



## NUMERICAL SIMULATION OF THE BEHAVIOR OF STEEL FIBER REINFORCED CONCRETE USING THE PHASE FIELD METHOD COMBINED WITH COHESIVE ZONE MODEL

Le Gia Khuyen<sup>1</sup>, Nguyen Hoang Quan<sup>2\*</sup>, Tran Bao Viet<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Campus in Ho Chi Minh City, University of Transport and Communications, No 450-451 Le Van Viet Street, Thu Duc City, Ho Chi Minh City, Vietnam

<sup>2</sup>University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Ha Noi, Vietnam

### ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 01/05/2024

Revised: 30/05/2024

Accepted: 11/06/2024

Published online: 15/06/2024

<https://doi.org/10.47869/tcsj.75.5.16>

\* Corresponding author

Email: quannah\_ktxd@utc.edu.vn; Tel: +84912907227

**Abstract.** Steel fiber-reinforced concrete is a special type of concrete in which steel fibers are randomly distributed within the concrete. Thanks to the presence of steel fibers, through mechanisms like debonding and fiber bridging, forces can still be transmitted within the concrete after cracks appear, thereby increasing its ductility and enhancing energy absorption capacity. The article aims to present a new simulation model that combines the phase field theory with the cohesive zone model to simulate the phenomena of debonding and crack bridging through steel fibers. In this method, cracks and interfacial transition zones are described by a scalar field ranging from 0 to 1. The jump displacement due to debonding in the interface is described through an additional displacement field. As a result, the behavior laws in the interface can be easily integrated into the model. The simulation results demonstrate the influence of the parameters of the interface on the propagation of cracks. At the same time, the simulation model allows for a visual description of the phenomena of debonding and crack bridging of steel fibers, thereby demonstrating the role of steel fibers in increasing the ductility of concrete. The simulation model also demonstrates the directional influence of steel fibers on the load-bearing capacity of the specimen.

**Keywords:** phase-field method, Steel Fiber Reinforced Concrete (SFRC), interface, debonding and fiber bridging.



## MÔ PHỎNG SỐ ỨNG XỬ CỦA BÊ TÔNG CỐT SỢI THÉP BẰNG PHƯƠNG PHÁP TRƯỜNG PHA KẾT HỢP LÝ THUYẾT MIỀN KẾT DÍNH

Lê Gia Khuyến<sup>1</sup>, Nguyễn Hoàng Quân<sup>2\*</sup>, Trần Bảo Việt<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Phân hiệu tại Thành phố Hồ Chí Minh, Trường Đại học Giao thông vận tải, 450-451 Lê Văn Việt, Tp. Thủ Đức, Tp. Hồ Chí Minh, Việt Nam

<sup>2</sup>Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

### THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 01/05/2024

Ngày nhận bài sửa: 30/05/2024

Ngày chấp nhận đăng: 11/06/2024

Ngày xuất bản Online: 15/06/2024

<https://doi.org/10.47869/tcsj.75.5.16>

\* Tác giả liên hệ

Email: quannah\_ktxd@utc.edu.vn; Tel: +84912907227

**Tóm tắt.** Bê tông cốt sợi thép là một loại bê tông đặc biệt trong đó các sợi thép được phân bố ngẫu nhiên trong bê tông. Nhờ sự có mặt của các sợi thép, thông qua cơ chế bong tách và vết nứt bắc cầu, lực vẫn truyền được trong bê tông sau khi vết nứt xuất hiện, từ đó làm tăng tính dẻo, tăng khả năng hấp thụ năng lượng cho bê tông. Bài báo nhằm mục đích trình bày mô hình mô phỏng mới kết hợp lý thuyết trường pha với lý thuyết miền kết dính nhằm mô phỏng hiện tượng bong tách và vết nứt bắc cầu qua sợi thép. Trong phương pháp này, vết nứt và miền tiếp xúc được miêu tả bằng một trường vô hướng nhận giá trị từ 0 đến 1. Bước nhảy chuyển vị do bong tách ở miền tiếp xúc được miêu tả thông qua một trường chuyển vị phụ thêm. Nhờ đó, các quy luật ứng xử ở miền tiếp xúc được dễ dàng tích hợp vào mô hình. Kết quả của mô hình mô phỏng cho thấy ảnh hưởng của các tham số của miền tiếp xúc tới sự lan truyền của vết nứt. Đồng thời, mô hình mô phỏng cho phép miêu tả một cách trực quan hiện tượng bong tách và bắc cầu của sợi thép, từ đó cho thấy được vai trò của sợi thép trong việc tăng tính dẻo cho bê tông. Mô hình mô phỏng cũng cho thấy ảnh hưởng phương của sợi thép tới khả năng chịu lực của mẫu.

**Từ khóa:** phương pháp trường pha, bê tông cốt sợi thép, miền tiếp xúc, bong tách và vết nứt bắc cầu.

@2024 Trường Đại học Giao thông vận tải

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hiện nay, bê tông là loại vật liệu được sử dụng phổ biến trong ngành xây dựng do có nhiều ưu điểm như khả năng chịu nén lớn, độ bền cao, dễ dàng tạo hình và giá thành rẻ. Có nhiều loại bê tông khác nhau như: bê tông cường độ cao, bê tông rỗng thoát nước, bê tông tự đầm ... Trong đó, bê tông cốt sợi thép phân tán (BTCST) là loại bê tông đặc biệt trong đó cốt sợi thép được phân bố ngẫu nhiên trong đá xi măng. Sự có mặt của sợi thép cải thiện khả năng chịu kéo sau nứt và khả năng hấp thụ năng lượng của đá xi măng [1–4]. Loại vật liệu này có rất nhiều ứng dụng, bao gồm vỏ hầm, nền sàn của các công trình công nghiệp lớn, công trình ổn định mái dốc, mặt đường và lớp phủ bề mặt.

Trong BTCST, khi vết nứt hình thành trong đá xi măng và gặp sợi thép, hai hiện tượng có thể xảy ra: sợi bị bong tách khỏi đá xi măng (fiber debonding) hoặc vết nứt bắc cầu qua sợi (fiber bridging). Trong đó, nhiều nghiên cứu đã chỉ ra rằng hiện tượng vết nứt bắc cầu qua sợi là cơ chế hoạt động chính của bê tông cốt sợi thép, giúp lực vẫn truyền được trong bê tông sau khi nứt, làm tăng khả năng hấp thụ, giảm tính giòn của bê tông [5, 6].

Về mặt phương pháp số, hai phương pháp chính dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn được sử dụng hiện nay cho BTCST là phương pháp rời rạc (discrete element) và bán rời rạc (semi-discrete element). Trong phương pháp rời rạc, sợi thép được miêu tả bằng phần tử thanh, bê tông được miêu tả bằng phần tử phẳng trong bài toán 2 chiều và phần tử khối trong bài toán 3 chiều [7, 8]. Các nghiên cứu này đưa ra giả thiết dính bám giữa bê tông và sợi thép là dính bám tuyệt đối, tương tác giữa bê tông và sợi thép được thể hiện trong luật ứng xử ứng suất – biến dạng của sợi thép. Phương pháp này tương đối phức tạp và đòi hỏi khối lượng tính toán lớn do các điểm chia lưới của sợi thép và bê tông là không tương thích. Nhược điểm kể trên có thể được giảm thiểu trong phương pháp bán rời rạc, trong đó, các sợi không được mô tả bằng phần tử, mà chỉ được miêu tả bằng vị trí trong chất nền bê tông. Khi có vết nứt truyền qua, tại các vị trí của sợi sẽ xuất hiện các lực đặt lên chất nền bê tông để miêu tả hiệu ứng vết nứt bắc cầu qua sợi thép [9, 10]. Các mô hình kể trên đã tính đến tương tác giữa sợi và bê tông, tuy nhiên, các mô hình này cũng chưa cung cấp một cái nhìn trực quan về các hiện tượng bong tách và vết nứt bắc cầu qua sợi thép.

Gần đây, phương pháp trường pha (the phase field method) ngày càng được sử dụng nhiều do có thể dễ dàng mô phỏng sự lan truyền của hệ thống vết nứt phức tạp trong bê tông [11,12]. Trong phương pháp này, các vết nứt được miêu tả bằng một trường vô hướng nhận giá trị trong khoảng từ 0 đến 1, tương ứng với trạng thái không hư hại và hư hại hoàn toàn của vật liệu. Một số nhà nghiên cứu đã phát triển phương pháp trường pha kết hợp với mô hình miền kết dính (cohesive zone model) nhằm miêu tả ứng xử của vật liệu cốt sợi thép [13] và vật liệu gia cường cốt sợi [14]. Các mô hình này đã miêu tả tương đối tốt các hiện tượng như bong tách, đứt sợi. Tuy nhiên, các mô hình trên chưa thấy thể hiện được hiện tượng vết nứt bắc cầu.

Mục tiêu của bài báo nhằm phát triển phương pháp trường pha kết hợp với mô hình miền kết dính nhằm miêu tả các hiện tượng bong tách và vết nứt bắc cầu trong bê tông cốt sợi thép. Mô hình được xây dựng dựa trên lý thuyết trường pha cho phá hủy dính bám được đề xuất bởi Verhoosel và De Borst [15]. Trong đó, miền tiếp xúc giữa các pha vật liệu thành phần cũng được miêu tả bằng một trường vô hướng nhận giá trị trong khoảng từ 0 đến 1. Nhờ đó, các ứng xử dính bám ở miền tiếp xúc được dễ dàng tích hợp vào trong mô hình. Vị trí của miền tiếp xúc giữa các pha vật liệu được xác định thông qua hàm mức không (zero level set function) được đề xuất bởi Nguyen và các cộng sự [16]. Kết quả thu được từ mô hình được thể hiện thông qua

hai ví dụ số. Ví dụ một thể hiện ảnh hưởng của các tham số của mô hình và các hiệu ứng như bong tách sợi, vết nứt bắc cầu qua sợi, ảnh hưởng phương của sợi được thể hiện trong ví dụ hai.

Cấu trúc của bài báo gồm các phần sau: Cơ sở lý thuyết kết hợp phương pháp trường pha và mô hình miền kết dính, rời rạc hóa bằng phương pháp phần tử hữu hạn được trình bày trong phần 2. Các ví dụ số và thảo luận được trình bày trong phần 3. Cuối cùng là kết luận và kiến nghị.

## 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

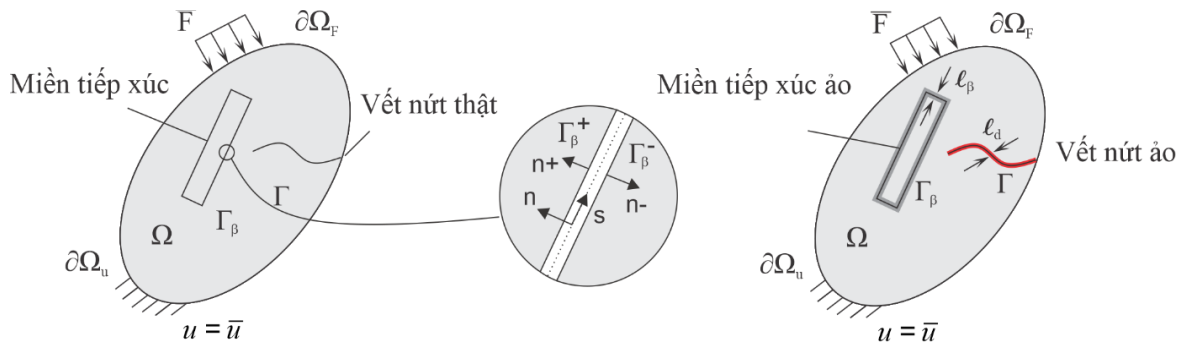
Trong nghiên cứu gần đây [17], cơ sở lý thuyết kết hợp phương pháp trường pha và mô hình miền kết dính đã được giới thiệu đầy đủ. Tính chính xác của mô hình đã được kiểm chứng với mô hình giải tích qua bài toán thanh chịu kéo. Do đó, trong bài báo này, cơ sở lý thuyết của phương pháp sẽ được trình bày tóm tắt. Chúng tôi trình bày chi tiết phần rời rạc hóa và tính toán theo phương pháp phần tử hữu hạn của mô hình.

### 2.1 Chuẩn hóa mặt tiếp xúc và vết nứt

Xét một vật thể  $\Omega \subset \mathbb{R}^D$ ,  $D = 1, 2, 3$  là số chiều không gian.  $\partial\Omega$  là biên của vật thể,  $D = 1, 2, 3$  thể hiện số chiều không gian (hình 1). Vật thể  $\Omega$  gồm có nhiều pha, pha cốt kí hiệu  $\Omega_i$  và pha nền kí hiệu  $\Omega/\Omega_i$ . Miền tiếp xúc giữa các vật liệu thành phần kí hiệu là  $\Gamma_\beta$ . Các pha vật liệu được giả thiết có ứng xử đàn hồi tuyến tính, đặc trưng bởi độ cứng  $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ . Gọi  $\Gamma$  có kích thước  $D - 1$  thể hiện hư hại bên trong miền  $\Omega$ . Gọi năng lượng phá hủy các pha và năng lượng phá hủy miền tiếp xúc giữa các pha lần lượt là  $g_c(\mathbf{x})$ ,  $G(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \kappa)$ . Trong đó,  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$  là bước nhảy chuyển vị tại miền tiếp xúc khi có hiện tượng bong tách xảy ra,  $\kappa$  là hệ số lịch sử tải trọng. Tổng năng lượng của vật thể nhiều pha có chứa vết nứt được tính theo công thức sau:

$$E = \int_{\Omega/\Gamma} \psi^e(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} g_c d\Gamma + \int_{\Gamma_\beta} G(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \kappa) d\Gamma_\beta. \quad (1)$$

Trong phương trình (1),  $\psi^e$  là mật độ năng lượng đàn hồi.



Hình 1. Chuẩn hóa vết nứt và miền tiếp xúc.

Mối quan hệ giữa lực kéo theo phương pháp tuyến  $t_n$  và tiếp tuyến  $t_s$  với bước nhảy chuyển vị theo phương pháp tuyến  $\llbracket u_n \rrbracket$  và tiếp tuyến  $\llbracket u_s \rrbracket$  trên miền tiếp xúc như dưới đây.

$$t_n = \frac{G_u}{\delta_n} \frac{\llbracket u_n \rrbracket}{\delta_n} \exp\left(-\frac{\llbracket u_n \rrbracket}{\delta_n}\right) \exp\left(-\frac{\llbracket u_s \rrbracket^2}{\delta_s^2}\right) \quad (2)$$

$$t_s = \frac{2G_u}{\delta_s} \frac{\llbracket u_s \rrbracket}{\delta_s} \left(1 + \frac{\llbracket u_n \rrbracket}{\delta_n}\right) \exp\left(-\frac{\llbracket u_n \rrbracket}{\delta_n}\right) \exp\left(-\frac{\llbracket u_s \rrbracket^2}{\delta_s^2}\right)$$

Trong đó,  $\delta_n$  và  $\delta_s$  là các tham số độ dài được tính theo bằng  $\delta_n = G_u/(t_u e)$  và  $\delta_s = G_u/(t_u \sqrt{\frac{1}{2}} e)$  với  $e = \exp(1)$ ,  $t_u$  và  $G_u$  là cường độ chịu kéo và năng lượng phá hủy tại miền tiếp xúc.

Như đã đề cập ở [17], nhờ kỹ thuật chuẩn hóa, các miền không liên tục như vết nứt, miền tiếp xúc được mô tả bằng bằng các trường vô hướng nhận giá trị trong khoảng từ 0 đến 1, gọi là trường ảo. Theo đó, vết nứt, miền tiếp xúc thật được mô tả thông qua trường vô hướng được gọi là vết nứt ảo, miền tiếp xúc ảo. Cụ thể, vết nứt  $\Gamma$  được miêu tả bằng trường vô hướng vô hướng  $d(\mathbf{x})$ , gọi là trường pha, nhận giá trị 1 trên miền  $\Gamma$  và nhận giá trị bằng 0 khi tiến xa miền  $\Gamma$ . Tương tự, miền tiếp xúc  $\Gamma_\beta$  được miêu tả qua trường vô hướng  $\beta(\mathbf{x})$  nhận giá trị 1 tại miền tiếp xúc và nhận giá trị bằng 0 khi tiến xa miền tiếp xúc. Gọi  $\gamma_d(d, \nabla d)$  và  $\gamma_\beta(\beta, \nabla \beta)$  lần lượt là hàm mật độ vết nứt và mật độ miền tiếp xúc trên một đơn vị thể tích. Bước nhảy chuyển vị  $[[\mathbf{u}]]$  được thay thế bằng trường chuyển vị phụ thêm  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  được xác định trên toàn miền vật thể. Từ đó, phương trình (1) có thể được viết lại dưới dạng như sau:

$$E = \int_{\Omega} \left( g(d)\psi^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g_c \gamma_d(d, \nabla d) + G(\mathbf{v}, \kappa) \gamma_\beta(\beta, \nabla \beta) + \alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} \right) d\Omega. \quad (3)$$

Trong đó,  $\alpha$  là hằng số nhận giá trị dương, được đưa vào nhằm đảm bảo điều kiện là trường phụ thêm  $\mathbf{v}$  là hằng số theo phương vuông góc với vết nứt.  $g(d) = (1 - d)^2 + k$ , là hàm hư hại, đặc trưng cho sự suy giảm độ cứng khi có vết nứt xuất hiện,  $k$  là số thực rất bé, để đảm bảo điều kiện ổn định của bài toán khi vật thể bị hư hại hoàn toàn.

Áp dụng nguyên lý tiêu hao năng lượng tối đa và cực tiểu năng lượng cho phương trình (3), ta thu được các phương trình cho phép xác định trường pha  $d(\mathbf{x})$ , trường chuyển vị  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  và trường chuyển vị phụ thêm  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , như dưới đây:

Trường pha  $d(\mathbf{x})$ :

$$\begin{cases} 2(1 - d) \mathcal{H} - \frac{g_c}{\ell_d} (d - \ell_d^2 \Delta d) = 0 & (\Omega) \\ d(\mathbf{x}) = 1 & (\Gamma) \\ \nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (4)$$

Trường chuyển vị  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  và trường chuyển vị phụ thêm  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, d) = \mathbf{0} & (\Omega) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} & (\partial\Omega_u) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{F}} & (\partial\Omega_F) \\ \gamma_\beta(\mathbf{t}(\mathbf{v}, \kappa) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = \alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} & (\Gamma_\beta) \\ \frac{\partial \mathbf{v}(x_c)}{\partial x_n} = 0 & (\partial\Gamma_\beta) \end{cases} \quad (5)$$

Trong phương trình (4),  $\mathcal{H}$  là hàm lịch sử mật độ năng lượng biến dạng, được tính theo công thức sau:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \max_{\tau \in [0, t]} \{\psi^{e+}(\mathbf{x}, \tau)\}. \quad (6)$$

Trong đó,  $\psi^{e+}$  là phần chịu kéo của năng lượng mật độ đàn hồi, với giả thiết hư hại chỉ sinh ra do chịu kéo, được định nghĩa như sau:

$$\psi^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(d)\psi^{e+}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \psi^{e-}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (7)$$

Với

$$\psi^{e\pm}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\lambda}{2} [\langle \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \rangle_{\pm}]^2 + \mu \text{Tr}\{(\boldsymbol{\varepsilon}^{\pm})^2\} \quad (8)$$

$\lambda, \mu$  là các hằng số Lamé

$\boldsymbol{\varepsilon}^e$  là ten-xơ biến dạng, được phân tách thành biến dạng kéo  $\boldsymbol{\varepsilon}^{e+}$  và biến dạng nén  $\boldsymbol{\varepsilon}^{e-}$ .

Ứng suất Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  trong phương trình (5) được định nghĩa như sau:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = g(d)(\lambda \langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle_+ \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^{e+}) + (\lambda \langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle_- \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^{e-}). \quad (9)$$

Trong đó, biến dạng đàn hồi được thể hiện như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p = \nabla \mathbf{u} - \mathbf{n}^{\Gamma\beta} \otimes^s \mathbf{v} \gamma_{\beta}(\boldsymbol{\beta}, \nabla \boldsymbol{\beta}). \quad (10)$$

Bằng cách sử dụng biến phân trong trường pha, chuyển vị và trường chuyển vị phụ thêm, chúng ta thu được biểu thức dạng yếu (weak form) như sau:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \left( 2\mathcal{H} + \frac{g_c}{\ell_d} \right) d \delta d + g_c \ell_d \nabla d \cdot \nabla d(\delta d) \right\} d\Omega &= \int_{\Omega} 2 \delta \mathcal{H} d d \Omega \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e(\delta \mathbf{u}) d\Omega &= \int_{\partial \Omega_F} \bar{\mathbf{F}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \left\{ \gamma_{\beta}(\mathbf{t}(\mathbf{v}, \kappa) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p(\delta \mathbf{v})) - \alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial x_n} \right\} d\Omega &- \int_{\partial \Gamma_{\beta}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} \delta \mathbf{v} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

## 2.2 Rời rạc hóa bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Trường pha, trường chuyển vị và chuyển vị phụ thêm được rời rạc hóa bằng phương pháp phần tử hữu hạn như sau:

$$\begin{aligned} d &= \mathbf{N}_d \mathbf{d}^{el} \rightarrow \frac{\partial d}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{B}_d \mathbf{d}^{el} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{N}_u \mathbf{u}^{el} \rightarrow \text{sym} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \mathbf{B}_u \mathbf{u}^{el} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{N}_v \mathbf{v}^{el} \rightarrow \text{sym}(\mathbf{n}^{\Gamma\beta} \otimes^s \mathbf{v}) = \mathbf{B}_v \mathbf{v}^{el}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} = \mathbf{G}_v \mathbf{v}^{el} \end{aligned} \quad (12)$$

Trong đó,  $\mathbf{d}^{el}$ ,  $\mathbf{u}^{el}$ ,  $\mathbf{v}^{el}$  lần lượt là giá trị trường pha, các thành phần trường chuyển vị và chuyển vị phụ thêm tại các nút phần tử.  $\mathbf{N}_d$ ,  $\mathbf{N}_u$ ,  $\mathbf{N}_v$  lần lượt là hàm dạng của trường pha, trường

chuyển vị và chuyển vị phụ thêm.  $\mathbf{B}_d, \mathbf{B}_u, \mathbf{B}_v$  lần lượt là đạo hàm của hàm dạng của trường pha, trường chuyển vị và chuyển vị phụ thêm.

Dựa vào phương trình (12), phương trình phần tử hữu hạn xác định trường pha được biểu diễn như sau:

$$\mathbf{K}_d \mathbf{d} = \mathbf{F}_d. \quad (13)$$

Trong đó,  $\mathbf{d}$  là véc tơ chứa các giá trị trường pha trên toàn miền

$$\mathbf{K}_d = \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{g_c}{\ell_d} + 2\mathcal{H}_n \right) \mathbf{N}_d^T \mathbf{N}_d + g_c \ell_d \mathbf{B}_d^T \mathbf{B}_d \right\} d\Omega. \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_d = \int_{\Omega} 2\mathbf{N}_d^T d\Omega. \quad (15)$$

Tương tự, dựa vào phương trình (12), phương trình phần tử hữu hạn phi tuyến xác định trường chuyển vị và chuyển vị phụ thêm được xác định như sau:

$$\begin{cases} f_{int,u}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f_{ext,u} \\ f_{int,v}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Trong đó, các véc tơ nội lực được xác định như sau:

$$\begin{cases} f_{int,u}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_u^T \mathbb{C} \mathbf{B}_u \mathbf{u} - \gamma_{\beta} \mathbf{B}_u^T \mathbb{C} \mathbf{B}_v \mathbf{v}) d\Omega \\ f_{int,v}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (-\gamma_{\beta} \mathbf{B}_v^T \mathbb{C} \mathbf{B}_u \mathbf{u} + \gamma_{\beta}^2 \mathbf{B}_v^T \mathbb{C} \mathbf{B}_v \mathbf{v} + \gamma_{\beta} \mathbf{N}_v^T \mathbf{t}(\mathbf{v}, \kappa) + \alpha \mathbf{G}_v^T \mathbf{G}_v) d\Omega \end{cases} \quad (17)$$

Hệ phương trình (16) là hệ phương trình phi tuyến do sự có mặt của ứng xử dính bám tại miền tiếp xúc. Hệ phương trình này được giải bằng phương pháp Newton-Raphson với độ cứng tiếp tuyến được xác định như sau:

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \quad (18)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{uv} \\ \mathbf{K}_{vu} & \mathbf{K}_{vv} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} f_{ext,u} - f_{int,u}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ -f_{int,v}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Với

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbb{C} \mathbf{B}_u d\Omega. \\ \mathbf{K}_{uv} &= \int_{\Omega} -\gamma_{\beta} \mathbf{B}_u^T \mathbb{C} \mathbf{B}_v d\Omega \\ \mathbf{K}_{vu} &= \int_{\Omega} -\gamma_{\beta} \mathbf{B}_v^T \mathbb{C} \mathbf{B}_u d\Omega \\ \mathbf{K}_{vv} &= \int_{\Omega} \left( \gamma_{\beta}^2 \mathbf{B}_v^T \mathbb{C} \mathbf{B}_v + \gamma_{\beta} \mathbf{N}_v^T \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{v}, \kappa)}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{N}_v + \alpha \mathbf{G}_v^T \mathbf{G}_v \right) d\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

Việc phân tách biến dạng thành biến dạng kéo và biến dạng nén được thực hiện thông qua ten-xơ chiếu, được định nghĩa như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^e) \approx \wp^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^e): \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \quad (21)$$

và

$$\langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+ \simeq \mathcal{R}^+(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}; \langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_- \simeq \mathcal{R}^-(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}. \quad (22)$$

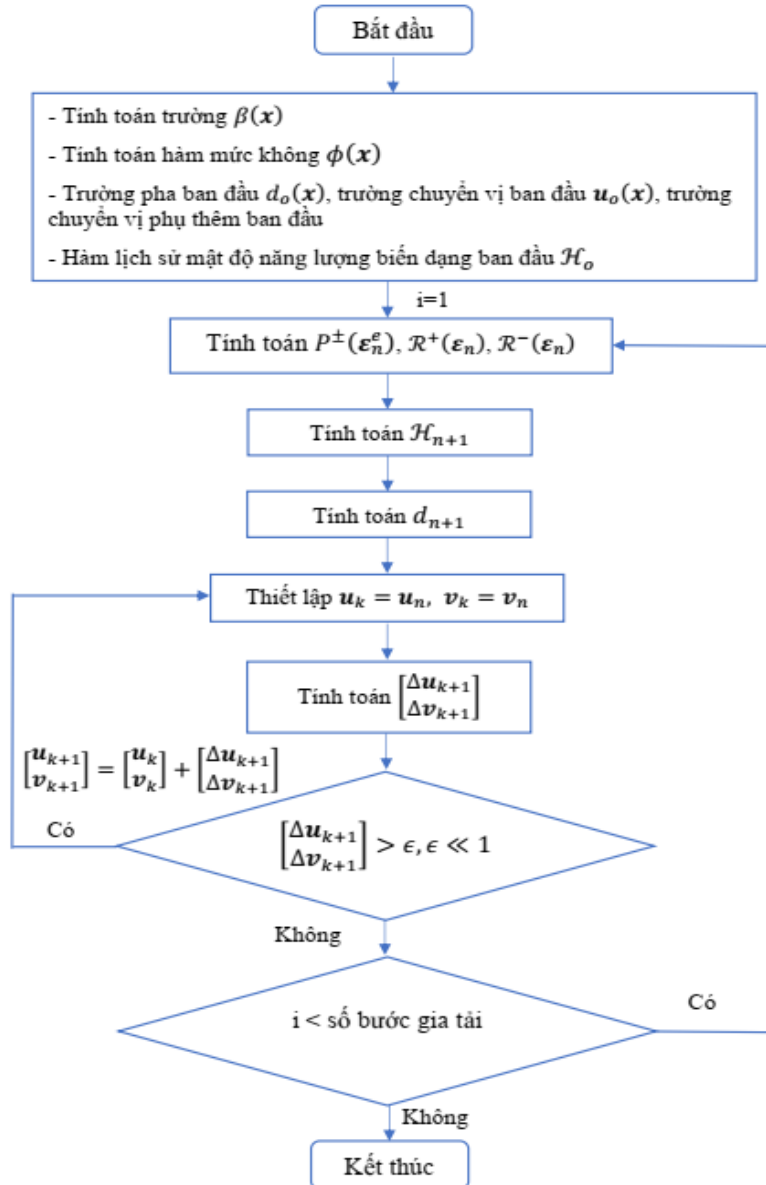
Trong đó

$$\mathcal{R}^+(\boldsymbol{\varepsilon}_n) = \frac{1}{2}(\text{sign}(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_n) + 1), \mathcal{R}^-(\boldsymbol{\varepsilon}_n) = \frac{1}{2}(\text{sign}(-\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_n) + 1). \quad (23)$$

Đặt  $\mathcal{R}^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^e) \equiv \mathcal{R}^{\pm}$  and  $P^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^e) \equiv P^{\pm}$  là ma trận tương ứng với ten-xơ chiều bậc bốn  $\wp$ , khi đó ten-xơ độ cứng đàn hồi được định nghĩa như dưới đây:

$$\mathbb{C}(d) = [g(d)(\lambda \mathcal{R}^+[\mathbf{1}] \cdot [\mathbf{1}] + 2\mu P^+) + (\lambda \mathcal{R}^-[\mathbf{1}] \cdot [\mathbf{1}] + 2\mu P^-)]. \quad (24)$$

Mô hình trường pha kết hợp miền kết dính được lập trình trong phần mềm Matlab với sơ đồ tính toán được trình bày như (hình 2).



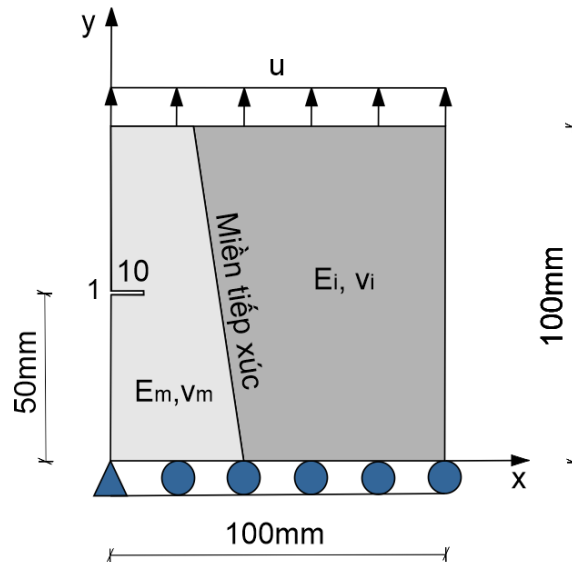
Hình 2. Sơ đồ tính toán.



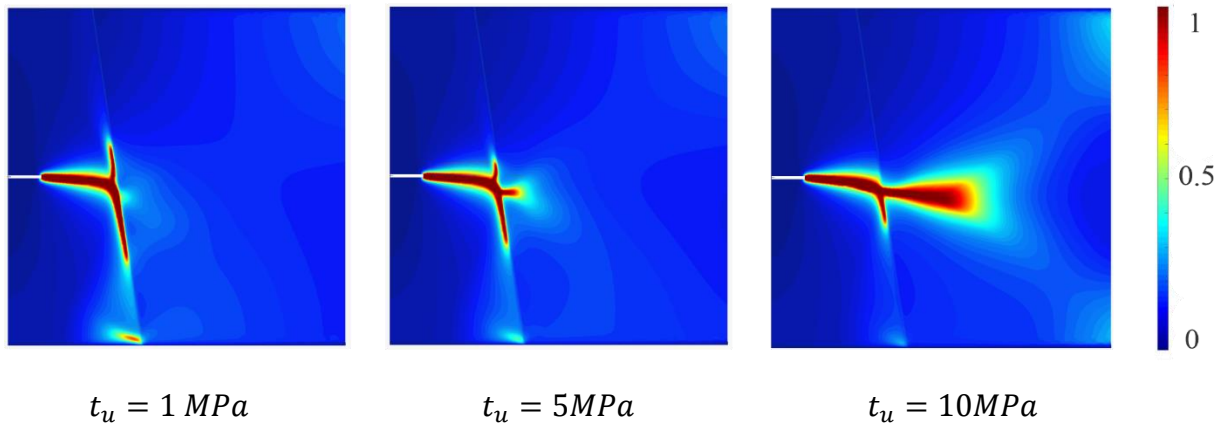
### 3. MÔ PHỎNG SỐ VÀ THẢO LUẬN

Kết quả của mô hình trường pha kết hợp miền kết dính được trình bày ở trên được trình bày thông qua hai ví dụ số. Ví dụ số thứ nhất trình bày ảnh hưởng của một số tham số của mô hình như cường độ dính bám, tham số chiều dày miền tiếp xúc đến dạng lan truyền của vết nứt trong vật liệu nhiều thành phần. Trong ví dụ thứ hai, mô hình được sử dụng để mô phỏng hiệu ứng bong tách và vết nứt bậc cầu qua sợi thép. Ảnh hưởng của góc nghiêng của sợi thép cũng được trình bày trong ví dụ này.

#### 3.1 Ảnh hưởng của một số tham số của mô hình



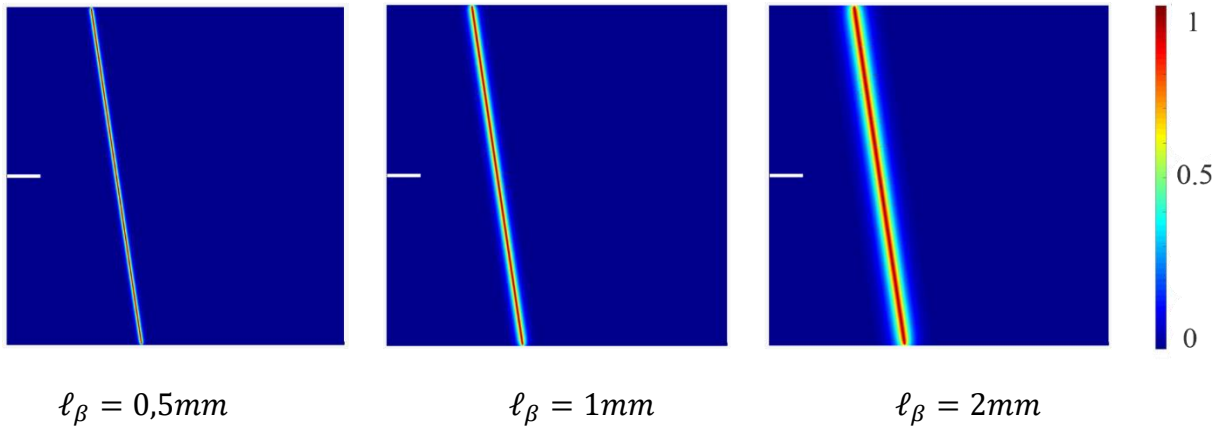
Hình 3. Hình học và điều kiện biên của ví dụ 1.



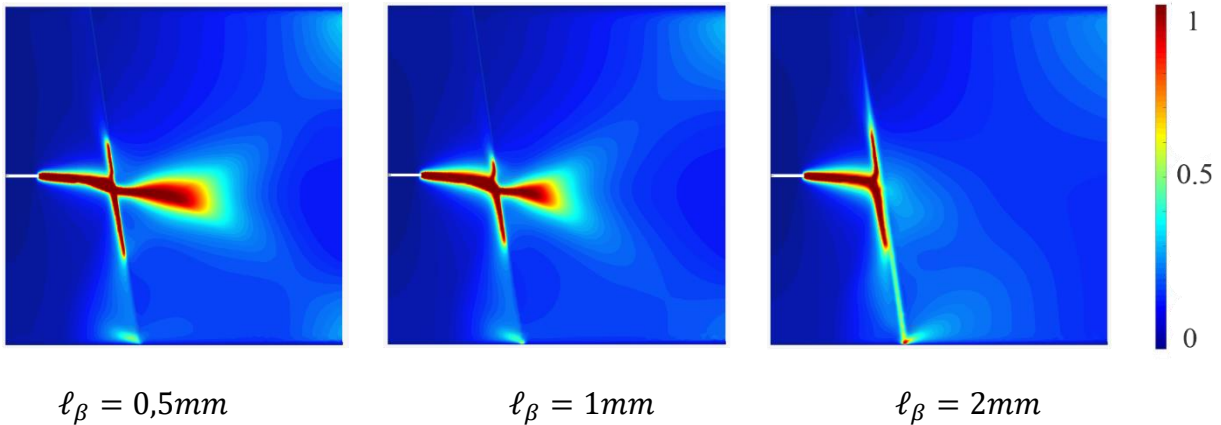
Hình 4. Khảo sát tham số  $t_u$ .

Hình 3 trình bày sơ đồ hình học và điều kiện biên của thí dụ số thứ nhất. Mẫu mô phỏng dạng hình vuông kích thước 100x100 mm có chứa vết nứt môi có chiều dài 10mm, bề rộng 1mm, được cấu tạo từ hai pha vật liệu thành phần gồm có pha nền và pha cốt, kí hiệu lần lượt là “m” và “i”. Các đặc trưng đàn hồi của các pha vật liệu lần lượt là  $E_m = 39 \text{ GPa}$ ,  $\nu_m = 0,19$  và  $E_i = 3E_m$ ,  $\nu_i = 3\nu_m$ . Năng lượng phá hủy của pha nền được lấy bằng  $g_{cm} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kN/mm}$ . Năng lượng phá hủy của pha cốt được giả thiết lấy bằng  $g_{ci} = 5g_{cm}$ . Năng

lượng phá hủy dính bám tại miền tiếp xúc giữa hai pha được giả thiết bằng  $G_u = 0,5g_{cm}$ . Cạnh dưới của mẫu được khống chế chuyển vị theo phương y. Góc trái bên dưới mẫu được khống chế chuyển vị theo phương x. Cạnh trên của mẫu được gia tải kéo bằng chuyển vị tăng dần trong quá trình mô phỏng, bước gia tải chuyển vị được lấy bằng  $\bar{u} = 1 \times 10^{-4} mm$ . Mẫu mô phỏng được rời rạc hóa bằng các phần tử tam giác tuyến tính 3 nút. Kích thước phần tử trong vùng dự kiến vết nứt đi qua được lấy bằng  $h_{min} = 0,25 mm$ , vùng còn lại được lấy bằng  $h_{max} = 0,5 mm$ . Giả thiết biến dạng phẳng.



Hình 5. Trường  $\beta$  ứng với các giá trị  $\ell_\beta$ .



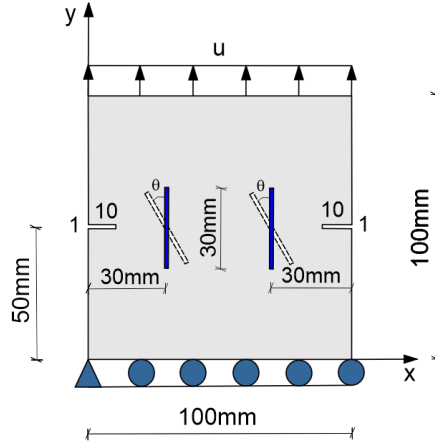
Hình 6. Dạng vết nứt ứng với các giá trị  $\ell_\beta$ .

Trong ví dụ số này, trước tiên, tham số bề rộng vết nứt và bề rộng miền tiếp xúc được lấy bằng nhau,  $\ell_d = \ell_\beta = 0,5mm$ , ba giá trị cường độ dính bám được lựa chọn  $t_u = 1; 5; 10 MPa$ , dựa trên tài liệu tham khảo [13]. Dạng vết nứt ở cùng một mức chuyển vị  $0,045mm$  được thể hiện trên hình 4 (được biểu thị bằng vùng màu đỏ). Nhận thấy rằng, giá trị cường độ dính bám sẽ ảnh hưởng đến sự lan truyền của vết nứt. Vết nứt sẽ lan truyền từ vết nứt mới đến miền tiếp xúc giữa hai pha vật liệu. Khi  $t_u$  nhỏ, vết nứt sẽ lan truyền dọc theo miền tiếp xúc giữa hai pha vật liệu (hiện tượng bong tách). Khi  $t_u$  tăng dần, hiện tượng bong tách ở miền tiếp xúc giảm dần, chiều dài vết nứt đâm xuyên vào vật liệu thứ hai tăng dần. Hiện tượng trên có thể giải thích do khi giá trị  $t_u$  nhỏ, miền tiếp xúc giữa hai vật liệu yếu và ngược lại.

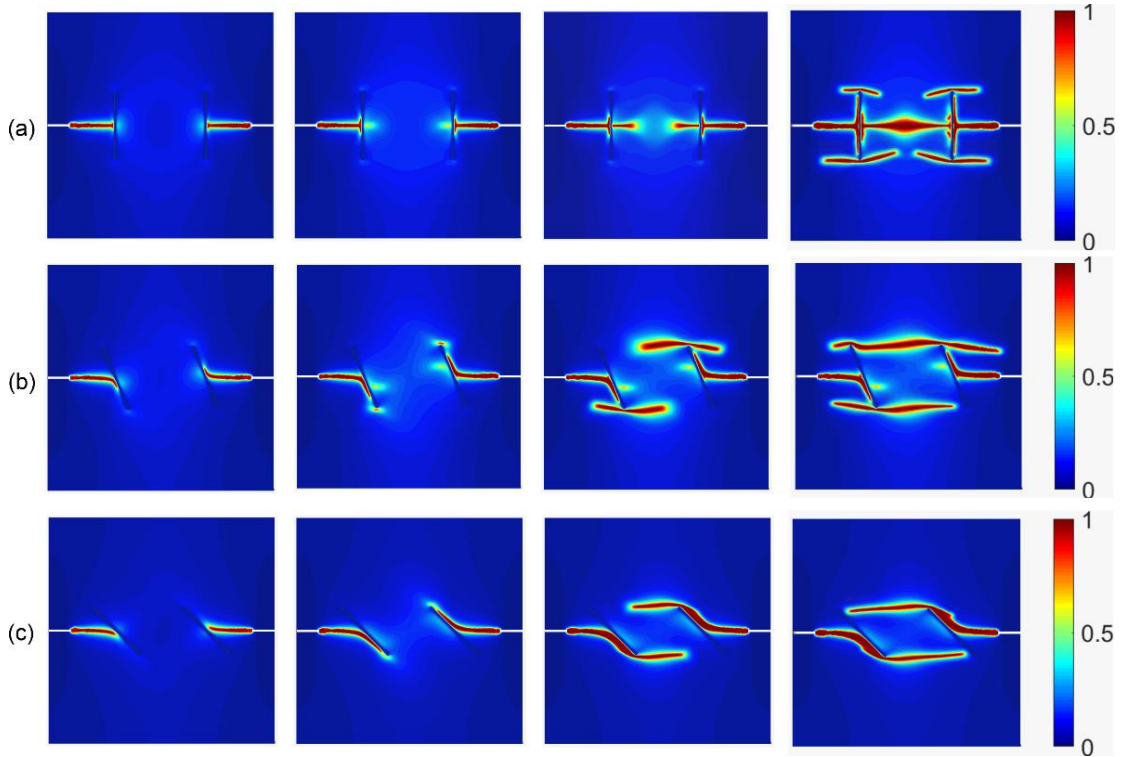
Tiếp đó, tham số bề rộng vết nứt được lấy cố định bằng  $\ell_d = 0,5mm$ , cường độ dính bám được chọn bằng  $t_u = 5 MPa$ , ba giá trị của bề rộng miền tiếp xúc được tiến hành khảo sát

$l_{\beta} = 0,5mm ; 1 mm$  và  $2 mm$  (hình 5). Nhận thấy rằng khi  $l_{\beta}$  lớn thì diện tích miền tiếp xúc càng lớn (được biểu thị bằng vùng màu đỏ). Ảnh hưởng của  $l_{\beta}$  đến dạng vết nứt được thể hiện trên hình 6. Kết quả chỉ ra rằng khi  $l_{\beta}$  lớn (miền tiếp xúc yếu), hiện tượng bong tách đóng vai trò chủ đạo. Khi  $l_{\beta}$  nhỏ (miền tiếp xúc khỏe), hiện tượng bong tách giảm dần, vết nứt sẽ đâm xuyên qua miền tiếp xúc vào vật liệu thứ hai.

### 3.2 Khảo sát phương của sợi



Hình 7. Hình học và điều kiện biên: định nghĩa phương của sợi.



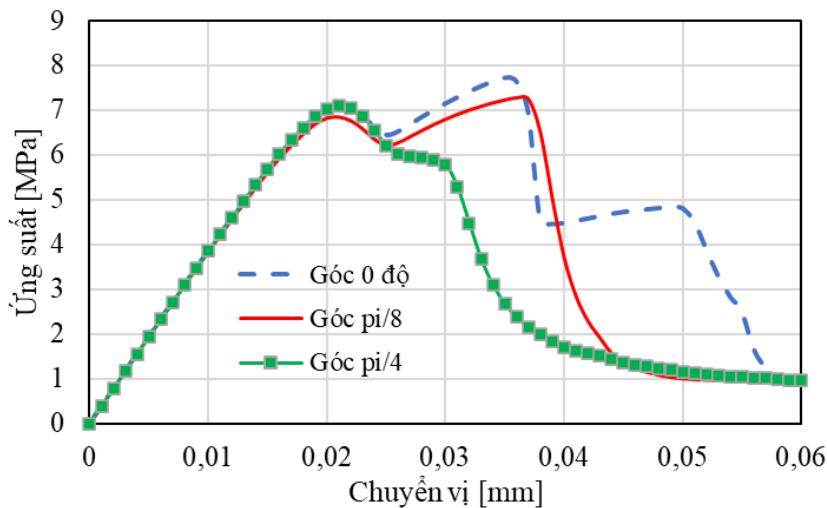
Hình 8. Mẫu vết nứt theo các phương khác nhau của sợi.

Hình 7 trình bày sơ đồ hình học và điều kiện biên của ví dụ số 2. Mẫu mô phỏng hình vuông có kích thước  $100 \times 100 mm$ , có chứa hai vết nứt mỗi có chiều dài  $10mm$ , chiều rộng  $1mm$ . Mẫu mô phỏng có hai sợi thép có kích thước  $30 \times 0,5 mm$  đặt trong chất nền là bê tông.

Vị trí và phương của sợi thép được thể hiện trên hình 7. Ba góc nghiêng của sợi được chọn để mô phỏng  $\theta = 0^\circ; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}$ . Điều kiện biên về không chế chuyển vị và gia tải của ví dụ 2 tương đồng với ví dụ 1. Các đặc trưng đàn hồi của vật liệu được lấy như sau, đối với pha nền là bê tông,  $E_m = 39 \text{ GPa}$ ,  $\nu_m = 0,19$  đối với sợi thép  $E_i = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu_i = 0,3$ . Năng lượng phá hủy của sợi thép và bê tông được lấy lần lượt bằng  $g_{ci} = 1.10^{-2} \text{ kN/mm}$  và  $g_{cm} = 2.10^{-5} \text{ kN/mm}$ , dựa trên tài liệu tham khảo [18]. Năng lượng phá hủy của miền tiếp xúc giữa bê tông và sợi thép được lấy bằng  $G_u = 0,5g_{cm}$ . Tham số chiều dày vết nứt và chiều dày miền tiếp xúc được chọn bằng nhau và bằng  $\ell_\alpha = \ell_\beta = 0,5 \text{ mm}$ , cường độ dính bám được chọn bằng  $t_u = 1 \text{ MPa}$ .

Hình 8a thể hiện hiện tượng vết nứt bắc cầu qua sợi thép ứng với trường hợp  $\theta = 0^\circ$ . Đầu tiên, hai vết nứt lan truyền từ vết nứt môi đến sợi thép. Khi gặp sợi thép, hiện tượng bong tách xảy ra. Tiếp đó, hai vết nứt xuất hiện ở hai bên của sợi thép và lan truyền vào giữa. Đây chính là hiện tượng vết nứt bắc cầu qua sợi thép. Cuối cùng một số vết nứt xuất hiện ở các cạnh của sợi thép và tiếp tục phát triển.

Hình 8b,c thể hiện sự lan truyền của vết nứt ứng với trường hợp  $\theta = \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}$ . Tương tự trường hợp  $\theta = 0^\circ$ , đầu tiên khi vết nứt gặp sợi, hiện tượng bong tách xảy ra. Trong trường hợp  $\theta = \frac{\pi}{8}$ , quan sát thấy rằng, sau khi có hiện tượng bong tách, có hai vết nứt xuất hiện, vết nứt ở mặt còn lại của sợi (hiện tượng bắc cầu) và ở góc của sợi. Tiếp đó, vết nứt ở góc của sợi phát triển nhanh hơn và làm phá hoại mẫu. Trong trường hợp  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , vết nứt do bong tách từ hai sợi thép phát triển thành vết nứt lớn làm phá hoại mẫu. Trong trường hợp này, hiện tượng vết nứt bắc cầu không xuất hiện.



Hình 9. So sánh đường cong ứng suất–chuyển vị.

Hình 9 thể hiện đường cong ứng suất và chuyển vị của ba mẫu mô phỏng ứng với các góc nghiêng khác nhau. Kết quả cho thấy rằng, khi  $\theta = 0^\circ$ , mẫu mô phỏng có khả năng chịu lực lớn nhất. Điều này có thể dễ dàng giải thích bởi sợi thép nằm cùng phương với phương của ứng suất kéo chính. Khả năng chịu lực của mẫu giảm dần khi tăng góc nghiêng của sợi. Đường cong ứng suất chuyển vị cũng thể hiện tính “đẻo” của các mẫu mô phỏng. Sau khi kết thúc giai đoạn ứng xử đàn hồi, ứng với khi vết nứt bắt đầu lan truyền, hai trường hợp  $\theta = 0^\circ; \frac{\pi}{8}$  cho thấy rằng

khả năng chịu lực của mẫu tiếp tục tăng lên. Cả ba trường hợp  $\theta = 0^{\circ}; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}$ , quan sát thấy rằng giá trị ứng suất của cả ba mẫu đều giảm từ từ. Như vậy, mô hình mô phỏng đã thể hiện được vai trò của sợi thép trong việc tăng tính dẻo của bê tông.

#### 4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, mô hình trường pha kết hợp với miền kết dính được phát triển nhằm mô phỏng hiện tượng bong tách và vết nứt bắc cầu qua sợi thép. Đây là lần đầu tiên hiện tượng vết nứt bắc cầu qua sợi thép được thể hiện một cách trực quan qua mô hình mô phỏng số. Bên cạnh đó, mô hình cũng cho thấy ảnh hưởng của một số tham số của mô hình miền tiếp xúc tới sự lan truyền của vết nứt trong mẫu. Một số kết luận được rút ra như sau:

- Tùy thuộc vào các tính chất của miền tiếp xúc, vết nứt có thể lan truyền ở mặt tiếp xúc giữa hai pha vật liệu, hoặc đâm xuyên vào vật liệu còn lại.
- Sự có mặt của sợi thép góp phần làm tăng tính dẻo cho mẫu bê tông, thông qua các cơ chế như bong tách, vết nứt bắc cầu. Đồng thời, góc nghiêng của sợi thép cũng ảnh hưởng tới khả năng chịu lực của mẫu.

Trong các nghiên cứu sắp tới, mô hình này sẽ tiếp tục được phát triển nhằm mục đích hiểu rõ hơn cơ chế hoạt động của bê tông cốt sợi thép ở cấp độ vật liệu có tính tới các yếu tố như sự phân bố ngẫu nhiên của sợi trong bê tông, ảnh hưởng của hình dạng sợi, mô hình 3D của sợi thép...

#### LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông vận tải (ĐH GTVT) trong đề tài mã số T2024-PHII\_CT-002.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. R. I. Gilbert RI, Gilbert, E.S. Bernard, Post-cracking ductility of fibre reinforced concrete linings in combined bending and compression, *Tunnelling and Underground Space Technology*, 76 (2018) 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2018.02.010>
- [2]. S.M. Islam, R.R. Hussain, Md.A.Z. Morshed, Fiber-reinforced concrete incorporating locally available natural fibers in normal- and high-strength concrete and a performance analysis with steel fiber-reinforced composite concrete, *Journal of Composite Materials*, 46 (2012) 111–122. <https://doi.org/10.1177/0021998311410492>
- [3]. Y.M. Abbas, M.I Khan M, Fiber–Matrix Interactions in Fiber-Reinforced Concrete: A Review, *Arab J Sci Eng* 41 (2016) 1183–1198. <https://doi.org/10.1007/s13369-016-2099-1>
- [4]. R.V. Balendran, F.P. Zhou, A. Nadeem, A.Y.T. Leung, Influence of steel fibres on strength and ductility of normal and lightweight high strength concrete, *Building and Environment*, 37 (2002) 1361–1367. [https://doi.org/10.1016/S0360-1323\(01\)00109-3](https://doi.org/10.1016/S0360-1323(01)00109-3)
- [5]. M.R. Carvalho, J.A.O. Barros, Y. Zhang, D. Dias-da-Costa, A computational model for simulation of steel fibre reinforced concrete with explicit fibres and cracks, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 363 (2020) 112879. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112879>
- [6]. L.A. Le, G.D. Nguyen, H.H. Bui, A.H. Sheikh, A. Kotousov, Incorporation of micro-cracking and fibre bridging mechanisms in constitutive modelling of fibre reinforced concrete, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 133 (2019) 103732. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2019.103732>

- [7]. D. Fanella, D. Krajcinovic, Continuum Damage Mechanics of Fiber Reinforced Concrete, *Journal of Engineering Mechanics*, 111 (1985) 995–1009. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1985\)111:8\(995\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1985)111:8(995))
- [8]. X. Peng X, C. Meyer, A continuum damage mechanics model for concrete reinforced with randomly distributed short fibers, *Computers & Structures*, 78 (2000) 505–515. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00045-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00045-6)
- [9]. R. Hameed R, A. Sellier, A. Turatsinze, F. Duprat, Metallic fiber-reinforced concrete behaviour: Experiments and constitutive law for finite element modeling, *Engineering Fracture Mechanics*, 103 (2013) 124–131. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.11.022>
- [10]. V.M.C.F Cunha, J.A.O Barros, J.M. Sena-Cruz, A finite element model with discrete embedded elements for fibre reinforced composites, *Computers & Structures*, 94-95 (2012) 22–33. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.12.005>
- [11]. A. Pros, P. Diez, C. Molins, Modeling steel fiber reinforced concrete: numerical immersed boundary approach and a phenomenological mesomodel for concrete-fiber interaction, *Numerical Meth Engineering*, 90 (2012) 65–86. <https://doi.org/10.1002/nme.3312>
- [12]. F. J. F. Radtke, A. Simone, L. J. Sluys, A computational model for failure analysis of fibre reinforced concrete with discrete treatment of fibres, *Engineering Fracture Mechanics*, 77 (2010) 597–620. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.11.014>
- [13]. Li. G, B.B. Yin, L.W. Zhang, K.M. Liew, A framework for phase-field modeling of interfacial debonding and frictional slipping in heterogeneous composites, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 382 (2021) 113872. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113872>
- [14]. W. Tan W, E. Martínez-Pañeda, Phase field fracture predictions of microscopic bridging behaviour of composite materials, *Composite Structures*, 286 (2022) 115242. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115242>
- [15]. Verhoosel CV, Verhoosel CV, De Borst R, A phase-field model for cohesive fracture: a phase-field model for cohesive fracture, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 96 (2013) 43–62. <https://doi.org/10.1002/nme.4553>
- [16]. T.T. Nguyen, J. Yvonnet, Q.-Z. Zhu, M. Bornert, C. Chateau, A phase-field method for computational modeling of interfacial damage interacting with crack propagation in realistic microstructures obtained by microtomography, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312 (2016) 567–595. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.10.007>
- [17]. Lê Gia Khuyển, Nguyễn Hoàng Quân, Trần Bảo Việt, Mô hình mặt tiếp xúc không hoàn hảo trong bê tông cốt sợi: Bài toán một chiều, *Tạp chí khoa học GTVT*, 74 (2023) 1063-1074. <https://doi.org/10.47869/tcsj.74.9.4>
- [18]. M. Pise, D. Brands, G. Gebuhr, M. Sarhil, J. Schröder, S. Anders, Elasto-plastic phase-field model for pullout tests of steel fiber embedded in high-performance concrete: numerical calibration and experimental validation, *Proc Appl Math and Mech*, 201919 (2019) e201900255. <https://doi.org/10.1002/pamm.201900255>.