



VIBRATION AND BUCKLING ANALYSIS OF NANOPLATES RESTING ON VARIABLE ELASTIC FOUNDATIONS

Than Van Toan¹, Truong Thi Huong Huyen¹, Dao Van Doan^{2*}

¹Faculty of Mechanical Engineering, Le Quy Don Technical University, No 236 Hoang Quoc Viet Street, Hanoi, Vietnam.

²Faculty of Special Equipment, Le Quy Don Technical University, 236 Hoang Quoc Viet Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 19/10/2024

Revised: 16/11/2024

Accepted: 10/12/2024

Published online: 15/12/2024

<https://doi.org/10.47869/tcsj.75.9.1>

* Corresponding author

Email: doandv@lqdtu.edu.vn

Abstract. Nanostructures are widely used in electronic circuits, sensors, and military equipment. Therefore, analyzing mechanical response of nanoscale structures is a scientific foundation to help engineers in designing and manufacturing these structures in technical practice. This paper investigates the natural oscillation response and buckling of a nanoplate supported by a modified elastic foundation, utilizing a four-node plate element where an each node possesses six degrees of freedom. The equilibrium equation for the nanoplate is derived using the third-order shear deformation theory, and the finite element method has been employed to solve this equation and determine the natural oscillation frequency and critical buckling load of the nanoplate. In this paper, we have established the reliability and convergence of the calculation theory by comparing analytical results with those obtained from the published finite element method. Consequently, we examined the impact of various material parameters, geometry, boundary conditions, and elastic foundation on the frequency response, natural oscillation modes, and critical buckling load of the nanoplate.

Keywords: natural oscillation, buckling, elastic foundation, finite element method.



DAO ĐỘNG VÀ ỔN ĐỊNH CỦA TẮM NANO TỰA TRÊN NỀN ĐÀN HỒI BIẾN ĐỔI

Thân Văn Toàn¹, Trương Thị Hương Huyền¹, Đào Văn Đoàn^{2*}

¹Bộ môn Cơ học vật rắn, Khoa Cơ khí, Học viện KTQS, Số 236 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội, Việt Nam.

²Bộ môn Vũ khí, Khoa Vũ khí, Học viện KTQS, Học viện KTQS, Số 236 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội, Việt Nam.

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 19/10/2024

Ngày nhận bài sửa: 16/11/2024

Ngày chấp nhận đăng: 10/12/2024

Ngày xuất bản Online: 15/12/2024

<https://doi.org/10.47869/tcsj.75.9.1>

* Tác giả liên hệ

Email: doandv@lqdtu.edu.vn

Tóm tắt: Các kết cấu nano được sử dụng rộng rãi trong các vi mạch điện tử, cảm biến, thiết bị quân sự. Việc tính toán đáp ứng cơ học của các kết cấu kích thước nano là cơ sở khoa học để giúp các kỹ sư trong việc thiết kế, chế tạo các kết cấu dạng này trong thực tế kỹ thuật. Dựa vào phân tử bốn nút, mỗi nút có sáu bậc tự do, bài báo nghiên cứu đáp ứng dao động riêng và ổn định của tấm nano tựa trên nền đàn hồi biến đổi. Phương trình cân bằng cho tấm nano được tìm ra trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc ba, giải thuật phần tử hữu hạn đã được áp dụng để giải phương trình cân bằng này và tìm ra tần số dao động riêng và tải tới hạn của tấm nano. Thông qua so sánh với kết quả giải tích và kết quả của phương pháp phần tử hữu hạn đã công bố, bài báo đã minh chứng sự tin cậy và tính hội tụ của lý thuyết tính toán. Trên cơ sở đó, bài báo tiến hành khảo sát ảnh hưởng của một số tham số vật liệu, hình học, điều kiện biên, nền đàn hồi đến đáp ứng tần số, dạng dao động riêng và tải tới hạn của tấm nano.

Từ khóa: dao động riêng, ổn định, nền đàn hồi, phương pháp phần tử hữu hạn.

@ 2024 University of Transport and Communications

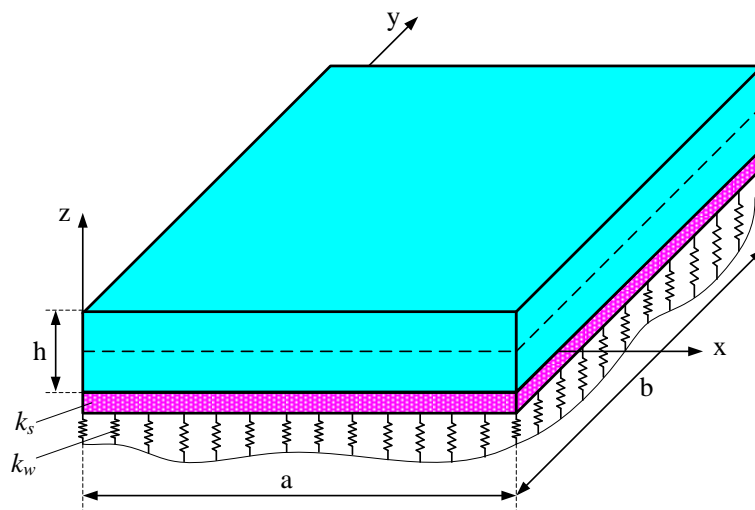
1. MỞ ĐẦU

Ngày nay, để đáp ứng yêu cầu ngày càng cao của nhiều thiết bị đặc biệt trong kết cấu vũ khí, trong các vi cơ điện tử, cần phải có những loại vật liệu mới có những tính năng vượt trội so với các loại vật liệu thông thường. Và các nhà khoa học đã khám phá ra nhiều loại vật liệu

mới, ứng dụng rộng rãi trong thực tế kỹ thuật, điển hình trong số đó là vật liệu cơ tính biến thiên, vật liệu được gia cường graphene hoặc gia cường ống nano, vật liệu có hiệu ứng điện, hiệu ứng từ, ... Ứng xử cơ học của các kết cấu làm bằng vật liệu tiên tiến này cũng nhận được sự quan tâm của đông đảo các nhà khoa học. Đức và đồng nghiệp [1] sử dụng phân tử bốn nút và thuật toán phân tử hữu hạn để mô phỏng đáp ứng dao động riêng của tấm nano làm từ vật liệu áp điện có khuyết tật dạng vết nứt, trong đó vết nứt được mô tả bởi miền liên tục trên cơ sở của lý thuyết trường pha. Để xem xét ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric và nền đàn hồi đến chuyển vị, ứng suất, điện trường, sự phân cực điện tích của tấm nano khi chịu uốn, Thái và nhóm nghiên cứu [2] cũng sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn phân tích và nghiên cứu cụ thể. Ảnh hưởng của chuyển động quay đến tần số dao động và uốn của dầm nano đã được Thọ và các đồng nghiệp chỉ ra trong công trình [3], trong đó sự không hoàn hảo hình dáng ban đầu và hiệu ứng flexoelectric cũng được tính đến. Kế cùng các đồng nghiệp [4] đã áp dụng phương pháp giải tích để nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric đến đáp ứng uốn tĩnh của vỏ nano nhiều lớp. Tiếp theo đó, nhóm tác giả này cũng chỉ rõ ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric đến đáp ứng uốn và dao động riêng của tấm nano [5] trên cơ sở của lý thuyết biến thiên biến dạng. Đáp ứng uốn tĩnh và dao động riêng của dầm nano cũng được Zhang và các cộng sự chỉ ra trong công trình [6]. Trên cơ sở của phương pháp phân tử hữu hạn, Tiến và các đồng nghiệp [7] đã chỉ rõ đáp ứng uốn tĩnh và dao động riêng của tấm nano gồm nhiều lớp vật liệu. Từ các kết quả đã công bố, chúng ta có thể thấy rằng đáp ứng dao động riêng và ổn định của tấm nano tựa trên nền đàn hồi biến đổi là vấn đề thú vị và cần được chỉ ra cụ thể, vì vậy bài báo này sẽ nghiên cứu vấn đề này trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc ba và phương pháp phân tử hữu hạn.

2. CÔNG THỨC TÍNH TOÁN

Tấm nano có mô hình như trong Hình 1. Các tham số của tấm gồm chiều dài và chiều rộng lần lượt là a và b , tấm có chiều dày h , hệ tọa độ $Oxyz$ được đặt lên tấm để thuận lợi biểu diễn công thức tính toán, tấm đặt trên nền đàn hồi biến đổi, hai tham số độ cứng của nền là k_w và k_s .



Hình 1. Mô hình tấm nano đặt trên nền đàn hồi biến đổi.

Để tìm công thức tính toán, bài báo này dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba [8], các thành phần chuyển vị của tấm nano được biểu diễn trong hệ tọa độ Đề Các như sau:

$$u_x = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f_z \frac{\partial w_s}{\partial x}; u_y = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f_z \frac{\partial w_s}{\partial y}; w_z = w_b + w_s \quad (1)$$

trong đó $f_z = -\frac{z}{4} + \frac{5z^3}{3h^2}$, u_x là chuyển vị dọc theo trục Ox, v_y là chuyển vị dọc theo trục Oy, và w_z là chuyển vị dọc theo trục Oz.

Trường biến dạng được viết cụ thể như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f_z \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f_z \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f_z \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = z \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{bx} \\ \varepsilon_{by} \\ \gamma_{bxy} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_b} + f_z \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{sx} \\ \varepsilon_{sy} \\ \gamma_{sxy} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_s};$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \left(1 - \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = \left(1 - \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) \boldsymbol{\gamma}_0 \quad (2)$$

Các biến thiên biến dạng:

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{Bmatrix} \zeta_{xxz} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{\partial f_z}{\partial z} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \zeta_{yyz} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \frac{\partial f_z}{\partial z} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \end{Bmatrix} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\zeta}_b + \frac{\partial f_z}{\partial z} \boldsymbol{\zeta}_s \quad (3)$$

Dưới tác dụng của tải trọng cơ, tâm bị biến dạng, và vật liệu áp điện gây hiệu ứng tương tác cơ-điện nên quan hệ ứng suất và biến dạng có dạng:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - q_{kij} E_k; \chi_{ijm} = -f_{kijm} E_k; Q_i^0 = c_{ijk} \varepsilon_{jk} + d_{ij} E_k + f_{ijkl} \zeta_{jkl} \quad (4)$$

trong đó c_{ijkl} , q_{kij} , f_{kijm} và d_{ij} là các hằng số đàn hồi, hằng số áp điện, hệ số flexoelectric và hệ số điện môi. Q_i^0 là chuyển vị điện, và χ_{ijm} mô men bậc cao.

Biểu thức (4) được khai triển cụ thể dưới dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - q_{31} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} E_z = \mathbf{C}_b \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{E}; \boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{66} & 0 \\ 0 & c_{66} \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_{xxz} \\ \chi_{yyz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{14} & 0 \\ 0 & r_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_{xxz} \\ \zeta_{yyz} \end{Bmatrix} - f_{14} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} E_z; \quad (6)$$

$$Q_z^0 = q_{31} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + d_{33} E_z + f_{14} (\eta_{xxz} + \eta_{yyz}) \quad (7)$$

trong đó f_{14} là hệ số flexoelectric. Và cần tìm biểu thức của điện trường E_z , nếu không có điện trường ngoài tác dụng lên tấm, điều kiện của chuyển vị điện có dạng: $\frac{\partial Q_z^0}{\partial z} = 0$ và $Q_z^0|_{z=h/2} = 0, Q_z^0|_{z=-h/2} = 0$, từ đó ta tìm được biểu thức của điện trường:

$$E_z = \frac{q_{31}}{d_{33}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) z + f_z \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{f_{14}}{d_{33}} \frac{\partial f_z}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + \frac{f_{14}}{d_{33}} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

Tấm nano được chia thành các phần tử bốn nút, mỗi nút gồm 6 bậc tự do:

$$\mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^4 \left\{ w_{bi}, w_{si}, \frac{\partial w_{bi}}{\partial x}, \frac{\partial w_{si}}{\partial x}, \frac{\partial w_{bi}}{\partial y}, \frac{\partial w_{si}}{\partial y} \right\}^T \quad (9)$$

Các chuyển vị w_b và w_s được tính theo các hàm nội suy Hermit:

$$\{w_b, w_s\} = \sum_{i=1}^4 \left\{ R_i \{w_{bi}, w_{si}\} + R_{i+1} \left\{ \frac{\partial w_{bi}}{\partial x}, \frac{\partial w_{si}}{\partial x} \right\} + R_{i+2} \left\{ \frac{\partial w_{bi}}{\partial y}, \frac{\partial w_{si}}{\partial y} \right\} \right\} = \{\mathbf{R}_b, \mathbf{R}_s\} \mathbf{u}_e \quad (10)$$

với R_i là các hàm Hermit [9].

Đến đây, biểu diễn (2)-(3) ở dạng:

$$\varepsilon_b = \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_e; \varepsilon_s = \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_e; \gamma_0 = \mathbf{A}_3 \mathbf{u}_e; \eta_b = \mathbf{A}_4 \mathbf{u}_e; \eta_s = \mathbf{A}_5 \mathbf{u}_e \quad (11)$$

với \mathbf{A}_i ($i=1-5$) là các ma trận vi phân hàm dạng. Công khả dĩ thế năng biến dạng của phần tử tấm nano được viết ở dạng sau:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_e &= \int_{V_e} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau} + \delta \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\chi} - \delta Q_z^0 H_z) dV + \int_{S_e} \left(k_w \left(1 - \alpha_n \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \left(1 - \alpha_n \sin \left(\frac{y}{b} \right) \right) \delta w_z w_z \right. \\ &\quad \left. + k_s \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_z}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} \right) \right) \right) dx dy \quad (12) \\ &= \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{K}_e^{tam} + \mathbf{K}_e^{nen}) \mathbf{u}_e \end{aligned}$$

với k_w và k_s là hai tham số độ cứng của nền đàn hồi, α_n là tham số đặc trưng cho sự biến đổi độ cứng của nền đàn hồi, và $\mathbf{K}_e^{tam}, \mathbf{K}_e^{nen}$ là ma trận độ cứng của phần tử tấm nano và ma trận độ cứng do nền đàn hồi tác dụng lên phần tử tấm, trong đó ma trận \mathbf{K}_e^{tam} được xác định giống như trong tài liệu [12], còn ma trận \mathbf{K}_e^{nen} có biểu thức :

$$\mathbf{K}_e^{nen} = \int_{S_e} \left(k_w \left(1 - \alpha_n \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \left(1 - \alpha_n \sin \left(\frac{y}{b} \right) \right) (\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_s)^T (\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_s) \right. \\ \left. + k_s \left(\frac{\partial (\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_s)^T}{\partial x} \frac{\partial (\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_s)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_s)^T}{\partial y} \frac{\partial (\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_s)}{\partial y} \right) \right) dx dy \quad (13)$$

Biểu thức công khả dĩ của lực quán tính:

$$\delta T_e = \int_{V_e} \delta \mathbf{u}_e^T \rho \ddot{\mathbf{u}}_e dV = \delta \mathbf{u}_e^T \int_{V_e} \mathbf{H}^T \mathbf{L}^T \rho \mathbf{L} \mathbf{H} dV \ddot{\mathbf{u}}_e = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e \quad (14)$$

với ρ là khối lượng riêng của vật liệu tấm nano, \mathbf{M}_e là ma trận khối lượng phần tử tấm :

$$\mathbf{M}_e = \int_{V_e} \mathbf{H}^T \mathbf{L}^T \rho \mathbf{L} \mathbf{H} dV \quad (15)$$

Sử dụng cực tiểu năng lượng toàn phần, phương trình xác định tần số dao động riêng của tấm nano có dạng:

$$\sum_e (\mathbf{K}_e^{tam} + \mathbf{K}_e^{nen} - \omega^2 \mathbf{M}_e) \mathbf{u}_e = \mathbf{0} \quad (16)$$

trong đó ω là tần số dao động riêng của tấm nano.

Ngoại lực nén trong mặt phẳng tấm sinh công:

$$\delta \Pi_e = \int_{S_e} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} P_n \delta \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_z}{\partial y} P_n \delta \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} \right) \right) dS = \delta \mathbf{u}_e^T \int_{S_e} (\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_s)^T P_n (\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_s) dS = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e^G \mathbf{u}_e \quad (17)$$

Phương trình cân bằng của tấm khi chịu tải trọng nén có dạng

$$\sum_e (\mathbf{K}_e^{tam} + \mathbf{K}_e^{nen} - k_{cr} \mathbf{K}_e^G) \mathbf{u}_e = \mathbf{0} \quad (18)$$

trong đó ma trận được xác định theo công thức :

$$\mathbf{K}_e^G = \int_{S_e} (\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_s)^T (\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_s) dS \quad (19)$$

Tần số dao động riêng của tấm nano nhận được từ việc giải phương trình (16), còn tải tới hạn của tấm nano thu được từ việc giải phương trình (18).

3. VÍ DỤ KIỂM CHỨNG

Xét tấm nano có các cạnh $a=b=10$ nm, chiều dày tấm nano $h = a/10$ và $a/20$. Các hằng số cơ tính vật liệu $E = 30$ MPa, $\nu = 0,3$, $\rho = 1$, tần số dao động riêng đầu tiên của tấm được tính theo công thức không thứ nguyên: $\omega_F^* = \omega_1 h / \sqrt{2\rho(1+\nu)/E}$. Bảng 1 trình bày kết quả so sánh tần số dao động riêng đầu tiên với kết quả tính bằng phương pháp phần tử hữu hạn [10] và phương pháp giải tích [11], trong đó bài báo sử dụng lưới chia với số lượng phần tử tăng dần, và lưới chia với 144 phần tử đảm bảo sự chính xác cần thiết, do vậy lưới chia này sẽ được sử dụng để tính toán các kết quả trong toàn bộ bài báo này.

Bảng 1. So sánh tần số dao động riêng đầu tiên của tấm nano.

| Bài báo (64 phần tử) | Bài báo (100 phần tử) | Bài báo (121 phần tử) | Bài báo (144 phần tử) | Bài báo (196 phần tử) | Tài liệu [10] | Tài liệu [11] |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|------------------|------------------|
| $a = 10h$ | | | | | | |
| 0,0922 | 0,0925 | 0,0926 | 0,0927 | 0,0927 | 0,0928 | 0,0935 |

| | | | | | | |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $a = 20h$ | | | | | | |
| 0,0236 | 0,0237 | 0,0237 | 0,0237 | 0,0238 | 0,0238 | 0,0239 |

Tấm vuông với tỷ lệ chiều dài hai cạnh $a/b=1$, chiều dày tấm thỏa mãn $a/h = 1000$, tấm tựa trên nền đàn hồi hai hệ số với: $\bar{K}_w = \frac{k_w a^4}{D}$; $\bar{K}_s = \frac{k_s a^2}{D}$, trong đó $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ và $\nu=0,3$. Tấm chịu nén trên hai cạnh đối diện, tải tới hạn của tấm được tính toán và so sánh như trong bảng 2, trong đó [12] tính theo lời giải chính xác, [13] tính theo công thức Green.

Bảng 2. So sánh tải tới hạn $k_b = k_{cr} a^2 / (\pi^2 D)$ của tấm tựa trên nền đàn hồi chịu nén trên hai cạnh đối diện ($a/b = 1, a/h=1000$).

| Điều kiện biên | K_w | K_s | Tải tới hạn | | |
|----------------|-------|-------|---------------|---------------|---------|
| | | | Tài liệu [12] | Tài liệu [13] | Bài báo |
| SSSS | 0 | 0 | 3,99 | 4,00 | 3,97 |
| | 0 | 100 | 18,91 | 18,92 | 18,86 |
| | 100 | 0 | 5,02 | 5,02 | 4,91 |
| | 100 | 100 | 19,17 | 19,17 | 19,09 |
| SCSC | 0 | 0 | 7,69 | 7,69 | 7,58 |
| | 0 | 100 | 20,73 | 20,74 | 20,62 |
| | 100 | 0 | 7,94 | 7,94 | 7,82 |
| | 100 | 100 | 20,99 | 20,99 | 20,85 |

4. KHẢO SÁT SỐ

Phần này tính toán cho tấm nano có chiều dày $h=20$ nm, $a=b=50h$, các hằng số vật liệu $c_{11}=102$ GPa; $c_{12}=31$ GPa; $c_{33}=35,50$ GPa; $e_{31} = -17,05$ C/m²; $k_{33}=1,76 \cdot 10^{-8}$ C/(Vm), $\rho = 7600$ kg/m³, tham số $f_{14}^* = \frac{f_{14}}{f_{14}^0}$, với $f_{14}^0 = 10^{-7}$ C/m. Tấm tựa trên nền đàn hồi với ba tham số k_w, k_s và c_n , hai tham số độ cứng nền được chuẩn hóa theo công thức không thứ nguyên: $k_w^* = \frac{k_w a^4}{c_{11} h_0^3}$, $k_s^* = \frac{k_s a^2}{c_{11} h_0^3}$, với $h_0 = a/50$. Thông số tính toán là tần số dao động riêng và tải tới hạn

của tấm được tính toán theo công thức: $T_\omega(i) = 10^3 \omega_i h_0 \sqrt{\frac{\rho}{c_{11}}}$, $T_b = \frac{k_{cr} a^2}{\pi^2 c_{11} h_0^3}$.

Kết quả tính toán bốn tần số dao động riêng đầu tiên và tải tới hạn mất ổn định của tấm nano phụ thuộc vào tham số f_{14} được trình bày trong các bảng 3 và 4. Chúng ta có thể thấy rằng hệ số f_{14} có giá trị càng lớn thì độ cứng của tấm càng lớn, do vậy tần số dao động của

tầm và tải tới hạn gây mất ổn định cho tấm nano tăng lên. Tấm nano ở điều kiện biên ngàm tất cả các cạnh có tần số dao động riêng và tải tới hạn lớn nhất, tấm nano ở điều kiện biên ngàm hai cạnh và hai cạnh tự do có tần số dao động riêng và tải tới hạn nhỏ nhất.

Bảng 3. Bốn tần số dao động riêng đầu tiên của tấm nano phụ thuộc vào f_{14} , $k_w^* = 100$, $k_s^* = 10$, $\alpha_n = 0,5$.

| f_{14}^* | $T_\omega(1)$ | $T_\omega(2)$ | $T_\omega(3)$ | $T_\omega(4)$ |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| SSSS | | | | |
| 1 | 6,90 | 11,41 | 15,51 | 18,26 |
| 5 | 8,24 | 15,92 | 23,27 | 28,44 |
| 10 | 11,36 | 24,68 | 37,17 | 45,87 |
| 15 | 14,99 | 33,63 | 50,68 | 62,45 |
| CCCC | | | | |
| 1 | 8,29 | 13,80 | 18,53 | 21,79 |
| 5 | 11,58 | 21,26 | 29,64 | 35,77 |
| 10 | 17,88 | 34,13 | 47,96 | 57,95 |
| 15 | 24,28 | 46,45 | 65,15 | 78,67 |
| CSCS | | | | |
| 1 | 7,63 | 11,91 | 13,39 | 17,09 |
| 5 | 10,06 | 17,05 | 20,38 | 26,68 |
| 10 | 15,05 | 26,75 | 32,64 | 43,02 |
| 15 | 20,34 | 36,47 | 44,45 | 58,53 |
| CFCF | | | | |
| 1 | 6,06 | 7,53 | 11,36 | 12,09 |
| 5 | 7,54 | 8,80 | 14,07 | 16,51 |
| 10 | 9,73 | 10,38 | 19,36 | 20,47 |
| 15 | 11,54 | 11,74 | 23,23 | 25,33 |

Bảng 4. Tải tới hạn của tấm nano phụ thuộc vào f_{14} , $k_w^* = 100$, $k_s^* = 10$, $\alpha_n = 0,5$.

| f_{14}^* | SSSS | CCCC | CSCS | CFCF |
|------------|------|-------|-------|------|
| 1 | 1,52 | 1,81 | 1,68 | 1,38 |
| 5 | 2,18 | 3,48 | 2,91 | 1,60 |
| 10 | 4,14 | 8,28 | 6,51 | 1,86 |
| 15 | 7,22 | 15,30 | 11,89 | 2,06 |

Trong các bảng 5-6 trình bày kết quả tính toán bốn tần số dao động riêng đầu tiên và tải tới

hạn của tấm nano phụ thuộc vào tham số α_n . Khi tăng giá trị của tham số α_n , tần số dao động riêng và tải tới hạn gây mất ổn định của tấm nano giảm xuống, điều này là do độ cứng của nền sẽ giảm xuống khi tăng giá trị của tham số α_n , do vậy làm cho độ cứng của kết cấu giảm xuống, nhưng khối lượng của tấm nano lại không thay đổi, do đó khả năng chịu tải nén của tấm nano cũng kém hơn, và tần số dao động riêng của tấm nano giảm xuống. Trên hình 2 thể hiện bốn dạng dao động riêng đầu tiên của tấm nano trong hai trường hợp $\alpha_n = 0$ và $\alpha_n = 0,6$, nhìn vào hình này, chúng ta có thể thấy rằng tham số α_n không những chỉ ảnh hưởng đến giá trị của tần số và tải tới hạn, mà còn ảnh hưởng đến các dạng dao động riêng của tấm nano.

Bảng 5. Bốn tần số dao động riêng đầu tiên của tấm nano phụ thuộc vào α_n , $k_w^* = 10^4$, $k_s^* = 10$,

$$f_{14}^* = 1.$$

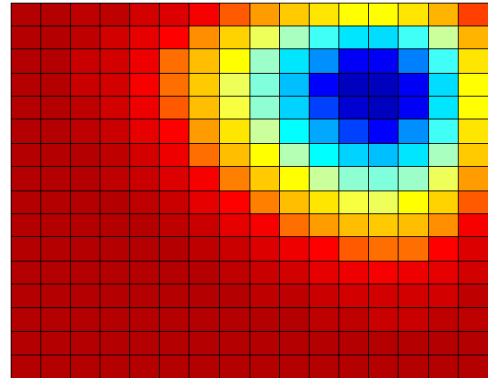
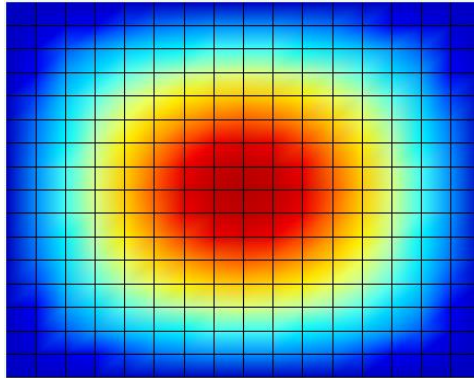
| α_n | $T_\omega(1)$ | $T_\omega(2)$ | $T_\omega(3)$ | $T_\omega(4)$ |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| SSSS | | | | |
| 0,2 | 36,19 | 37,69 | 39,48 | 40,35 |
| 0,4 | 31,49 | 33,71 | 34,00 | 36,26 |
| 0,6 | 26,74 | 29,65 | 30,11 | 32,87 |
| 0,8 | 22,12 | 25,60 | 26,27 | 29,40 |
| CCCC | | | | |
| 0,2 | 36,69 | 38,53 | 40,66 | 42,07 |
| 0,4 | 32,33 | 34,77 | 37,54 | 38,76 |
| 0,6 | 27,92 | 30,98 | 34,44 | 35,51 |
| 0,8 | 23,61 | 27,21 | 27,76 | 31,34 |
| CSCS | | | | |
| 0,2 | 36,44 | 37,98 | 40,07 | 40,56 |
| 0,4 | 31,91 | 34,21 | 36,89 | 37,23 |
| 0,6 | 27,33 | 30,31 | 33,58 | 34,06 |
| 0,8 | 22,85 | 26,42 | 27,03 | 30,24 |
| CFCF | | | | |
| 0,2 | 35,51 | 37,04 | 38,12 | 38,94 |
| 0,4 | 30,33 | 32,74 | 34,79 | 35,54 |
| 0,6 | 25,12 | 28,18 | 31,24 | 32,03 |
| 0,8 | 19,98 | 23,63 | 24,54 | 27,58 |

Bảng 6. Tải tới hạn của tấm nano phụ thuộc vào α_n , $k_w^* = 10^4$, $k_s^* = 10$, $f_{14}^* = 1$.

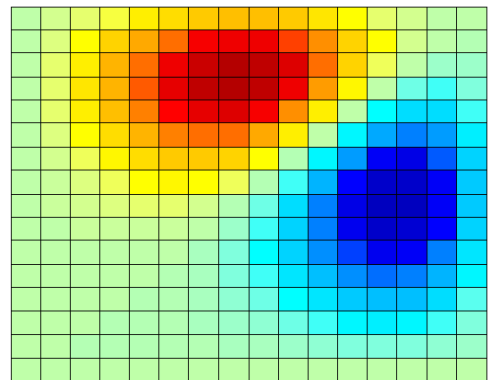
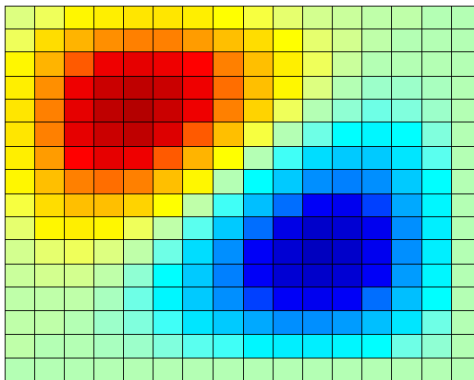
| α_n | SSSS | CCCC | CSCS | CFCF |
|------------|------|------|------|------|
| 0,2 | 6,50 | 6,91 | 6,69 | 3,94 |

| | | | | |
|-----|------|------|------|------|
| 0,4 | 5,66 | 6,22 | 5,90 | 3,50 |
| 0,6 | 4,80 | 5,46 | 5,06 | 3,04 |
| 0,8 | 3,94 | 4,66 | 4,23 | 2,58 |

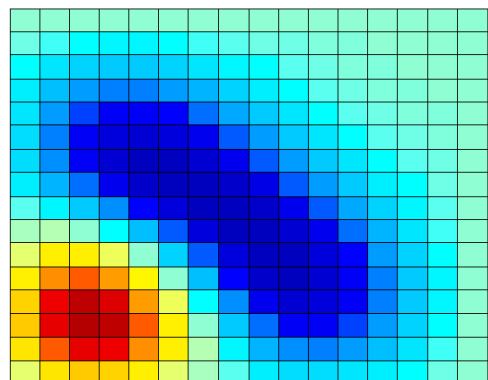
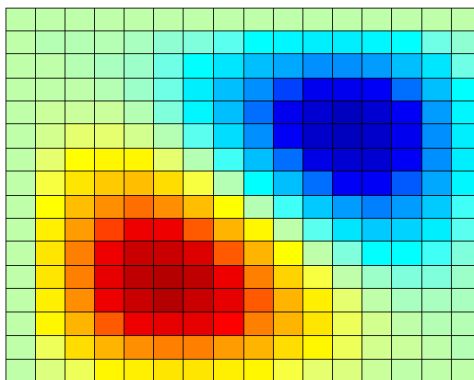
Dạng 1

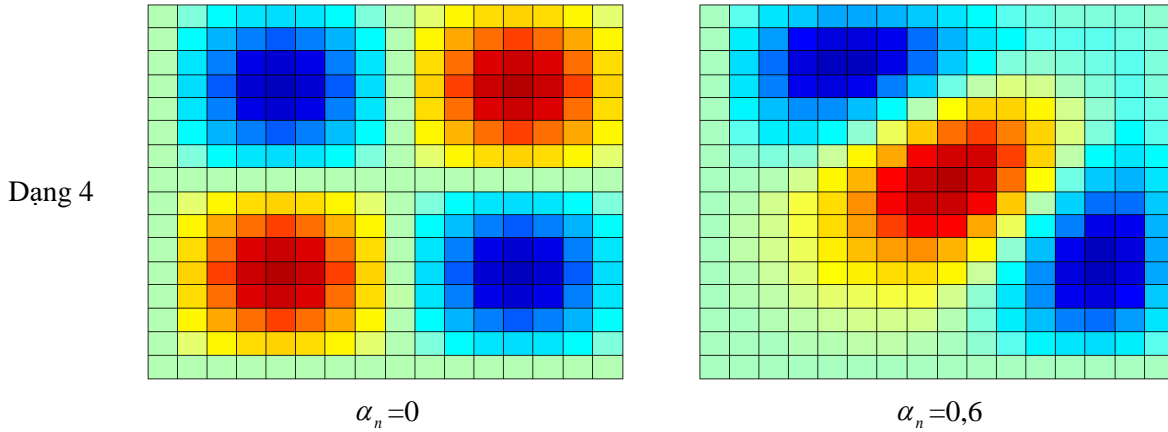


Dạng 2



Dạng 3





Hình 2. Bốn dạng dao động riêng đầu tiên của tấm nano trong trường hợp bỏ qua α_n và $\alpha_n = 0,6$,
 $f_{14}^* = 1$, $n_w^* = 10^4$, $n_s^* = 10$.

Trong các bảng 7-8 trình bày kết quả tính toán tần số dao động riêng đầu tiên và tải tới hạn của tấm nano phụ thuộc vào chiều dày tấm và tỷ lệ b/a . Khi chiều dày tấm càng tăng lên, thì tần số dao động riêng của tấm nano càng giảm, nhưng tải tới hạn gây mất ổn định của tấm nano lại tăng lên, điều này là do cả độ cứng và khối lượng của tấm đều tăng lên, nhưng độ cứng tăng chậm hơn so với sự tăng lên của khối lượng nên tần số dao động riêng của tấm giảm xuống. Khi tăng tỷ lệ chiều dài hai cạnh tấm nano, tần số dao động riêng của tấm nano giảm xuống và tải tới hạn cũng giảm xuống, điều này cũng chứng tỏ rằng khả năng chịu tải nén của tấm nano kém hơn.

Bảng 7. Tần số dao động riêng đầu tiên của tấm nano phụ thuộc vào chiều dày tấm và tỷ lệ

$$b/a, \alpha_n = 0,5, k_w^* = 10^4, k_s^* = 10, f_{14}^* = 1.$$

| a/h | $b/a=1$ | $b/a=1,5$ | $b/a=2$ | $b/a=2,5$ |
|-------|---------|-----------|---------|-----------|
| SSSS | | | | |
| 20 | 20,23 | 19,38 | 18,94 | 18,65 |
| 40 | 26,43 | 25,63 | 25,20 | 24,92 |
| 50 | 29,11 | 28,30 | 27,86 | 27,57 |
| 60 | 31,60 | 30,77 | 30,31 | 30,02 |
| CCCC | | | | |
| 20 | 22,36 | 20,92 | 20,37 | 20,02 |
| 40 | 27,54 | 26,56 | 26,04 | 25,71 |
| 50 | 30,12 | 29,15 | 28,62 | 28,28 |
| 60 | 32,54 | 31,55 | 31,01 | 30,67 |
| CSCS | | | | |
| 20 | 21,33 | 20,50 | 20,06 | 19,77 |
| 40 | 26,98 | 26,19 | 25,76 | 25,48 |
| 50 | 29,61 | 28,80 | 28,36 | 28,08 |

| a/h | $b/a=1$ | $b/a=1,5$ | $b/a=2$ | $b/a=2,5$ |
|-------|---------|-----------|---------|-----------|
| 60 | 32,06 | 31,23 | 30,78 | 30,48 |
| CFCF | | | | |
| 20 | 19,29 | 19,04 | 18,90 | 18,81 |
| 40 | 25,10 | 24,82 | 24,66 | 24,56 |
| 50 | 27,72 | 27,42 | 27,25 | 27,13 |
| 60 | 30,13 | 29,81 | 29,62 | 29,50 |

Bảng 8. Tải tới hạn của tấm nano phụ thuộc vào chiều dày tấm và tỷ lệ b/a , $\alpha_n=0,5$, $k_w^*=10^4$, $k_s^*=10$, $f_{14}^*=1$.

| a/h | SSSS | CCCC | CSCS | CFCF |
|-----------|-------|-------|-------|-------|
| $b/a=1$ | | | | |
| 20 | 18,39 | 22,86 | 19,98 | 10,91 |
| 40 | 6,92 | 7,86 | 7,29 | 4,17 |
| 50 | 5,23 | 5,84 | 5,48 | 3,27 |
| 60 | 4,24 | 4,67 | 4,43 | 2,74 |
| $b/a=1,5$ | | | | |
| 20 | 17,83 | 21,24 | 19,34 | 10,83 |
| 40 | 6,71 | 7,51 | 7,10 | 4,16 |
| 50 | 5,07 | 5,59 | 5,33 | 3,27 |
| 60 | 4,09 | 4,47 | 4,30 | 2,74 |
| $b/a=2$ | | | | |
| 20 | 17,42 | 20,42 | 18,92 | 10,80 |
| 40 | 6,49 | 7,23 | 6,92 | 4,16 |
| 50 | 4,83 | 5,34 | 5,15 | 3,26 |
| 60 | 3,75 | 4,07 | 4,03 | 2,73 |
| $b/a=2,5$ | | | | |
| 20 | 17,05 | 19,88 | 18,61 | 10,80 |
| 40 | 6,08 | 6,88 | 6,65 | 4,14 |
| 50 | 4,12 | 4,35 | 4,32 | 3,20 |
| 60 | 2,96 | 3,09 | 3,06 | 2,63 |

5. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày nghiên cứu dao động riêng và ổn định của tấm nano tựa trên nền đàn hồi biến đổi và có kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric. Phương pháp phần tử hữu hạn được sử dụng trong nghiên cứu này được xây dựng từ lý thuyết biến dạng cắt bậc ba kiểu mới và phần tử bốn nút, trong đó mỗi nút gồm sáu bậc tự do. Bằng việc so sánh với các kết quả đã

được trình bày trong các nghiên cứu trước đây, nghiên cứu này đã kiểm tra độ hội tụ của phương pháp tính cũng như khẳng định sự tin cậy của giải thuật phần tử hữu hạn đã xây dựng. Trên cơ sở đó, bài báo khảo sát ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hình học, điều kiện biên, nền đàn hồi đến đáp ứng dao động riêng và tải tới hạn của tấm nano, và bài báo cũng chỉ ra rằng tham số độ cứng đặc trưng cho sự biến đổi của nền đàn hồi có ảnh hưởng đến cả giá trị tần số và tải tới hạn, đồng thời cũng ảnh hưởng đến các dạng dao động riêng của tấm nano. Đây là nghiên cứu đóng vai trò là cơ sở khoa học có giá trị để tiến hành nghiên cứu những vấn đề phức tạp hơn cũng như tham khảo khi tính toán, thiết kế và sử dụng các tấm nano một cách hiệu quả nhất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. D. H. Doan, A. M. Zenkour, D. V. Thom, Finite element modeling of free vibration of cracked nanoplates with flexoelectric effects, *Eur. Phys. J. Plus*, 137 (2022) 1-15. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-02631-9>
- [2]. L. M. Thai, D. T. Luat, V. B. Phung, P. V. Minh, D. V. Thom, Finite element modeling of mechanical behaviors of piezoelectric nanoplates with flexoelectric effects, *Arch. Appl. Mech.*, 92 (2022) 163–182. <https://doi.org/10.1007/s00419-021-02048-3>
- [3]. N. C. Tho, N. T. Thanh, T. D. Tho, P. V. Minh, L. K. Hoa, Modelling of the flexoelectric effect on rotating nanobeams with geometrical imperfection, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 43 (2021) 510. <https://doi.org/10.1007/s40430-021-03189-w>
- [4]. T.V. Ke, D.V. Thom, N.T. Dung, N.V. Chinh, P.V. Minh, Galerkin-Vlasov approach for bending analysis of flexoelectric doubly-curved sandwich nanoshells with piezoelectric/FGP/piezoelectric layers using the nonlocal strain theory, *Acta Mech. Sin.*, 41 (2025) 123543. <https://doi.org/10.1007/s10409-024-23543-x>
- [5]. T.V. Ke, P.V. Minh, N.T. Dung, L.M. Thai, D.V. Thom, Flexoelectric effect on bending and free vibration behaviors of piezoelectric sandwich FGP nanoplates via nonlocal strain gradient theory, *J. Vib. Eng. Technol.*, 12 (2024) 6567-6596. <https://doi.org/10.1007/s42417-023-01270-3>
- [6]. N. Zhang, S. Zheng, D. Chen, Size-dependent static bending, free vibration and buckling analysis of curved flexomagnetic nanobeams, *Meccanica*, 57 (2022) 1505–1518. <https://doi.org/10.1007/s11012-022-01506-8>
- [7]. D. M. Tien, D. V. Thom, P.V. Minh, N.C. Tho, T.N. Doan, D.N. Mai, The application of the nonlocal theory and various shear strain theories for bending and free vibration analysis of organic nanoplates, *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 52 (2024) 588-610. <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2186893>
- [8]. R. P. Shimpi, Refined plate theory and its variants, *AIAA J*, 40 (2002) 137–146. <https://doi.org/10.2514/3.15006>
- [9]. A. S. Sayyad, Y. M. Ghugal, Effects of nonlinear hygrothermomechanical loading on bending of FGM rectangular plates resting on two-parameter elastic foundation using four-unknown plate theory, *J. Ther. Stress*, 42 (2019) 213–232. <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1469962>
- [10]. D.M. Tien, D.V. Thom, P.V. Minh, N.C. Tho, T.N. Doan, D.N. Mai, The application of the nonlocal theory and various shear strain theories for bending and free vibration analysis of organic nanoplates, *Mech. Based Des. Struct. Mach.* (2023). <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2186893>
- [11]. R. Aghababaei, J. N. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *J. Sound Vib.*, 326 (2009) 277–289. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.044>
- [12]. H. Akhavan, S.H. Hashemi, H.R.D. Taher, A. Alibeigloo, S.Vahabi, Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part I: Buckling analysis, *Comp. Mat. Sci.*, 44 (2009) 968–978.

- [13]. K.Y.Lam, C. M. Wang, X.Q He, Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions, Eng. Structures, 22 (2000). [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(98\)00116-3](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(98)00116-3).