



BENDING AND BUCKLING RESPONSES OF NANOPLATES UNDER THE COMPRESSTION A PART OF EDGES

Le Truong Son^{1*}, Van Minh Chinh²

¹Faculty of Mechanical Engineering, Le Quy Don Technical University, Hoang Quoc Viet Street, Hanoi, Vietnam

²Graduate University of Science and Technology, Vietnam Academy of Science and Technology, Hoang Quoc Viet Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 27/11/2024

Revised: 04/12/2024

Accepted: 10/12/2024

Published online: 15/12/2024

<https://doi.org/10.47869/tcsj.75.9.5>

* *Corresponding author*

Email: letruongson01@gmail.com

Abstract. Currently, nanoplates composed of materials exhibiting unique properties (flexomagnetic and flexoelectric effects) are widely utilized in the production of sensors, microcircuits, and advanced compact electronics. Consequently, investigating the mechanical reaction of nanoplates is imperative, as it will substantially enhance design optimization and practical efficiency. This research integrates the novel shear deformation theory with the finite element method to investigate the static bending and buckling behavior of nanoplates supported by a variable elastic foundation affected by the flexomagnetic effect. This study differs from other research in that the compressive force is applied only to a specific part of the plate's edge rather than its entire length. The convergence and reliability of this study are assessed by comparing it with published results. The research presents survey data about the impact of geometric factors, materials, boundary conditions, duration of load application, and elastic basis on bending displacement and critical buckling load of nanoplates.

Keywords: static bending, buckling, nanoplates, flexomagnetic.

@ 2024 University of Transport and Communications



ĐÁP ỨNG UỐN VÀ ỔN ĐỊNH CỦA TẤM NANO CHỊU NÉN TRÊN MỘT ĐOẠN CHIỀU DÀI CẠNH

Lê Trường Sơn^{1*}, Văn Minh Chính²

¹Bộ môn Cơ học vật rắn, Khoa Cơ khí, Học viện KTQS, Hoàng Quốc Việt, Hà Nội, Việt Nam

²Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, Hoàng Quốc Việt, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 27/11/2024

Ngày nhận bài sửa: 04/12/2024

Ngày chấp nhận đăng: 10/12/2024

Ngày xuất bản Online: 15/12/2024

<https://doi.org/10.47869/tcsj.75.9.5>

* Tác giả liên hệ

Email: letruongson01@gmail.com

Tóm tắt: Ngày nay, các tấm nano làm từ vật liệu có một số hiệu ứng đặc biệt (hiệu ứng flexomagnetic, flexoelectric) ngày càng được sử dụng phổ biến để chế tạo các cảm biến, các vi mạch hoặc các thiết bị cỡ nhỏ công nghệ cao. Do vậy, việc nghiên cứu tìm ra đáp ứng cơ học của các tấm nano là một yêu cầu cấp thiết, vì điều này sẽ góp phần quan trọng trong việc tối ưu hóa thiết kế và nâng cao hiệu quả sử dụng chúng trong thực tế. Bài báo này đã kết hợp giữa lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới và phương pháp phần tử hữu hạn để trình bày nghiên cứu đáp ứng uốn tĩnh và ổn định của tấm nano tựa trên nền đàn hồi biến đổi chịu ảnh hưởng của hiệu ứng flexomagnetic, điều khác biệt của nghiên cứu này so với các nghiên cứu đã có là lực nén không tác dụng lên toàn bộ chiều dài cạnh tấm mà chỉ tác dụng lên một đoạn nhất định. Sự hội tụ và độ tin cậy của bài báo này được kiểm tra thông qua sự so sánh với các kết quả đã công bố. Bài báo cũng đưa ra các số liệu khảo sát ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu, điều kiện biên, chiều dài tác dụng của tải trọng và nền đàn hồi đến chuyển vị uốn và tải tới hạn của tấm nano.

Từ khóa: uốn tĩnh, ổn định, tấm nano, flexomagnetic.

@ 2024 University of Transport and Communications

1. MỞ ĐẦU

Cùng với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, ngành công nghệ vật liệu đã và đang phát minh ra những loại vật liệu mới có khả năng đáp ứng được khả năng làm việc trong những môi trường đặc biệt, một trong số đó là vật liệu có hiệu ứng flexomagnetic, và hiệu ứng này cũng chỉ phát huy tác dụng khi kết cấu ở kích thước nhỏ cỡ nano mét. Việc tính toán để tìm ra đáp ứng cơ học của các kết cấu làm bằng vật liệu có hiệu ứng flexomagnetic cũng đã được sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học. Thom và các cộng sự [1] sử dụng phương pháp giải tích để chỉ ra ảnh hưởng của hiệu ứng flexomagnetic, nhiệt độ và độ ẩm đến đáp ứng uốn tĩnh, dao động riêng và dao động cưỡng bức của tấm nano tựa trên nền đàn hồi, điểm thú vị của nghiên cứu này là chỉ rõ liên hệ giữa các đáp ứng này với tham số cản nhớt của nền. Chính và nhóm nghiên cứu [2] đã dựa trên lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới để phân tích đáp ứng uốn và ổn định của tấm nano tựa trên nền đàn hồi có kể đến hiệu ứng flexomagnetic, các tác giả đã chỉ ra ảnh hưởng của điều kiện biên đến chuyển vị, sự phân bố ứng suất cũng như tải tới hạn của tấm nano. Lời giải Navier đã được Zhang cùng các đồng nghiệp [3] áp dụng để chỉ ra ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước nhỏ đến chuyển vị, tần số dao động riêng và tải tới hạn của tấm nano chịu liên kết tựa đơn và có kể đến hiệu ứng flexomagnetic. Momeni-Khabisi và Tahani [4] đã sử dụng lời giải chính xác để phân tích đáp ứng ổn định tuyến tính và ổn định phi tuyến của tấm nano nhiều lớp có kể đến hiệu ứng áp điện và flexomagnetic, các công thức tính toán được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và tấm có nhiều điều kiện biên khác nhau. Malikan và Eremeyev [5] đã dựa trên lý thuyết dầm cổ điển để nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt và hiệu ứng flexomagnetic đến đáp ứng uốn phi tuyến của dầm nano, và các tác giả đã sử dụng lý thuyết biến thiên biến dạng và phương pháp cầu phương vi phân để giải quyết bài toán đặt ra. Lý thuyết dầm cổ điển cũng được Bình và đồng nghiệp [6] sử dụng kết hợp với phương pháp giải tích để chỉ rõ đáp ứng dao động của dầm nano chịu tải trọng ngẫu nhiên trong môi trường nhiệt ẩm. Bằng việc sử dụng phân tử chữ nhật, Tiến cùng nhóm nghiên cứu [7]-[8] đã phân tích đáp ứng dao động tự do, uốn tĩnh và ổn định của tấm nano có kể đến hiệu ứng kích thước nhỏ. Trên cơ sở các nghiên cứu đã có, chúng ta nhận thấy đáp ứng uốn và ổn định của tấm nano tựa trên nền đàn hồi và lực nén tác dụng một đoạn chiều dài cạnh tấm là vấn đề nghiên cứu có nhiều điểm cần khám phá, và vì vậy, đây cũng chính là chủ đề mà bài báo này làm sáng tỏ.

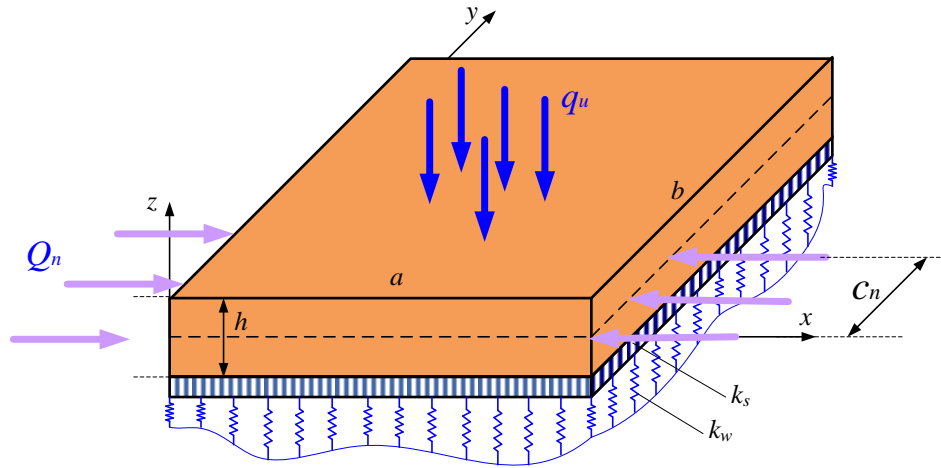
2. CÔNG THỨC TÍNH TOÁN

Trên hình 1 thể hiện mô hình tấm nano tựa trên nền đàn hồi hai hệ số (k_w và k_s). Tấm nano có các cạnh lần lượt là a và b , chiều dày tấm h , mặt phẳng Oxy nằm tại mặt giữa của tấm nano, trục Oz vuông góc với mặt phẳng tấm. Tấm chịu nén trên hai cạnh đối diện, chiều dài của đoạn chịu nén là c_n .

Bài báo này xuất phát từ lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới [9], trường chuyển vị của tấm gồm ba thành phần có biểu thức:

$$\Theta_x = -z \frac{\partial \Theta_b}{\partial x} - g_z \frac{\partial \Theta_s}{\partial x}; \quad \Theta_y = -z \frac{\partial \Theta_b}{\partial y} - g_z \frac{\partial \Theta_s}{\partial y}; \quad \Theta_z = \Theta_b + \Theta_s \quad (1)$$

trong đó Θ_x , Θ_y và Θ_z lần lượt là chuyển vị dọc theo trục Ox , Oy , và Oz , còn hàm $g_z = z - \mathcal{G}_z$, $\mathcal{G}_z = h \cdot \sin \frac{z}{h} - z \cdot \cosh \frac{1}{2}$. Tại mỗi điểm, các biến dạng có biểu thức:



Hình 1. Tấm nano chịu nén trên một đoạn có chiều dài c_n .

$$\alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 \Theta_b}{\partial x^2} - g_z \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 \Theta_b}{\partial y^2} - g_z \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial y^2} \\ -z \frac{\partial^2 \Theta_b}{\partial x \partial y} - 2g_z \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = z \underbrace{\begin{Bmatrix} \alpha_{bx} \\ \alpha_{by} \\ \alpha_{bxy} \end{Bmatrix}}_{\epsilon_b} + g_z \underbrace{\begin{Bmatrix} \alpha_{sx} \\ \alpha_{sy} \\ \alpha_{sxy} \end{Bmatrix}}_{\epsilon_s};$$

$$\beta = \{\beta_{xz}, \beta_{yz}\} = (1 - \partial g_z / \partial z) \left\{ \partial^2 \Theta_s / \partial x^2, \partial^2 \Theta_s / \partial y^2 \right\} = (1 - \partial g_z / \partial z) \beta_0 \quad (2)$$

Do có kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexomagnetic, nên bài báo cần tính đến các biến thiên biến dạng:

$$\eta = \begin{Bmatrix} \eta_{xxz} = -\frac{\partial^2 \Theta_b}{\partial x^2} - \frac{\partial g_z}{\partial z} \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial x^2} \\ \eta_{yyz} = -\frac{\partial^2 \Theta_b}{\partial y^2} - \frac{\partial g_z}{\partial z} \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \Theta_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \Theta_b}{\partial y^2} \end{Bmatrix} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = \eta_b + \frac{\partial g_z}{\partial z} \eta_s \quad (3)$$

Hiệu ứng flexomagnetic làm cho sự liên hệ giữa các thành phần ứng suất và biến dạng có sự ràng buộc cả các yếu tố cơ và từ như sau:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \alpha_{kl} - q_{kij} H_k; \Xi_{ijm} = -k_{kijm} H_k; R_i^0 = c_{ijk} \alpha_{jk} + d_{ij} H_k + k_{ijkl} \eta_{jkl} \quad (4)$$

với c_{ijkl} , q_{kij} , f_{kijm} và d_{ij} là các tham số đàn hồi, tham số điện từ, hệ số flexomagnetic và hệ số từ thẩm. R_i^0 là từ thông, và Ξ_{ijm} mô men bậc cao. Đến đây, biểu thức (4) có dạng tường minh:

$$\sigma = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} - q_{31} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} H_z = C_b \alpha - H; \tau = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{66} & 0 \\ 0 & c_{66} \end{bmatrix} \beta = C_s \beta \quad (5)$$

$$\underline{\Xi} = \begin{Bmatrix} \Xi_{xxz} \\ \Xi_{yyz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{14} & 0 \\ 0 & t_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{xxz} \\ \eta_{yyz} \end{Bmatrix} - k_{14} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} H_z; \quad (6)$$

$$R_z^0 = q_{31}(\alpha_{xx} + \alpha_{yy}) + d_{33}H_z + k_{14}(\eta_{xxz} + \eta_{yyz})$$

với k_{14} là hệ số flexomagnetic và t_{14} được tính theo biểu thức $t_{14} = t_3 + 2t_4$:

$$t_3 = \frac{8}{3}t_2 + \frac{2}{5}t_5; t_4 = \frac{\mu}{3}(l_1^2 + 6l_2^2); t_2 = \frac{\mu}{30}(27l_0^2 - 4l_1^2 - 15l_2^2); t_5 = \frac{\mu}{3}(l_1^2 - 3l_2^2) \quad (7)$$

với μ là hằng số Lamé, l_i ($i=0,1,2$) là các tham số vật liệu. Tiếp theo, cần xác định biểu thức từ trường H_z , trong trường hợp bỏ qua từ trường ngoài, từ các ràng buộc: $\frac{\partial R_z^0}{\partial z} = 0$ và $R_z^0|_{z=h/2} = 0, R_z^0|_{z=-h/2} = 0$, biểu thức của từ trường có dạng:

$$H_z = \frac{q_{31}}{d_{33}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Theta_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_b}{\partial y^2} \right) z + g_z \left(\frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{k_{14}}{d_{33}} \frac{\partial g_z}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial y^2} \right) + \frac{k_{14}}{d_{33}} \left(\frac{\partial^2 \Theta_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_b}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

Phương pháp phần tử hữu hạn được bài báo sử dụng để giải quyết bài toán đặt ra, sử dụng phần tử tám phẳng bốn nút, số bậc tự do của phần tử có dạng:

$$\mathbf{n}_e = \sum_{i=1}^4 \left\{ \Theta_{bi}, \Theta_{si}, \frac{\partial \Theta_{bi}}{\partial x}, \frac{\partial \Theta_{si}}{\partial x}, \frac{\partial \Theta_{bi}}{\partial y}, \frac{\partial \Theta_{si}}{\partial y} \right\}^T \quad (9)$$

Hàm nội suy Hermit được sử dụng để nội suy như sau:

$$\{\Theta_b, \Theta_s\} = \sum_{i=1}^4 \left\{ H_i \{\Theta_{bi}, \Theta_{si}\} + H_{i+1} \left\{ \frac{\partial \Theta_{bi}}{\partial x}, \frac{\partial \Theta_{si}}{\partial x} \right\} + H_{i+2} \left\{ \frac{\partial \Theta_{bi}}{\partial y}, \frac{\partial \Theta_{si}}{\partial y} \right\} \right\} = \{\mathbf{H}_b, \mathbf{H}_s\} \mathbf{n}_e \quad (10)$$

với H_i là các hàm Hermit [10]. Lúc này, các thành phần biến dạng (2)-(3) được viết lại:

$$\alpha_b = \mathbf{A}_1 \mathbf{n}_e; \alpha_s = \mathbf{A}_2 \mathbf{n}_e; \beta_0 = \mathbf{A}_3 \mathbf{n}_e; \eta_b = \mathbf{A}_4 \mathbf{n}_e; \eta_s = \mathbf{A}_5 \mathbf{n}_e \quad (11)$$

với \mathbf{A}_i ($i=1-5$) là các ma trận thu được từ đạo hàm của các hàm dạng.

Biến phân thế năng của phần tử tám có kể đến ảnh hưởng của nền đàn hồi:

$$\begin{aligned} \delta U_e = & \int_{V_e} (\delta \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\tau} + \delta \boldsymbol{\eta}^T \underline{\Xi} - \delta R_z^0 H_z) dV + \int_{S_e} \left(\begin{aligned} & k_w \left(1 - k_{bd} \sin\left(\frac{x}{a}\right) \right) \left(1 - k_{bd} \sin\left(\frac{y}{b}\right) \right) \delta \Theta_z \Theta_z \\ & + k_s \left(\frac{\partial \Theta_z}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \Theta_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Theta_z}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \Theta_z}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \right) dx dy \quad (12) \\ = & \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{K}_e^P + \mathbf{K}_e^F) \mathbf{n}_e \end{aligned}$$

với k_w và k_s là hai đặc trưng độ cứng của nền đàn hồi, k_{bd} là hệ số mô tả sự biến đổi độ cứng nền, và $\mathbf{K}_e^P, \mathbf{K}_e^F$ là ma trận độ cứng của phần tử tám nano và ma trận độ cứng do nền, ma trận \mathbf{K}_e^P độ cứng của tấm nano được chỉ ra trong tài liệu [11], và \mathbf{K}_e^F được tính toán như sau:

$$\mathbf{K}_e^F = \int_{S_e} \left(\begin{array}{l} k_w \left(1 - k_{bd} \sin\left(\frac{x}{a}\right) \right) \left(1 - k_{bd} \sin\left(\frac{y}{b}\right) \right) (\mathbf{H}_b + \mathbf{H}_s)^T (\mathbf{H}_b + \mathbf{H}_s) \\ + k_s \left(\frac{\partial(\mathbf{H}_b + \mathbf{H}_s)^T}{\partial x} \frac{\partial(\mathbf{H}_b + \mathbf{H}_s)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{H}_b + \mathbf{H}_s)^T}{\partial y} \frac{\partial(\mathbf{H}_b + \mathbf{H}_s)}{\partial y} \right) \end{array} \right) dx dy \quad (13)$$

Biên phân công của ngoại lực nén tác dụng lên tấm nano :

$$\delta \Pi_e^n = \int_0^{y_e} \int_0^{x_e} \left(\frac{\partial \Theta_z}{\partial x} Q_n \delta \left(\frac{\partial \Theta_z}{\partial x} \right) \right) dx dy = \delta \mathbf{n}_e^T \int_0^{y_e} \int_0^{x_e} \left(\frac{\partial(\mathbf{H}_b + \mathbf{H}_s)^T}{\partial x} Q_n \frac{\partial(\mathbf{H}_b + \mathbf{H}_s)}{\partial x} \right) dx dy = \delta \mathbf{n}_e^T Q_n \mathbf{K}_e^n \mathbf{n}_e \quad (14)$$

$$\text{với } y_e \leq c, x_e \leq a, \quad \mathbf{K}_e^n = \int_0^{y_e} \int_0^{x_e} \left(\frac{\partial(\mathbf{H}_b + \mathbf{H}_s)^T}{\partial x} Q_n \frac{\partial(\mathbf{H}_b + \mathbf{H}_s)}{\partial x} \right) dx dy \quad (15)$$

Biên phân công của ngoại lực tác dụng vuông góc với mặt phẳng tấm nano :

$$\delta \Pi_e^u = \int_{S_e} \Theta_z^T q_u dS = \delta \mathbf{n}_e^T \int_{S_e} (\mathbf{H}_b + \mathbf{H}_s)^T q_u dS = \delta \mathbf{n}_e^T \mathbf{Q}_e \quad (16)$$

$$\text{Tấm nano cân bằng thì} \quad \sum_e (\delta U_e - \delta \Pi_e^n - \delta \Pi_e^u) = 0 \quad (17)$$

Đối với bài toán uốn, phương trình cân bằng của tấm nano có dạng

$$\sum_e (\mathbf{K}_e^P + \mathbf{K}_e^F - Q_n \mathbf{K}_e^n) \mathbf{n}_e = \sum_e \mathbf{Q}_e \quad (18)$$

Đối với bài toán ổn định tĩnh, phương trình cân bằng của tấm nano có dạng

$$\sum_e (\mathbf{K}_e^P + \mathbf{K}_e^F - Q_n \mathbf{K}_e^n) \mathbf{n}_e = 0 \quad (19)$$

Chuyển vị uốn của tấm nano nhận được từ việc giải phương trình (18), còn tải tới hạn trong bài toán ổn định được rút ra từ phương trình (19).

3. VÍ DỤ KIỂM CHỨNG

Xét tấm có các tham số hình học $a = b$, $h = a/10$ và $h = a/20$, tải trọng tác dụng lên tấm $q_u = Q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$, trong đó Q_0 là giá trị cực đại. Tấm làm từ vật liệu có $E = 117$

GPa, hệ số Poisson 0.33. Tấm tựa trên nền đàn hồi: $K_w^* = \frac{k_w a^4}{B_0}$, $K_s^* = \frac{k_s a^2}{B_0}$, trong đó

$$B_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \text{ Chuyển vị tại giữa tấm: } c_v = \frac{10^3 B_0}{Q_0 a^4} \Theta_z \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right). \text{ Sự hội tụ kết quả tính toán kèm}$$

theo các số liệu đã công bố trong các tài liệu [11]-[12] được chỉ ra trong bảng 1. Các tác giả nhận thấy rằng kết quả của bài báo tiến sát tới các kết quả giải tích [11]-[12] khi lưới chia tăng lên, với lưới chia tấm thành 100 phần tử thì kết quả tính toán có độ chính xác phù hợp, và lưới chia này của tấm sẽ được sử dụng trong phần tiếp theo của bài báo này.

Bảng 1. Khảo sát sự hội tụ và so sánh chuyển vị lớn nhất của tấm vuông.

(K_w^*, K_s^*)	Bài báo				Tài liệu	Tài liệu
	16 phần tử	64 phần tử	100 phần tử	196 phần tử	[12]	[13]
$a/h=10$						
$(10^2, 0)$	0,2122	0,2136	0,2272	0,2166	0,2154	0,2145
$(0, 10^2)$	0,0426	0,0427	0,0452	0,0430	0,0428	0,0427
$(10^2, 10^2)$	0,0409	0,0409	0,0433	0,0412	0,0411	0,0410
$a/h=20$						
$(10^2, 0)$	0,2062	0,2066	0,2190	0,2094	0,2083	0,2074
$(0, 10^2)$	0,0424	0,0424	0,0438	0,0426	0,0425	0,0424
$(10^2, 10^2)$	0,0407	0,0407	0,0420	0,0409	0,0408	0,0407

Xét tấm vuông ($a=b$) có chiều dày $h = a/1000$, tấm được đặt trên nền đàn hồi có hai tham số: $K_w^* = \frac{k_w a^4}{B_0}$; $K_s^* = \frac{k_s a^2}{B_0}$ với B_0 tính toán như ở phần trên. Lực nén tác dụng lên tấm trên hai cạnh đối diện, bảng 2 trình bày kết quả so sánh tải tới hạn $F_n = F_{cr} a^2 / (\pi^2 B_0)$ với các kết quả của lời giải chính xác [12] và lời giải theo công thức Green [13].

Bảng 2. So sánh tải tới hạn của tấm với các giá trị khác nhau của độ cứng nền đàn hồi.

(K_w^*, K_s^*)	Điều kiện biên	Bài báo	Tài liệu [14]	Tài liệu [15]
(100,0)	SSSS	4,91	5,02	5,02
	SCSC	7,82	7,94	7,94
(100,100)	SSSS	19,09	19,17	19,17
	SCSC	20,85	20,99	20,99

4. KHẢO SÁT SỐ

Phần này tính toán chuyển vị của bài toán tấm chịu uốn và tải tới hạn của bài toán ổn định của tấm nano có các kích thước $a=b=10$ nm, chiều dày h thay đổi trong từng trường hợp cụ thể, vật liệu tấm có các thông số $c_{11}=286$ GPa; $c_{33}=43.50$ GPa; $q_{31} = 580.3$ N/Am; $d_{33}=1.57.10^{-4}$ N/A², $l_0 = l_1 = l_2 = 1$ nm, và tham số đặc trưng cho sự ảnh hưởng của hiệu ứng flexomagnetic là $k_{14}^* = \frac{k_{14}}{k_{14}^0}$, với $f_{14}^0 = 10^{-7}$ N/A. Hai tham số độ cứng của nền $T_w^* = \frac{12k_w a^4}{c_{11}h_0^3} = 100$, $T_s^* = \frac{12k_s a^2}{c_{11}h_0^3} = 10$, với $h_0 = a/10$. Đối với bài toán tấm chịu uốn, tải trọng tác dụng phân bố đều lên tấm với cường độ Q_0 và chuyển vị lớn nhất của tấm nano:

$R_c = \frac{10^3 c_{11} h_0^3}{12 Q_0 a^4} \Theta_{z_{\min}}$. Lực nén tác dụng lên tấm $T_b = \frac{k_{cr} a^2}{\pi^2 c_{11} h_0^3} = 0.1$. Đối với bài toán ổn định, tải trọng tới hạn gây mất ổn định cho tấm được chuẩn hóa theo công thức: $F_{th} = k_{cr} a^2 / (\pi^2 c_{11} h_0^3)$.

Thay đổi giá trị của tham số f_{14} , bài báo thu được kết quả tính toán chuyển vị lớn nhất và tải tới hạn gây mất ổn định của tấm nano được thể hiện như trong các bảng 3 và 4. Khi giá trị của f_{14} tăng lên, tấm nano trở lên cứng hơn, điều này làm cho chuyển vị lớn nhất của tấm giảm xuống, đồng thời làm cho tải tới hạn của tấm tăng lên. Điều này chứng tỏ khả năng chịu tải nén và tải uốn của tấm nano tăng lên khi giá trị f_{14} tăng lên. Thêm vào đó, chúng ta thấy rằng điều kiện biên cũng ảnh hưởng đáng kể đến khả năng chịu uốn và chịu nén của tấm nano, khi tấm nano có các cạnh đều bị ngàm thì chuyển vị uốn là nhỏ nhất và tải tới hạn là lớn nhất, điều này tương ứng với khả năng chịu tải của tấm nano tốt nhất đối với trường hợp tấm có các cạnh đều ngàm.

Bảng 3. Chuyển vị lớn nhất của tấm nano phụ thuộc vào tham số k_{14} , $T_w^* = 100$, $T_s^* = 10$.

c_n/a	k_{14}^*	SSSS	CCCC	CSCS	CFCF
0.2	1	0,676	0,157	0,250	0,257
	10	0,668	0,155	0,248	0,256
	15	0,647	0,152	0,242	0,254
	20	0,615	0,146	0,232	0,250
0.4	1	0,683	0,158	0,251	0,259
	10	0,676	0,156	0,249	0,258
	15	0,654	0,153	0,243	0,256
	20	0,621	0,147	0,233	0,253

Bảng 4. Tải tới hạn của tấm nano phụ thuộc vào k_{14} , $T_w^* = 100$, $T_s^* = 10$.

c_n/a	k_{14}^*	SSSS	CCCC	CSCS	CFCF
0.2	1	4,587	23,191	8,018	17,272
	10	4,630	23,358	8,084	17,379
	15	4,767	23,880	8,290	17,713
	20	4,994	24,749	8,633	18,264
0.4	1	3,538	12,167	7,134	6,826
	10	3,574	12,262	7,193	6,867
	15	3,685	12,557	7,379	6,993
	20	3,870	13,050	7,687	7,201

Thay đổi giá trị của k_{bd} , bài báo thu được chuyển vị lớn nhất và tải tới hạn của tấm nano như trong các bảng 5 và 6. Tham số k_{bd} nhận giá trị càng lớn, thì độ cứng chung của nền đàn hồi càng giảm, điều này làm độ cứng tổng thể của tấm nano giảm xuống, làm cho chuyển vị lớn nhất của

tầm tăng lên và tải tới hạn của tấm giảm xuống, nghĩa là khả năng chịu tải của tấm nano kém hơn. Giá trị của tham số c_n càng lớn, tức là chiều dài tác dụng của lực nén càng tăng lên, thì chuyển vị lớn nhất của tấm cũng tăng lên, kéo theo là lực tới hạn của tấm nano giảm xuống, tức là khả năng chịu tải của tấm nano cũng giảm xuống.

Bảng 5. Chuyển vị lớn nhất của tấm nano phụ thuộc vào tỷ lệ c_n/a và hệ số k_{bd} .

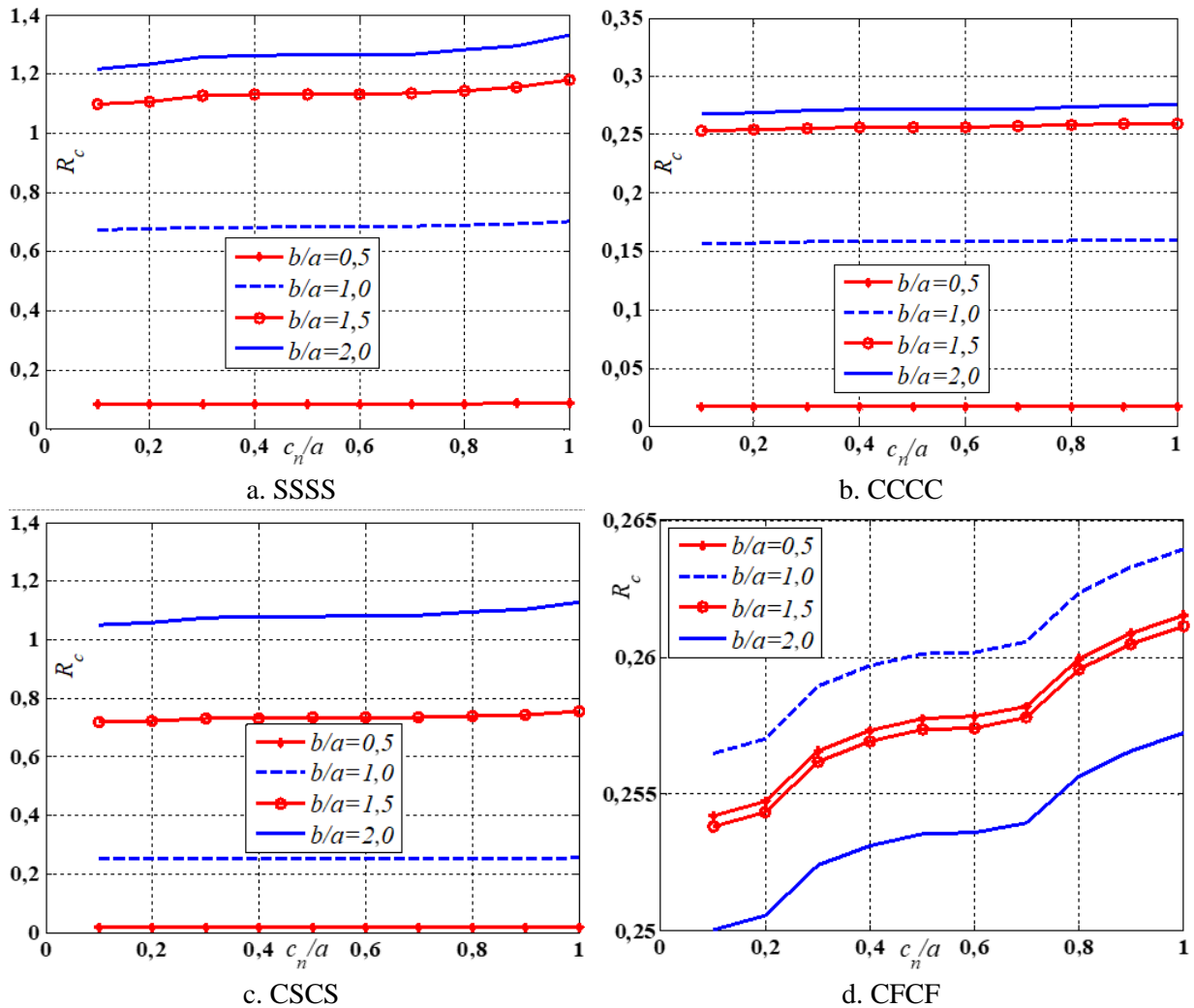
c_n/a	k_{bd}	SSSS	CCCC	CSCS	CFCF
0.2	0,3	0,671	0,156	0,249	0,256
	0,5	0,676	0,157	0,250	0,257
	0,7	0,680	0,158	0,251	0,258
	0,9	0,683	0,159	0,252	0,259
0.4	0,3	0,679	0,157	0,250	0,258
	0,5	0,683	0,158	0,251	0,259
	0,7	0,687	0,159	0,252	0,260
	0,9	0,691	0,160	0,253	0,261
0.6	0,3	0,680	0,157	0,251	0,259
	0,5	0,684	0,158	0,252	0,260
	0,7	0,688	0,159	0,253	0,261
	0,9	0,692	0,160	0,254	0,262
0.8	0,3	0,684	0,158	0,251	0,261
	0,5	0,689	0,159	0,252	0,262
	0,7	0,693	0,160	0,253	0,263
	0,9	0,697	0,161	0,254	0,264

Bảng 6. Tải tới hạn của tấm nano phụ thuộc vào tỷ lệ c_n/a và hệ số k_{bd} của nền đàn hồi, $k_{14}^* = 1$.

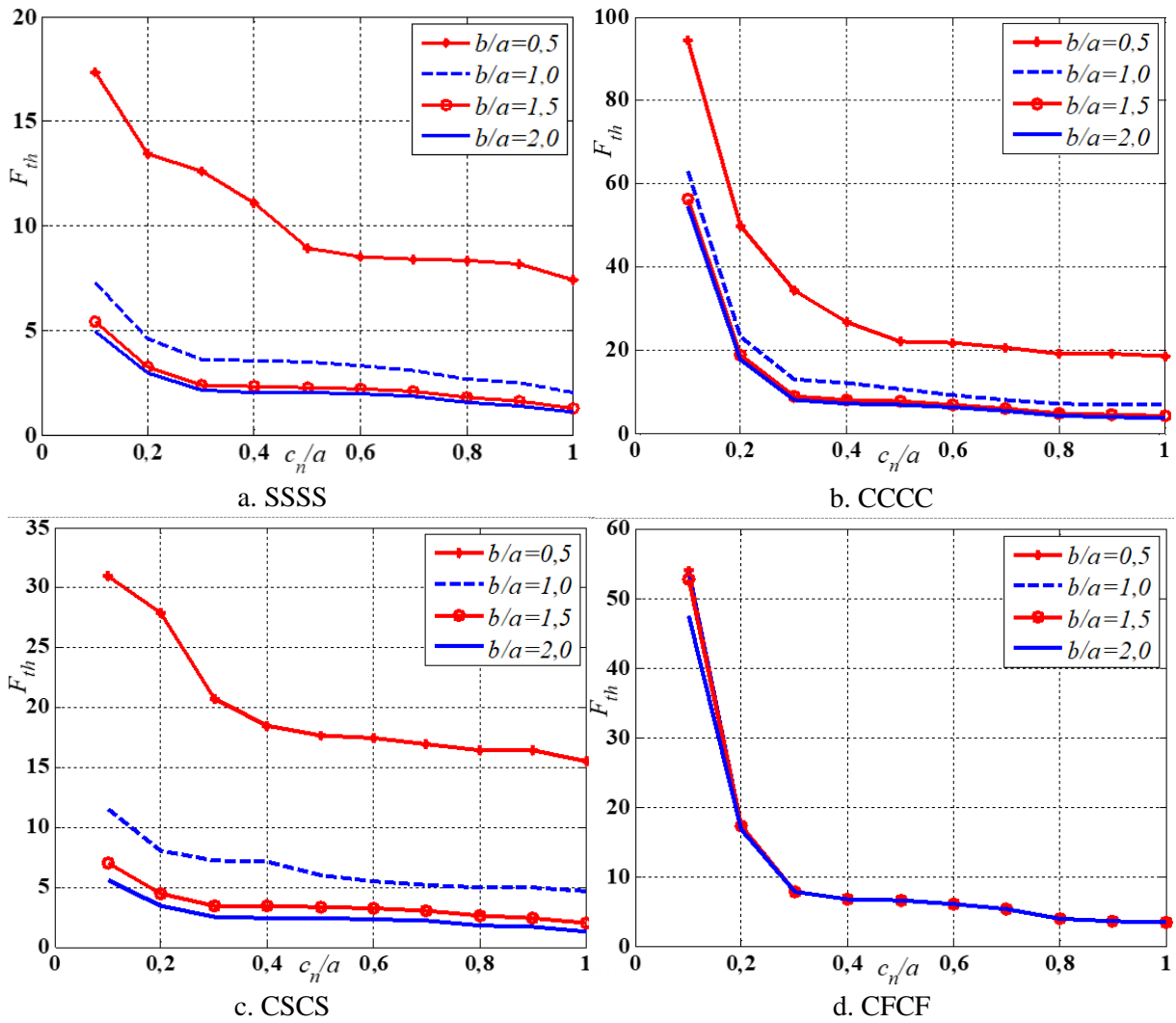
c_n/a	k_{bd}	SSSS	CCCC	CSCS	CFCF
0.2	0,3	4,604	23,203	8,026	17,294
	0,5	4,587	23,191	8,018	17,272
	0,7	4,571	23,181	8,010	17,252
	0,9	4,557	23,172	8,003	17,234
0.4	0,3	3,556	12,180	7,142	6,843
	0,5	3,538	12,167	7,134	6,826
	0,7	3,522	12,156	7,127	6,811
	0,9	3,508	12,145	7,120	6,798
0.6	0,3	3,325	9,175	5,492	6,099
	0,5	3,311	9,170	5,487	6,085

	0,7	3,299	9,166	5,484	6,073
	0,9	3,287	9,162	5,480	6,063
0.8	0,3	2,684	7,119	5,001	4,036
	0,5	2,672	7,112	4,996	4,026
	0,7	2,660	7,106	4,991	4,017
	0,9	2,650	7,100	4,987	4,009

Thay đổi chiều dài các cạnh tấm sao cho tỷ lệ b/a thay đổi từ 0.5 đến 2, kết quả tính toán chuyển vị lớn nhất và tải tới hạn của tấm nano được thể hiện như trên các hình 2 và 3. Khi tăng tỷ lệ b/a thì độ cứng của tấm nano giảm xuống, điều này làm cho chuyển vị lớn nhất của tấm tăng lên, và tải tới hạn gây mất ổn định cho tấm giảm xuống. Tuy nhiên sự tăng lên của chuyển vị thể hiện rõ nhất đối với trường hợp tấm có hai cạnh ngàm và hai cạnh tự do (CFCF), và sự giảm xuống rõ rệt nhất của tải tới hạn thể hiện rõ rệt nhất là đối với trường hợp tấm có bốn cạnh đều bị ngàm (CCCC).

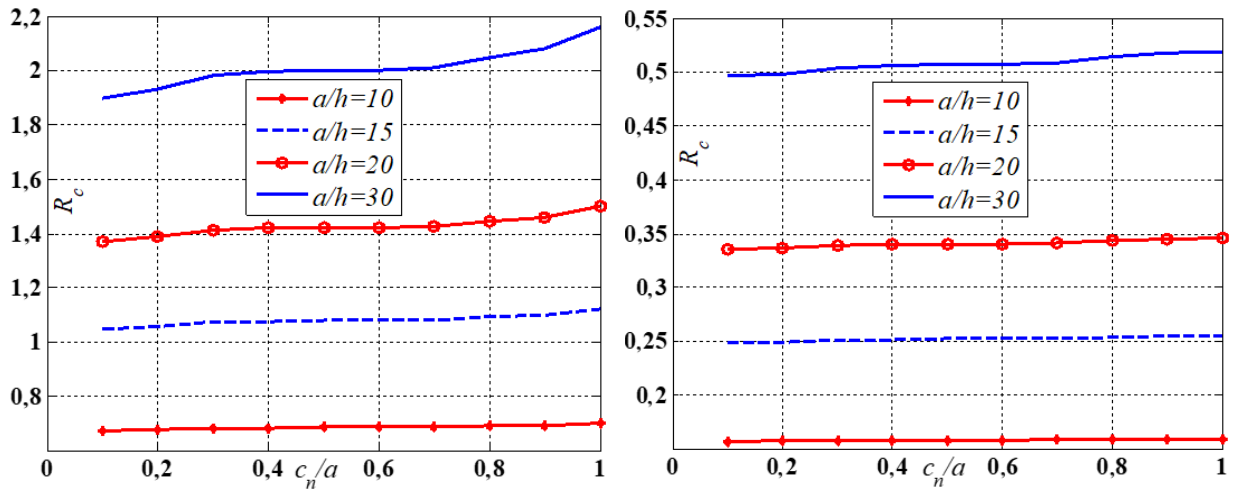


Hình 2. Chuyển vị lớn nhất của tấm phụ thuộc vào tỷ lệ b/a



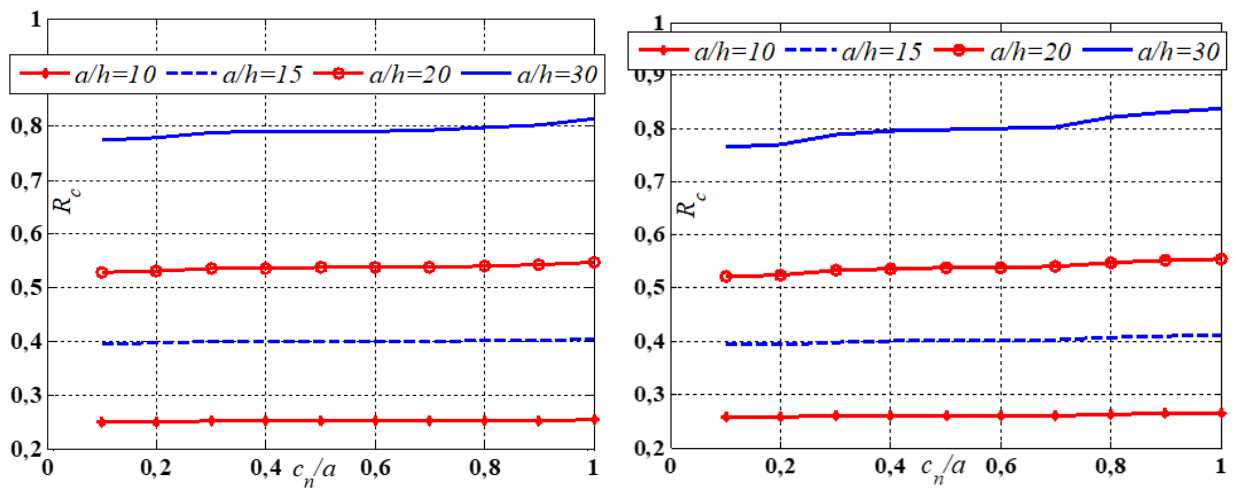
Hình 3. Tải tới hạn của tấm phụ thuộc vào tỷ lệ b/a .

Các hình 2 và 3 thể hiện sự biến đổi của chuyển vị và tải tới hạn của tấm nano phụ thuộc vào chiều dày tấm (thông qua tỷ lệ a/h), dễ dàng thấy rằng khi chiều dày tấm càng nhỏ (tức là tấm càng mỏng) thì độ cứng của tấm càng giảm, điều này làm chuyển vị lớn nhất của tấm tăng lên, và tải tới hạn của tấm nano càng giảm. Sự biến đổi của tải tới hạn thể hiện rõ nhất khi tỷ lệ chiều dài phần chịu nén $c_n < 0.5a$, còn trường hợp chiều dài phần chịu nén $c_n > 0.5a$ thì tải tới hạn thay đổi không đáng kể. Như vậy có thể thấy chiều dài tác dụng của lực nén ảnh hưởng đồng thời cả đến giá trị của chuyển vị lớn nhất của tấm khi chịu uốn và ảnh hưởng đến giá trị của lực tới hạn trong bài toán ổn định.



a. SSSS

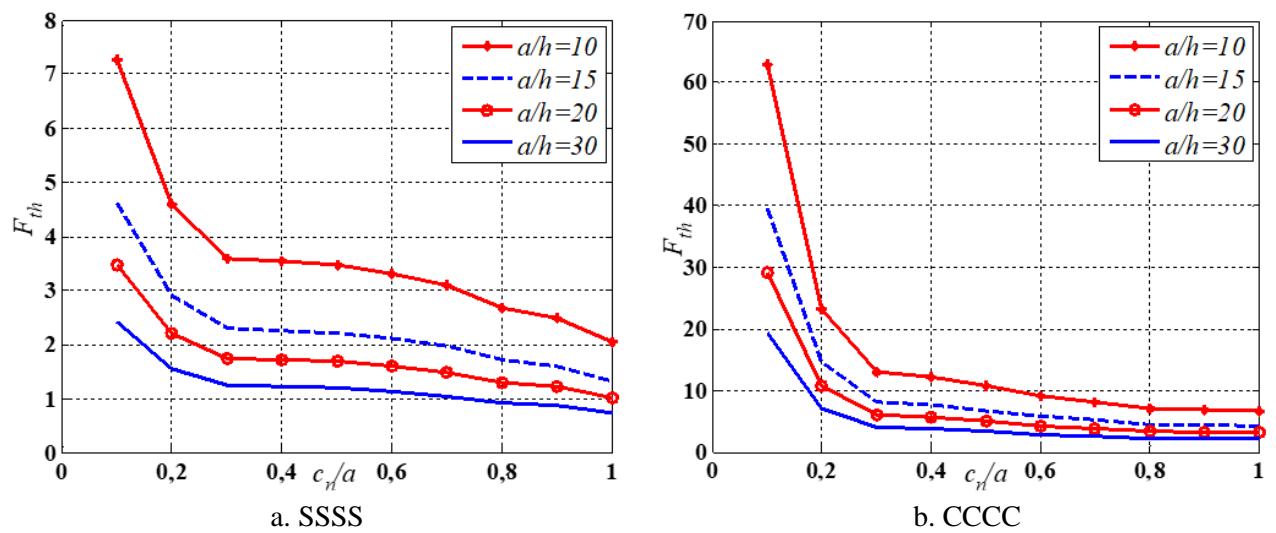
b. CCCC



c. CSCS

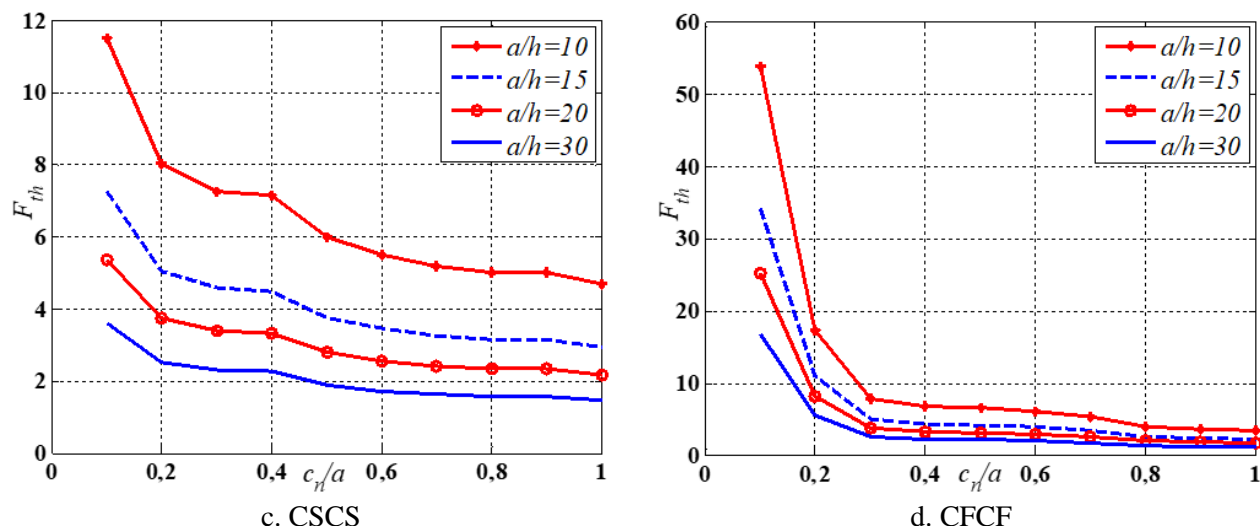
d. CFCF

Hình 4. Chuyển vị lớn nhất của tấm phụ thuộc vào tỷ lệ a/h .



a. SSSS

b. CCCC


 Hình 5. Tải tới hạn của tấm phụ thuộc vào tỷ lệ a/h .

5. KẾT LUẬN

Trên cơ sở của phương pháp phần tử hữu hạn, bài báo đã đưa ra kết quả nghiên cứu đáp ứng chuyển vị lớn nhất trong bài toán uốn và tải tới hạn trong bài toán ổn định của tấm nano. Các công thức tính toán đã được kiểm chứng bằng việc so sánh với các kết quả đã công bố bằng nhiều phương pháp khác nhau, trong đó sự hội tụ đã được kiểm chứng đối với thuật toán phần tử hữu hạn mà bài báo thiết lập. Bài báo đã tiến hành tính toán số để làm nổi bật ảnh hưởng của các tham số đặc trưng cho hiệu ứng flexomagnetic, các tham số hình học, điều kiện biên và đặc trưng tác dụng của tải tác dụng đến khả năng chịu tải uốn và tải nén của tấm nano. Các kết quả nghiên cứu của bài báo là cơ sở khoa học có giá trị tham chiếu hữu ích cho các kỹ sư khi thiết kế, chế tạo tấm nano trong thực tế. Đồng thời đây cũng là cơ sở để thực hiện các bài toán tấm nano trong môi trường đa vật lý, chịu nhiều tải trọng phức tạp hơn cũng như các bài toán tối ưu kết cấu tấm nano trong thực tiễn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. D. V. Thom, V. M. Chinh, V. M. Phung, V.N.D. Anh, Mechanical responses of nanoplates resting on viscoelastic foundations in multi-physical environments, *Eur. J. Mechanics-A/Solids*, 106 (2024) 105309. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2024.105309>
- [2]. V. M. Chinh, D. N. Mai, L. T. Tuan, A. M. Zenkour, Magnetoelastic bending and buckling responses of nanoplates resting on elastic foundations with various boundary conditions, *J. Vib. Eng. Technol.*, 12 (2024) 6597–6617. <https://doi.org/10.1007/s42417-023-01272-1>
- [3]. N. Zhang, S. Zheng, D. Chen, Size-dependent static bending, free vibration and buckling analysis of simply supported flexomagnetic nanoplates, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 44 (2022) 253. <https://doi.org/10.1007/s40430-022-03556-1>
- [4]. H. Momeni-Khabisi, M. Tahani, Buckling and post-buckling analysis of double-layer magnetoelastic nano-plate strips considering piezo-flexoelectric and piezo-flexomagnetic effects, *Eur. J. Mechanics-A/Solids*, 104 (2024) 105218. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105218>
- [5]. M. Malikan, V. A. Eremeyev, Effect of surface on the flexomagnetic response of ferroic composite nanostructures; nonlinear bending analysis, *Comp. Struct.*, 271 (2021) 114179. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114179>

- [6]. V. H. Binh, N. D. Anh, P. V. Minh, H. T. Dung, Vibration response of nanobeams subjected to random reactions, *Eur. J. Mechanics-A/Solids*, 109 (2024) 105489. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2024.105489>.
- [7]. D. M. Tien, D. V. Thom, P.V. Minh, N.C. Tho, T.N. Doan, D.N. Mai, The application of the nonlocal theory and various shear strain theories for bending and free vibration analysis of organic nanoplates, *Mech. Based Des. Struct. Mach*, 52 (2024) 588-610. <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2186893>.
- [8]. D. M. Tien, D. V. Thom, P.V. Minh, P.H. Hieu, Bending and buckling responses of organic nanoplates considering the size effect, *Transport and Communications Science Journal*, 75 (2024) 2015-2029. <https://doi.org/10.47869/tcsj.75.7.1>
- [9]. M. Touratier, An efficient standard plate theory, *Int. j. Eng. Science*, 29 (1991) 901–916. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90165-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y)
- [10]. A. S. Sayyad, Y. M. Ghugal, Effects of nonlinear hygrothermomechanical loading on bending of FGM rectangular plates resting on two-parameter elastic foundation using four-unknown plate theory, *J. Ther. Stress*, 42 (2019) 213–232. <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1469962>.
- [11]. V.M. Chinh, D.N. Mai, L.T. Tuan, A.M. Zenkour, G.T. Luu, Magnetoelastic Bending and Buckling Responses of Nanoplates Resting on Elastic Foundations With Various Boundary Conditions, *J. Vib. Eng. Technol.*, 12 (2024) 6597–6617. <https://doi.org/10.1007/s42417-023-01272-1>
- [12]. A. S. Sayyad, Y. M. Ghugal, Effects of nonlinear hygrothermomechanical loading on bending of FGM rectangular plates resting on two-parameter elastic foundation using four-unknown plate theory, *J. Therm. Stress*, 42 (2019) 213–232. <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1469962>.
- [13]. I. M. Mudhaffar, A. Tounsi, A. Chikh, M. A. Al-Osta, M. M. Al-Zahrani, S. U. Al-Dulaijan, Hygro-thermo-mechanical bending behavior of advanced functionally graded ceramic metal plate resting on a viscoelastic foundation, *Struct.*, 33 (2021) 2177–2189. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.05.090>.
- [14]. Akhavan H , Hashemi SH, Taher HRD, Alibeigloo A, Vahabi. S, Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation, Part I: Buckling analysis, *Comp. Mat. Sci*, 44 (2009) 968–978.
- [15]. Lam. K.Y, Wang. C.M, He. X.Q, Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions, *Eng. Structures*, 22 (2000). [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(98\)00116-3](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(98)00116-3).