có thể sử dụng làm phần tử đơn vị đặc trưng.

Hình 8 là hình ảnh biểu diễn sự biến thiên độ thấm có hiệu trung bình theo sự thay đổi của kích thước RAE cho 3 trường hợp tỷ số bán trục khác nhau với cùng một mật độ lỗ rỗng, qua đó chúng ta thấy rằng với cấu trúc vi mô mà lỗ rỗng càng có tính dị hướng thì số lần cần thiết phải khởi tạo cấu trúc càng nhiều để đạt được giá trị độ thấm trung bình có sai số tương đối nhỏ, hay nói cách khác khi lỗ rỗng có tính dị hướng cao thì đòi hỏi cần phải thực hiện nhiều mẫu khởi tạo cấu trúc mới có thể đạt được giá trị độ thấm tổng thể có độ chính xác cao.

4. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này trình bày phương pháp lý tưởng hóa vi cấu trúc phần tử đơn vị đặc trưng RAE của vật liệu rỗng kép bằng một mô hình gần đúng, mô hình này có dạng vật liệu hai thành phần tạo nên bởi một pha nền đồng nhất, đẳng hướng, cho phép thấm và pha hạt dạng lỗ rỗng hình elip lấp đầy nước với kích thước bất kỳ và được phân bố một cách ngẫu nhiên trong môi trường chất nền. Trên nền tảng ứng dụng phương pháp phần tử biên, độ thấm có hiệu đặc trưng cho tính thấm tổng thể của mỗi dạng khởi tạo vi cấu trúc RAE được xác định. Giá trị trung bình của độ thấm có hiệu được tính toán từ tập hợp các giá trị độ thấm có hiệu bằng cách áp dụng phương pháp Monte-Carlo. Trên cơ sở sai số tương đối của độ thấm có hiệu trung bình và số lần cần thiết phải khởi tạo cấu trúc vi mô ảo chúng ta đưa ra các phân tích, bình luận, cơ sở để xác định kích thước RAE tối ưu phục vụ cho việc giải quyết bài toán đồng nhất hóa.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường đại học Giao thông vận tải (ĐH GTVT) trong đề tài mã số T2025-CT-011.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. K. Vafai, Handbook of Porous Media, FL: CRC Press, Boca Raton, 2015.

[2] J. L. Auriault, E. Sanchez-Palencia, Etude du comportement macroscopique d’un milieu poreux saturé déformable, J. Mecanique, 16 (1977) 575-603.

[3] E. Sanchez-Palencia, Non-homogeneous media and vibration theory, Lecture Notes in Physics, 127 (1981). https://doi.org/10.1007/3-540-10000-8

[4] S. Whittaker, Diffusion and dispersion in porous media, AlchE J., 13 (1967) 420-432. https://doi.org/10.1002/aic.690130308

[5] F. Alcocer, P. Singh, Permeability of periodic porous media, Phys. Rev. E, 59 (1999) 771. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.59.711

[6] F. Alcocer, P. Singh, Permeability of periodic arrays of cylinders for viscoelastic flows, Phys. Fluids, 14 (2002) 2578-2581. https://doi.org/10.1063/1.1483301

[7] V. Monchiet, G. Bonnet, G. Lauriat, A fft-based method to compute the permeability induced by a stokes slip flow through a porous medium, C. R. Mécanique, 337 (2009) 192-197. https://doi.org/10.1016/j.crme.2009.04.003

[8]. A. T. Tran, H. Le Quang, Q. C. He, D. H. Nguyen, Determination of the effective permeability of doubly porous materials by a two-scale homogenization approach, Transp. Porous Media, 145 (2022) 197–243. https://doi.org/10.1007/s11242-022-01846-9

[9]. A. T. Tran, H. Le Quang, Q. C. He, D. H. Nguyen, Micromechanical estimates for the effective permeability of 2D porous materials with arbitrarily shaped pores, J. Porous Media, 26 (2023) 57–77. 10.1615/JPorMedia.2022043450

[10]. A. T. Tran, H. Le Quang, D. H. Nguyen, V. H. Hoang, T. A. Do, Q. C. He, Combining the micromechanical approach and boundary element method for estimating the effective permeability of 2D porous materials with arbitrarily shaped pores, Comput. Mech., 75 (2025) 171–183. https://doi.org/10.1007/s00466-024-02498-w

[11]. A. A. Gusev, Representative volume element size for elastic composites: A numerical study, J. Mech. Phys. Solids, 45 (1997) 1449–1459. https://doi.org/10.1016/S0022-5096(97)00016-1

[12]. A. Lachihab, K. Sab, Does a representative volume element exist for fatigue life prediction? The case of aggregate composites, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., 32 (2008) 1005–1021. https://doi.org/10.1002/nag.655

[13]. K. Terada, T. Ito, N. Kikuchi, Characterization of the mechanical behavior of solid-fluid mixture by the homogenization method, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 153 (1998) 223–257. 10.1016/S0045-7825(97)00071-6

[14]. M. Ostoja-Starzewski, Random field models of heterogeneous materials, Int. J. Solids Struct., 35 (1998) 2429–2455. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00144-3

[15]. T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, D. Jeulin, Determination of the size of the reperentative volume element for random composites: statistical and numerical approach, Int. J. Solids Struct., 40 (2003) 3647–3679. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00143-4

[16]. A. T. Tran, H. Le Quang, Q. C. He, D. H. Nguyen, Mathematical modeling and numerical computation of the effective interfacial conditions for Stokes flow on an arbitrarily rough solid surface, Appl. Math. Mech. -Engl. Ed., 42 (2021) 721–746. https://doi.org/10.1007/s10483-021-2733-9

[17]. C. Pozrikidis, Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[18]. C. A. Brebbia, J. Dominguez, Boundary elements An introductory course, WIT Press/Computational Mechanics Publications, Southamton, 1992.