



EFFECTIVE PERMEABILITY OF 2D DOUBLY POROUS MEDIA WITH ROUGH INTERFACES BETWEEN CONSTITUENT PHASES

Tran Thi Bich Thao*, Nguyen Hue Chi

University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 25/04/2024

Revised: 22/05/2024

Accepted: 28/05/2024

Published online: 15/05/2024

<https://doi.org/10.47869/tcsj.75.5.10>

* *Corresponding author*

Email: tbthao.tran@utc.edu.vn

Abstract. Doubly porous media have attracted a great number of investigations of the research community in recent years. In these materials, effective permeability is one of the most important properties. This work is concerned with the doubly porous media made of a permeable solid phase containing a network of non-interconnected fluid-filled pores and the interfaces between them are rough. The main purpose of this work is to study the influence of that interface roughness on the effective permeability of the double porosity material. To achieve the target, by employing the Boundary Element Method, we first solve the velocity and pressure fields of the fluid flow in an infinite permeable solid containing a pore with rough surface and undergoing a remote uniform pressure gradient. Next, each pore is replaced with an equivalent permeable inclusion and its permeability can be determined by using the above solutions. Finally, the dilute distribution (DD) and Mori–Tanaka (MT) schemes are applied to determine the effective permeability of the doubly porous material under consideration. The results given by the proposed approach are compared with the finite element and the impact of interface roughness on the effective permeability is discussed.

Keywords: Effective permeability, double porosity, interface roughness, micromechanics, homogenization, boundary element method.

@2024 University of Transport and Communications



ĐỘ THÂM CÓ HIỆU CỦA MÔI TRƯỜNG RỒNG KÉP TRONG KHÔNG GIAN HAI CHIỀU VỚI MẶT PHÂN GIỚI GÒ GHỀ GIỮA CÁC PHA THÀNH PHẦN

Trần Thị Bích Thảo*, Nguyễn Huệ Chi

Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

Chuyên mục: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 25/04/2024

Ngày nhận bài sửa: 22/05/2024

Ngày chấp nhận đăng: 28/05/2024

Ngày xuất bản Online: 15/06/2024

<https://doi.org/10.47869/tcsj.75.5.10>

* Tác giả liên hệ

Email: tbthao.tran@utc.edu.vn

Tóm tắt. Môi trường rồng kép đã thu hút được số lượng lớn các nghiên cứu trong giới khoa học những năm gần đây. Đối với loại vật liệu này, độ thấm có hiệu là một trong những tính chất quan trọng nhất. Nghiên cứu này xem xét bài toán môi trường rồng kép mà được tạo bởi pha nền là chất rắn cho phép thấm hàm chứa trong nó là hệ thống lỗ rồng không kết nối lấp đầy chất lỏng, mặt tiếp xúc giữa hai pha là gò ghề. Mục tiêu chính của nghiên cứu này là đánh giá sự ảnh hưởng của độ gò ghề đến độ thấm có hiệu của vật liệu rồng kép. Để đạt được mục tiêu này, bằng cách ứng dụng phương pháp phần tử biên, chúng tôi tiến hành giải bài toán tìm trường vận tốc và áp suất của dòng chất lỏng chảy qua một miền chất rắn vô hạn cho phép thấm, hàm chứa một lỗ rồng có bề mặt gò ghề chịu tác dụng của một gradient áp suất ở xa vô cùng. Tiếp đến, mỗi lỗ rồng được thay thế bằng một hạt nhân tương đương có độ thấm được xác định thông qua nghiệm của bài toán nói trên. Cuối cùng, mô hình pha loãng và mô hình Mori-Tanaka được sử dụng để dự báo độ thấm có hiệu của vật liệu rồng kép. Kết quả thu được từ phương pháp đề xuất được so sánh với phương pháp phần tử hữu hạn, đồng thời sự ảnh hưởng của mặt tiếp xúc gò ghề đến độ thấm có hiệu được phân tích và đánh giá.

Từ khóa: Độ thấm có hiệu, độ rồng kép, mặt tiếp xúc gò ghề, cơ học vi mô, đồng nhất hóa, phương pháp phần tử biên.

@2024 Trường Đại học Giao thông Vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Môi trường rỗng kép có thể được xem xét và xử lý như một vật liệu không đồng nhất được tạo bởi một pha nền là chất rắn trong đó có chứa các lỗ rỗng được chứa đầy nước. Trong tự nhiên, những vật liệu như đá, đất, đất sét, xương hoặc gỗ có thể được coi là vật liệu rỗng kép hoặc thậm chí vật liệu rỗng đa cấp độ. Những vật liệu nhân tạo như đá xi măng, gạch, bê tông, bê tông nhựa v.v. cũng thường tồn tại ở dạng vật liệu rỗng đa cấp độ. Ví dụ trong bê tông, lỗ rỗng tạo bởi khe hở giữa các hạt cốt liệu có thể được xem là lỗ rỗng ở cấp độ thứ nhất, trong khi đó vết nứt hoặc lỗ bọt khí được nhận định là lỗ rỗng ở cấp độ lớn hơn đại diện cho cấp độ rỗng thứ hai. Phần lớn các nghiên cứu liên quan đến vật liệu rỗng nói chung và vật liệu rỗng kép nói riêng là hướng đến việc xác định các tính chất truyền dẫn có hiệu của chúng [1-16], trong đó độ thấm có hiệu là một trong những tính chất quan trọng nhất.

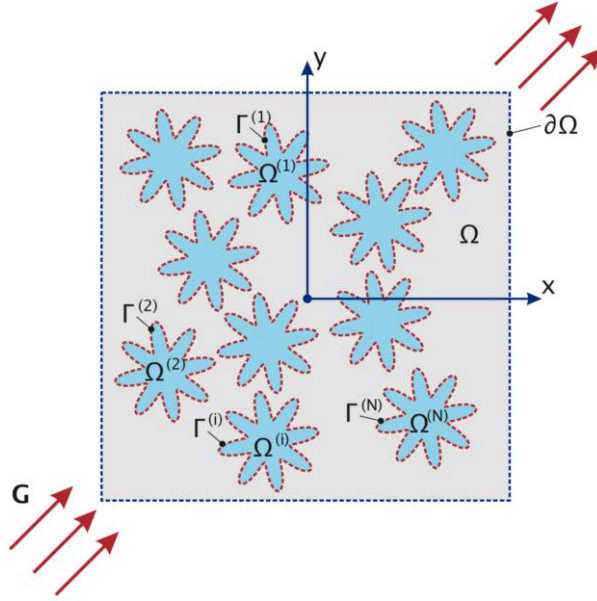
Việc dự báo độ thấm có hiệu của vật liệu rỗng kép thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới với nhiều phương pháp tiếp cận khác nhau, có thể kể đến như phương pháp đồng nhất hóa [1, 15-18], phương pháp phân tử hữu hạn [5, 8, 19, 20] và phương pháp biến đổi nhanh Fourier [10, 11, 21]. Điều đáng lưu ý là hầu hết các nghiên cứu kể trên chưa tính đến việc xem xét ảnh hưởng của trạng thái bề mặt lỗ rỗng đến độ thấm có hiệu của vật liệu tổng thể mặc dù thực tế bề mặt lỗ rỗng thường gồ ghề. Chính vì vậy nghiên cứu này hướng đến việc xem xét dòng chảy chất lỏng đi qua vật liệu rỗng có chứa các lỗ rỗng vĩ mô lấp đầy chất lỏng với bề mặt gồ ghề, từ đó xác định độ thấm có hiệu của vật liệu rỗng kép và phân tích sự phụ thuộc của đại lượng này vào mức độ gồ ghề của bề mặt lỗ rỗng. Trong đó bề mặt gồ ghề của lỗ rỗng được mô hình dưới dạng lượn sóng theo hàm số sine, mức độ gồ ghề được đặc trưng thông qua số lượng bước sóng và biên độ gồ ghề. Tại điểm chuyển tiếp giữa pha lỏng và pha rắn điều kiện Beavers–Joseph–Saffman vẫn được sử dụng để mô tả trạng thái tiếp xúc. Dòng chảy chất lỏng đi qua môi trường rỗng kép nói trên được mô phỏng bằng phương trình dòng chảy liên hợp Darcy-Stokes.

Bài báo này được cấu trúc theo trình tự cơ bản như sau. Mục 2 dành để giới thiệu tổng quan về mô hình bài toán xem xét, các phương trình điều chỉnh, điều kiện tiếp xúc rắn/lỏng và nguyên lý tổng quát xác định hệ số thấm vĩ mô. Tiếp theo, trong mục 3 nhóm tác giả trình bày chi tiết nguyên tắc xác định hệ số thấm có hiệu bằng việc sử dụng kết hợp nguyên lý hạt nhân tương đương và các mô hình đồng nhất hóa cổ điển trong cơ học vi mô. Trong mục 4, bài toán phụ trợ một hạt sẽ được giải số bằng phương pháp phân tử biên để xác định trường nghiệm của dòng chảy chất lỏng bên trong và ngoài lỗ rỗng lấp đầy chất lỏng có bề mặt gồ ghề. Mục 5 sẽ dành để ứng dụng cho một số ví dụ với số liệu đầu vào cụ thể. Kết thúc bài báo bằng mục 6 với một số kết luận và kiến nghị.

2. MÔ HÌNH BÀI TOÁN VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐIỀU CHỈNH CƠ BẢN

Vật liệu rỗng kép xem xét trong nghiên cứu này được mô hình bởi một miền chất nền rắn Ω cho phép thấm nằm trong không gian hai chiều, đặc trưng bởi độ thấm κ , bên trong nó là các lỗ rỗng cùng kích thước $\Omega^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) lấp đầy chất lỏng với bề mặt gồ ghề được phân bố một cách ngẫu nhiên, lưu ý rằng miền chất nền còn lại không chứa lỗ rỗng được gọi là $\Omega^{(0)}$ (xem hình 1). Dòng chảy chất lỏng chảy qua môi trường này được giả định là chất lỏng Newtonian không nén được với độ nhớt động học là μ . Dòng chảy được sinh ra bởi một gradient áp suất vĩ mô ở xa vô cùng biểu diễn bởi vector $\mathbf{G} = (G_1, G_2) = (G_\infty \cos \gamma, G_\infty \sin \gamma)$ với γ là góc tạo bởi hướng của vector này và trục tọa độ x . Mặt tiếp xúc giữa pha nền rắn và pha lỏng (lỗ rỗng chứa chất lỏng) được ký hiệu bởi đường cong $\Gamma^{(i)}$, để mô phỏng trạng thái bề mặt gồ ghề của lỗ rỗng

đường cong này có dạng hàm số sine $R(\theta) = R_0 + A \sin(B\theta)$, mức độ gồ ghề được đặc trưng bởi biên độ nhám A và số lượng đỉnh B .



Hình 1. Mô hình bài toán xem xét.

Ở đây chúng ta đưa vào khái niệm chiều dài đặc trưng của lỗ rỗng R_{eq} , chiều dài này được hiểu là bán kính của một lỗ rỗng hình tròn tương đương có diện tích bằng diện tích của lỗ rỗng gồ ghề $\Omega^{(i)}$, như vậy nó có thể được xác định như sau:

$$R_{eq} = \sqrt{S/\pi}, \quad (1)$$

trong đó S là diện tích của lỗ rỗng.

Để đưa toàn bộ các đại lượng và phương trình sử dụng trong nghiên cứu này về dạng không thứ nguyên, chúng ta lựa chọn $R_{eq}, G_{\infty} R_{eq}^2/\mu, R_{eq}^2, G_{\infty}, R_{eq}^2$ lần lượt là các giá trị tham chiếu của vận tốc, gradient áp suất, áp suất và độ thấm. Nhờ đó, phương trình Darcy mô tả dòng chảy đi qua pha nền được viết dưới dạng không đơn vị như sau:

$$\mathbf{U}^{(s)}(\mathbf{x}) = -k\nabla P^{(s)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(0)}, \quad (2)$$

với $\mathbf{U}^{(s)}(\mathbf{x}) = (U^{(s)}, V^{(s)})$ và $P^{(s)}$ lần lượt là vận tốc và áp suất không đơn vị của dòng chảy trong miền con $\Omega^{(0)}$.

Đối với miền chất lỏng nằm trong lỗ rỗng, trường vận tốc và áp suất tuân thủ theo phương trình Stokes biểu diễn dưới dạng không thứ nguyên dưới đây:

$$\Delta \mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) = \nabla p^{(f)}(\mathbf{x}), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(i)}. \quad (3)$$

Trong phương trình trên $\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) = (u^{(f)}, v^{(f)})$ và $p^{(f)}$ đại diện cho vận tốc và áp suất của chất lỏng bên trong lỗ rỗng $\Omega^{(i)}$.

Để mô tả điều kiện chuyển tiếp giữa pha rắn và pha lỏng của môi trường rỗng kép đang xem xét, ở đây chúng ta áp dụng điều kiện Beavers–Joseph–Saffman tại mặt tiếp xúc $\Gamma^{(i)}$, nó được biểu diễn cụ thể bằng 3 phương trình sau:

$$\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^{(s)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{với } \mathbf{x} \in \Gamma^{(i)}, \quad (4)$$

$$[\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}^{(s)}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \lambda \sqrt{k} [\boldsymbol{\sigma}^{(f)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) \text{ với } \mathbf{x} \in \Gamma^{(i)}, \quad (5)$$

$$p^{(f)}(\mathbf{x}) - P^{(s)}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot [\nabla \mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) + \nabla^T \mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ với } \mathbf{x} \in \Gamma^{(i)}, \quad (6)$$

trong đó $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ là vector pháp tuyến tại $\Gamma^{(i)}$ và có hướng từ miền Stokes đến miền Darcy; $\boldsymbol{\sigma}^{(f)}(\mathbf{x})$ là tensor ứng suất Cauchy trong trong pha lỏng; λ là hệ số trượt bán kính nghiệm không thứ nguyên, lấy giá trị trong khoảng từ 0 đến 5, $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ là véc tơ tiếp tuyến với với đường cong $\Gamma^{(i)}$. Lưu ý rằng, trong các phương trình nói trên các chỉ số “ f ”, “ s ” lần lượt chú thích cho miền Stokes và miền Darcy.

Ở cấp độ tổng thể của vật liệu rỗng kép, ứng xử có hiệu của dòng chất lỏng được đặc trưng bởi quy luật Darcy không thứ nguyên dưới đây:

$$\bar{\mathbf{U}} = -\mathbf{K}^{eff} \bar{\nabla P}. \quad (7)$$

Trên đây, \mathbf{K}^{eff} đại diện cho tensor độ thấm có hiệu còn $\bar{\mathbf{U}}$ và $\bar{\nabla P}$ lần lượt là vận tốc và gradient áp suất vĩ mô.

3. XÁC ĐỊNH ĐỘ THẤM CÓ HIỆU BẰNG CÁC MÔ HÌNH ĐỒNG NHẤT HOÁ

Để đạt được mục tiêu xác định độ thấm có hiệu của môi trường rỗng kép như mô tả ở trên, chúng ta cần thực hiện tuần tự hai bước.

Bước thứ nhất, bằng cách sử dụng phương pháp hạt nhân tương đương, mỗi một lỗ rỗng chứa chất lỏng $\Omega^{(i)}$ được thay thế bằng một hạt nhân rắn cho phép thấm $\tilde{\Omega}^{(i)}$ có cùng hình dạng và kích thước đồng thời độ thấm tương đương được ký hiệu là $\mathbf{K}^{(i)}$. Độ thấm tương đương này được xác định thông qua mối quan hệ dưới đây:

$$\langle \mathbf{u} \rangle^{(i)} = -\mathbf{K}^{(i)} \langle \nabla p \rangle^{(i)}, \quad (8)$$

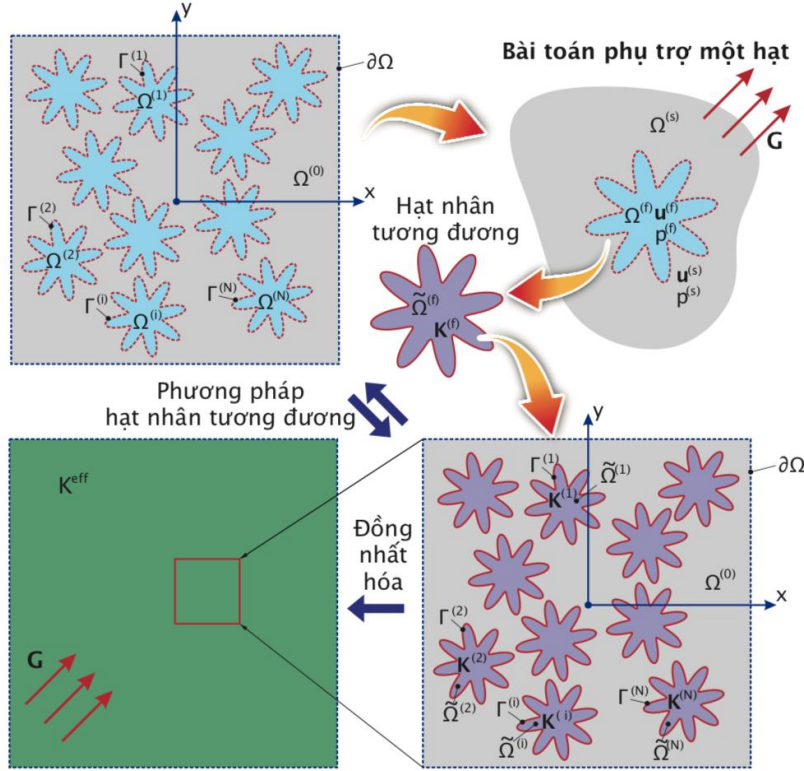
với $\langle \mathbf{u} \rangle^{(i)}$, $\langle \nabla p \rangle^{(i)}$ là trung bình vận tốc và gradient áp suất trên miền lỗ rỗng thứ “ i ”. Các giá trị trung bình này được xác định thông qua hai biểu thức sau:

$$\langle \mathbf{u} \rangle^{(i)} = \frac{1}{S} \int_{\Gamma^{(i)}} [\mathbf{U}^{(s)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})] \mathbf{x} d\mathbf{x}, \quad \langle \nabla p \rangle^{(i)} = \frac{1}{S} \int_{\Gamma^{(i)}} P^{(s)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \text{ với } \mathbf{x} \in \Gamma^{(i)}. \quad (9)$$

Bước thứ hai, độ thấm có hiệu \mathbf{K}^{eff} được ước tính thông qua các mô hình đồng nhất hóa trong cơ học vi mô cổ điển được biểu diễn qua biểu thức tổng quát sau đây:

$$\mathbf{K}^{eff} = k\mathbf{I} + \sum_{i=1}^N \phi_i (\mathbf{K}^{(i)} - k\mathbf{I}) \cdot \mathbf{A}^{(i)}, \quad (10)$$

trong đó ϕ_i là tỷ diện của lỗ rỗng thứ “ i ”, $\mathbf{A}^{(i)}$ đại diện cho tensor định vị. Toàn bộ quá trình đồng nhất hóa nói trên được mô tả trên hình 2.



Hình 2. Quy trình đồng nhất hóa.

Trong phạm vi nghiên cứu này, chúng ta sử dụng mô hình bão hòa (DD) và Mori-Tanaka (MT) để thực hiện quy trình đồng nhất hóa, chi tiết về các mô hình này có thể tìm thấy trong cuốn sách của Trần Bảo Việt và các cộng sự [22], tensor độ thấm có hiệu \mathbf{K}^{DD} và \mathbf{K}^{MT} có thể thu được thông qua hai công thức sau:

$$\mathbf{K}^{DD} = k\mathbf{I} + \sum_{i=1}^N \phi_i (\mathbf{K}^{(i)} - k\mathbf{I}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{(i)} \quad (11)$$

và

$$\mathbf{K}^{MT} = \left\{ \phi_0 k\mathbf{I} + \sum_{i=1}^N \phi_i \mathbf{K}^{(i)} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{(i)} \right\} \cdot \left\{ \phi_0 \mathbf{I} + \sum_{i=1}^N \phi_i \tilde{\mathbf{A}}^{(i)} \right\}^{-1}. \quad (12)$$

Trong hai công thức nêu trên \mathbf{I} là tensor đơn vị bậc 2, ϕ_0 là tỷ diện của pha nền rắn, $\tilde{\mathbf{A}}^{(i)}$ là dạng đơn giản hóa của tensor định vị $\mathbf{A}^{(i)}$. Tensor định vị đơn giản hóa $\tilde{\mathbf{A}}^{(i)}$ được xác định các thành phần dựa vào mối liên hệ dưới đây:

$$\langle \nabla p \rangle^{(i)} = -\tilde{\mathbf{A}}^{(i)} \cdot \mathbf{G}. \quad (13)$$

4. XÁC ĐỊNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN PHỤ TRỢ MỘT HẠT

Bài toán xác định độ thấm có hiệu bằng sơ đồ đồng nhất hóa trong cơ học vi mô cổ điển ở mục 3 được giải quyết hoàn toàn khi biết được độ thấm tương đương $\mathbf{K}^{(i)}$ và tensor định vị $\tilde{\mathbf{A}}^{(i)}$. Trong nghiên cứu này, chúng được xác định bằng cách giải bài toán phụ trợ một hạt (bài toán Darcy-Stokes kết hợp). Bài toán phụ trợ một hạt là bài toán tìm trường vận tốc và áp suất bên trong và bên ngoài một lỗ rỗng duy nhất $\Omega^{(f)}$ lấp đầy chất lỏng (gọi là hạt), đặt trong một miền

chất rắn vô hạn Ω^∞ cho phép thắm đặc trung bởi hệ số thắm không thứ nguyên k , chịu tác dụng của một trường gradient áp suất \mathbf{G} như mô tả chi tiết ở mục 2. Miền tiếp xúc giữa hai pha này được ký hiệu bởi Γ . Để tìm nghiệm của bài toán phụ trợ, ở đây nhóm nghiên cứu sử dụng phương pháp phần tử biên.

Trường vận tốc và áp suất bên trong lỗ rỗng $\Omega^{(f)}$ được biểu diễn bằng hai phương trình tích phân biên như sau:

$$\epsilon(\xi)\mathbf{u}^{(f)} = - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau}^{(f)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\mathfrak{S}}(\mathbf{x}, \xi) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\mathbf{l}(\mathbf{x}), \quad (14)$$

$$\epsilon(\xi)p^{(f)} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau}^{(f)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}, \xi) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\mathbf{l}(\mathbf{x}). \quad (15)$$

Trường vận tốc và áp suất trên miền Darcy $\Omega^{(s)} = \Omega^\infty \setminus \Omega^{(f)}$ được tách thành hai phần bao gồm phần ở xa vô cùng và phần nhiễu dưới đây:

$$P^{(s)}(\mathbf{x}) = p^\infty(\mathbf{x}) + p^{(s)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{U}^{(s)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^{(s)}, \quad (16)$$

trong đó

$$p^\infty(\mathbf{x}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}) = -k\mathbf{G}. \quad (17)$$

Phần nhiễu của trường vận tốc và áp suất được biểu diễn bằng phương trình tích phân biên trên miền Darcy như sau:

$$c(\xi)p^{(s)} = - \int_{\Gamma} q^{(s)}(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} p^{(s)}(\mathbf{x})h(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{l}(\mathbf{x}), \quad (18)$$

$$c(\xi)\mathbf{u}^{(s)} = k \int_{\Gamma} q^{(s)}(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) - k \int_{\Gamma} p^{(s)}(\mathbf{x})\nabla h(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{l}(\mathbf{x}). \quad (19)$$

Trong các phương trình tích phân biên nói trên ϵ và c là các hằng số có giá trị phụ thuộc vào vị trí của điểm nguồn ξ cụ thể như sau:

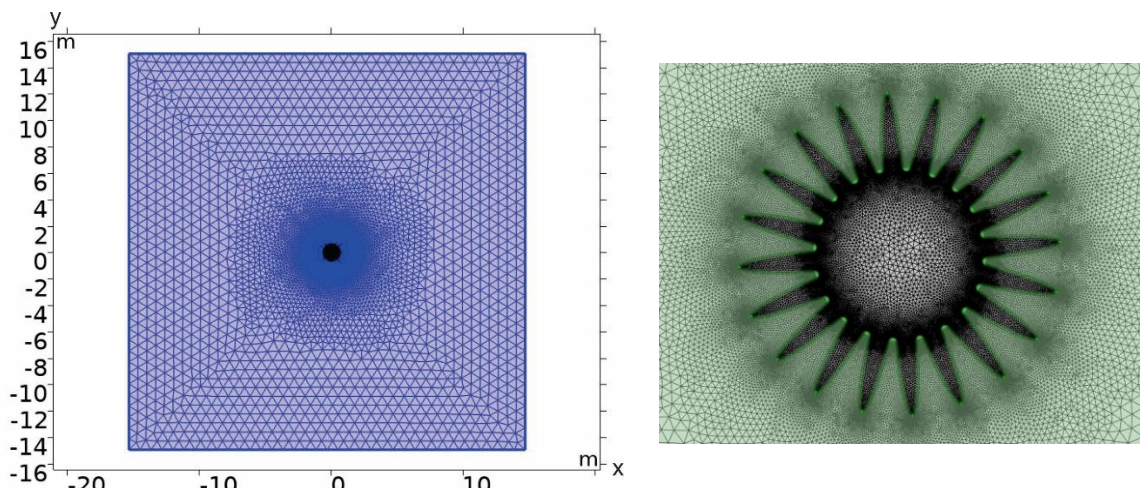
$$c(\xi)/\epsilon(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{khi } \xi \text{ nằm trong } \Omega^{(s)}/\Omega^{(f)}, \\ \frac{1}{2} & \text{khi } \xi \text{ nằm trên miền tiếp xúc } \Gamma, \\ 0 & \text{khi } \xi \text{ nằm ngoài } \Omega^{(s)}/\Omega^{(f)}; \end{cases} \quad (20)$$

$\boldsymbol{\tau}^{(f)}$, $\mathbf{u}^{(f)}$, $q^{(s)}$, $p^{(s)}$ là các giá trị trên biên của lực kéo, vận tốc, dòng và áp suất tại điểm \mathbf{x} trên đường tiếp xúc Γ ; \mathbf{S} , $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$, \mathbf{f} , $\boldsymbol{\Theta}$, g , h lần lượt là Stokeslet, tensor Green ứng suất bậc ba, vector áp suất tương ứng của Stokeslet, tensor áp suất bậc hai tương ứng của tensor Green ứng suất, nghiệm cơ bản của áp suất dòng. Biểu thức cụ thể của các hàm Green này được trình bày một cách chi tiết trong các cuốn sách của Pozrikidis [23] và Katsikadelis [24].

Thực hiện rời rạc hóa các phương trình tích phân biên kết hợp với các điều kiện tiếp xúc chúng ta giải được các giá trị trên biên nói trên. Thay ngược các giá trị trên biên tìm được vào phương trình tích phân biên để xác định trường vận tốc và áp suất tại bất cứ điểm nào trên miền tính toán xem xét. Để hiểu thêm về kỹ thuật của phương pháp phần tử biên người đọc có thể tham khảo tài liệu của Brebbia và Dominguez [25].

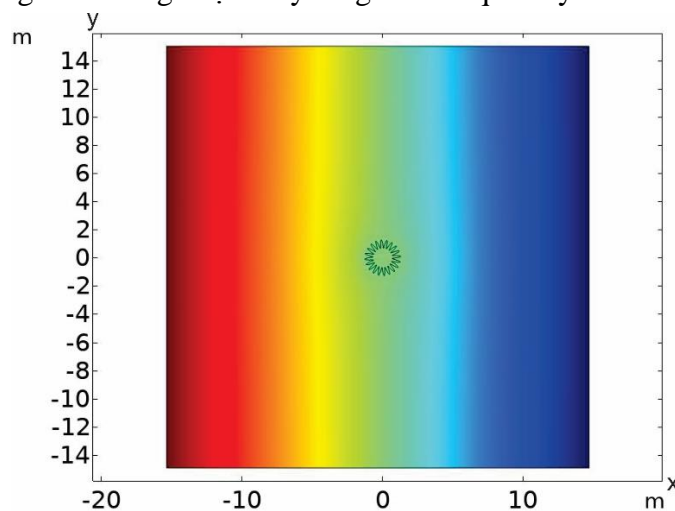
5. ỨNG DỤNG SỐ VÀ PHÂN TÍCH CÁC KẾT QUẢ

Nhằm mục đích minh họa số các kết quả rút ra từ việc giải bài toán Darcy-Stokes kết hợp, trước tiên chúng ta tính toán nghiệm của bài toán phụ trợ một hạt với các thông số cụ thể như $A = 0,3$; $B = 20$; $\lambda = 2$; $k = 10^{-6}$; Gradient áp suất $\mathbf{G} = (1,0)$ áp vào miền tính toán ở xa vô cùng. Để kiểm chứng tính đúng đắn của nghiệm này cũng như độ tin cậy của phương pháp đề xuất nhóm nghiên cứu đã so sánh với các kết quả thu được bằng phương pháp phần tử hữu hạn trên nền tảng phần mềm Comsol Multiphysics, tuy nhiên phần mềm này không thể mô phỏng miền tính toán vô hạn như bài toán đặt ra, chính vì vậy miền tính toán được thiết lập trong phạm vi hữu hạn nhưng lớn hơn nhiều so với kích thước lỗ rỗng để được tạm coi là vô hạn, cụ thể trong nghiên cứu này kích thước của hình vuông bao quanh lỗ rỗng là 30×30 (m²) trong khi đó lỗ rỗng có $R_0 = 0,9772$ m. Trong mô phỏng phần tử hữu hạn miền tính toán được rời rạc hóa thành 113576 phần tử với 56861 nút minh họa trên hình 3.

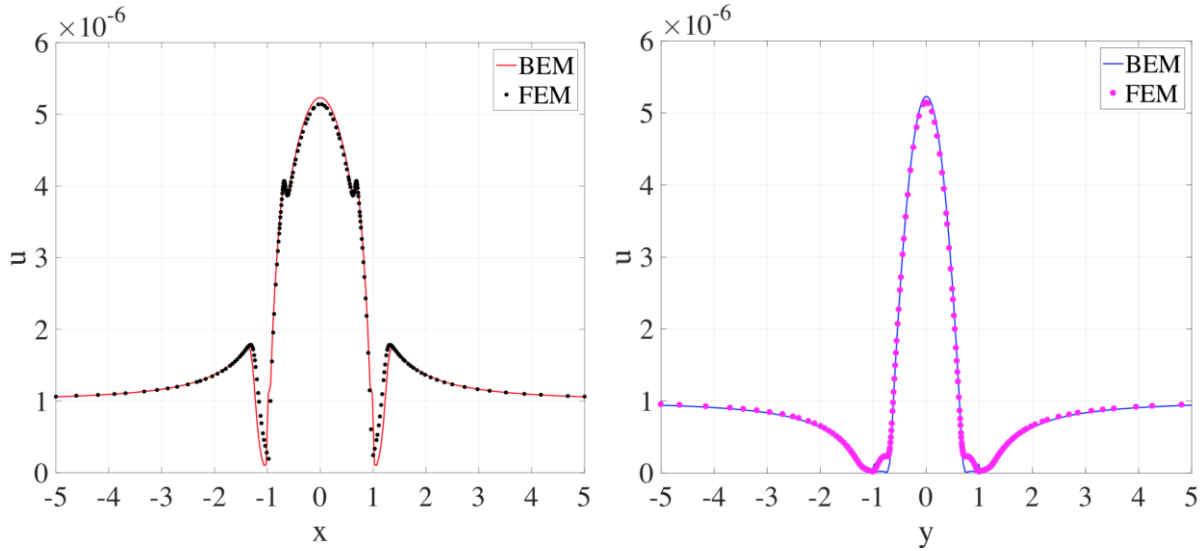


Hình 3. Minh họa việc chia lưới toàn bộ miền tính toán (trái) và phần lỗ rỗng (phải) theo PP PTHH.

Hình 4 là hình ảnh minh họa trường áp suất sau khi tính toán bằng Comsol Multiphysics hoàn tất. Trên hình 5 chúng ta biểu diễn sự biến thiên vận tốc $u = (x, 0)$ và $u = (0, y)$ lần lượt tại các điểm nằm trên trục tọa độ x và y được tính toán bằng phương pháp đề xuất trong nghiên cứu (BEM) này đồng thời so sánh với kết quả tương ứng mô phỏng bằng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng hai kết quả này là khá trùng khớp.

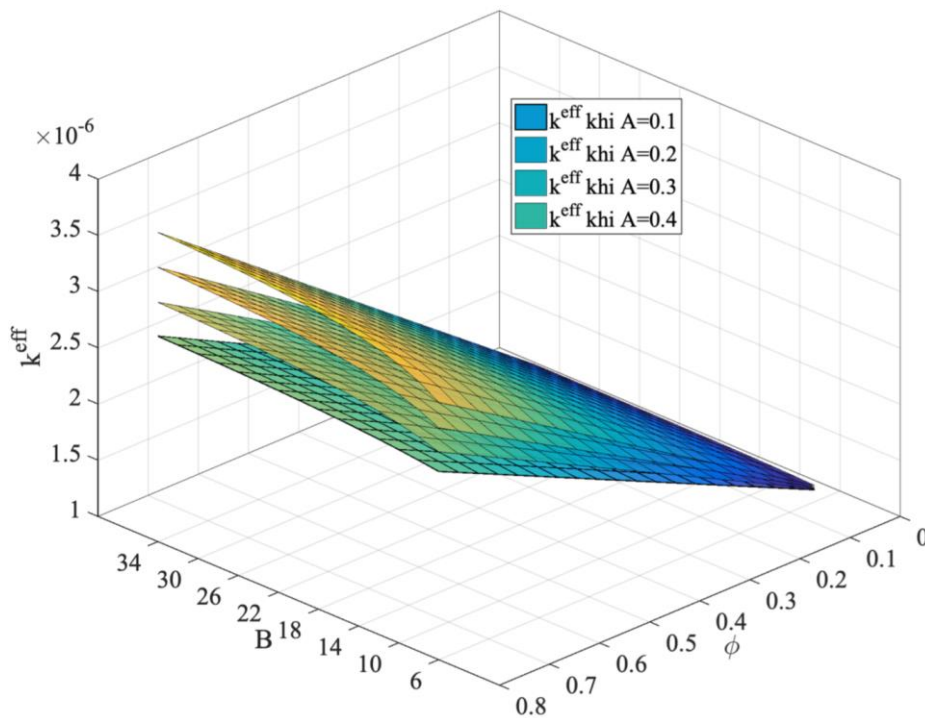


Hình 4. Trường áp suất khi mô phỏng bằng PP PTHH.

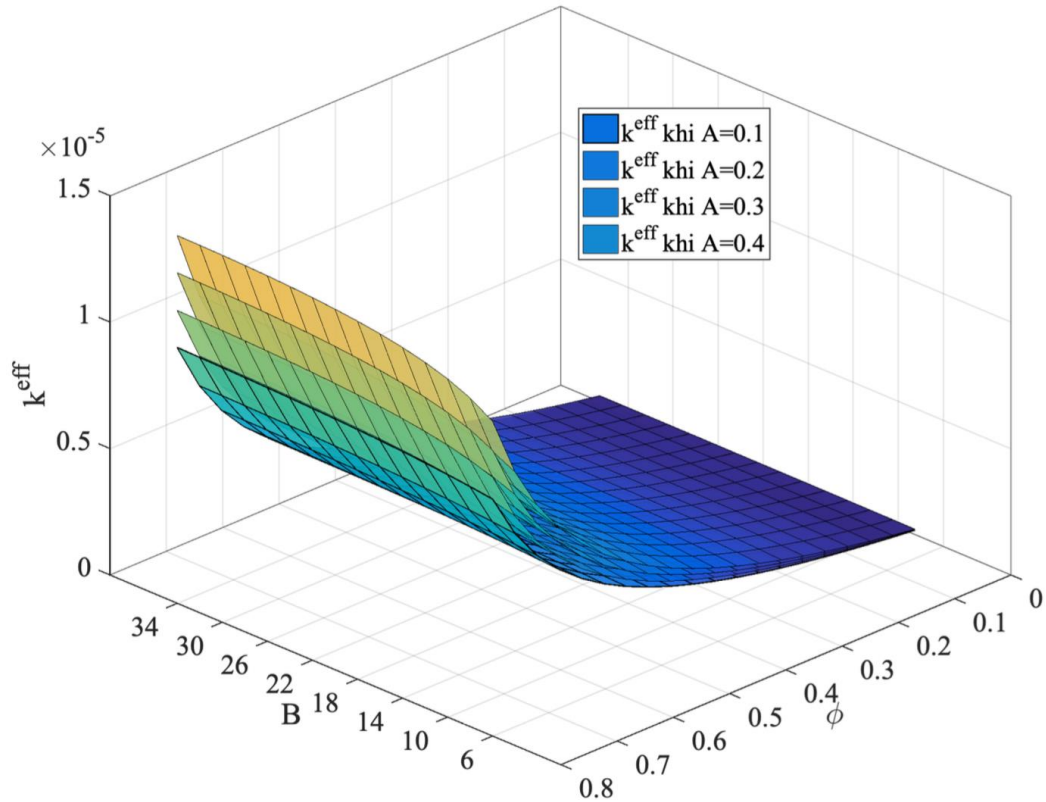


Hình 5. Biến thiên vận tốc u dọc theo trục tọa độ x (trái) và dọc theo trục tọa độ y (phải).

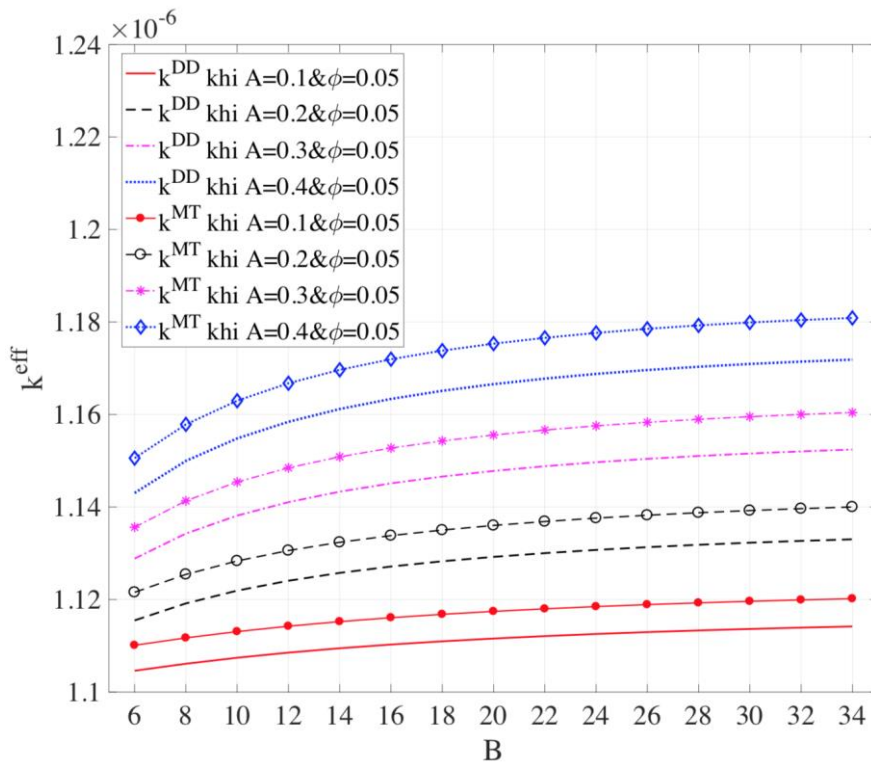
Tiếp theo, để tìm hiểu về mức độ ảnh hưởng của bề mặt gồ ghề trong lỗ rỗng đến độ thấm có hiệu của mô hình vật liệu rỗng kép như mô tả trong nghiên cứu này, chúng ta minh họa trên hình 6 và 7 biểu đồ 3D thể hiện sự biến thiên của độ thấm có hiệu không thứ nguyên k^{eff} theo độ rỗng ϕ và số lượng đỉnh gồ ghề B cho các biên độ gồ ghề khác nhau $A = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$, trong đó kết quả trên hình 6 được xác định bằng mô hình pha loãng (DD) còn hình 7 là kết quả đồng nhất hóa độ thấm bằng mô hình Mori-Tanaka (MT). Về cơ bản, chúng ta nhận thấy rằng đối với cả hai mô hình DD và MT thì độ thấm có hiệu tăng khi tỷ diện lỗ rỗng và số lượng đỉnh gồ ghề tăng, biên độ nhám càng lớn thì độ thấm có hiệu càng lớn. Để minh họa rõ hơn cho nhận định này, chúng ta biểu diễn trên hình 8, 9, 10 các lát cắt của biểu đồ 3D.



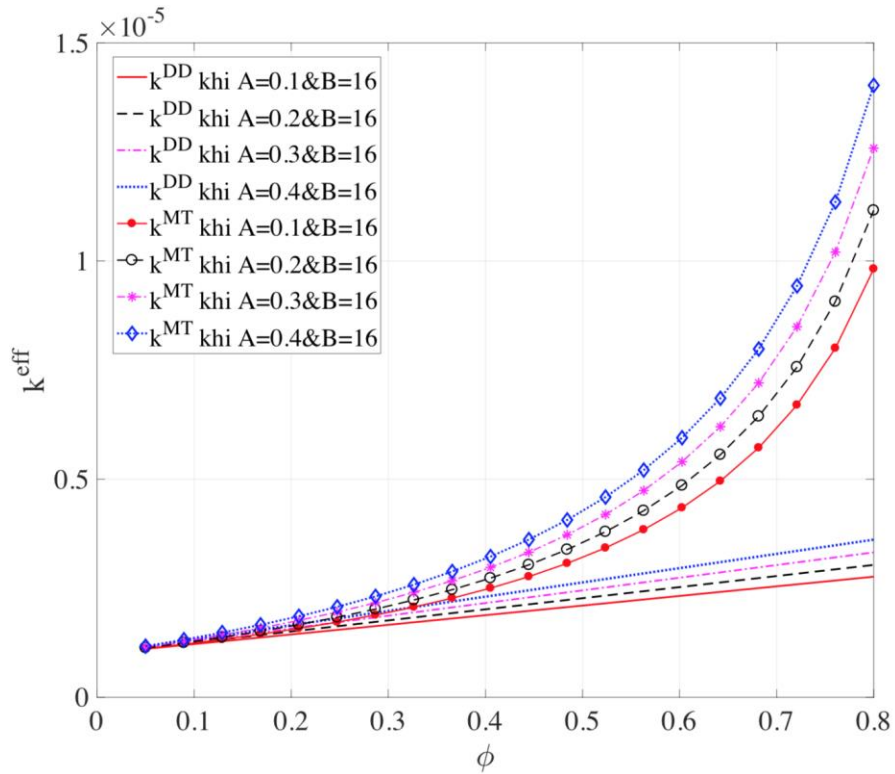
Hình 6. Biến thiên độ thấm có hiệu theo số lượng đỉnh gồ ghề B và tỷ diện lỗ rỗng vĩ mô ϕ sử dụng mô hình đồng nhất hóa pha loãng (DD).



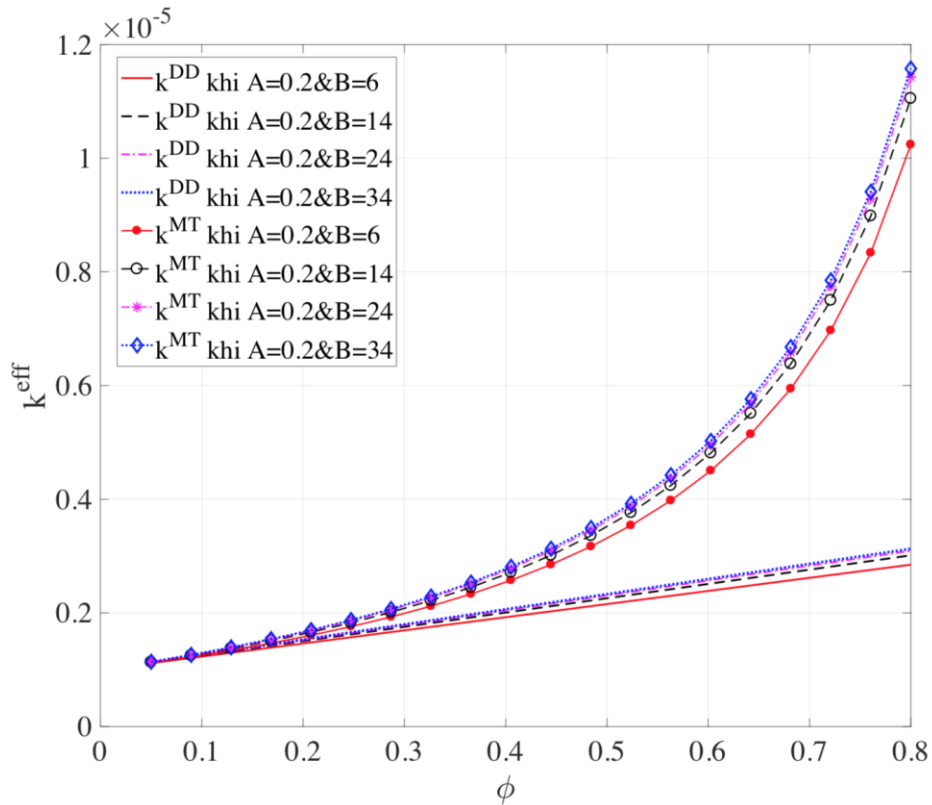
Hình 7. Biến thiên độ thấm có hiệu theo số lượng đỉnh gò ghề B và tỷ diện lỗ rỗng vĩ mô ϕ sử dụng mô hình đồng nhất hóa Mori-Tanaka(MT).



Hình 8. Biến thiên độ thấm có hiệu theo số lượng đỉnh gò ghề B thay đổi khi $\phi = 0,05$.



Hình 9. Biến thiên độ thấm có hiệu theo theo tỷ diện lỗ rỗng khi số lượng đỉnh gờ gờ $B = 16$.



Hình 10. Biến thiên độ thấm có hiệu theo theo tỷ diện lỗ rỗng khi biên độ gờ gờ $A = 0,2$.

6. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này chúng tôi đã sử dụng các kỹ thuật của phương pháp phân tử biên để mô phỏng trường nghiệm của bài toán phụ trợ một hạt – bài toán liên quan đến một lỗ rỗng lấp đầy chất lỏng đặt trong một miền chất rắn vô hạn cho phép thấm. Nghiệm của bài toán phụ trợ được sử dụng để tính toán độ thấm của hạt nhân tương đương. Môi trường rỗng kép ban đầu chứa các lỗ rỗng gồ ghề giờ đây được thay thế bằng các hạt nhân tương đương mà chúng ta đã tính toán được độ thấm của chúng. Cuối cùng độ thấm có hiệu của vật liệu xem xét được xác định bằng cách vận dụng các sơ đồ đồng nhất hóa cổ điển trong cơ học vi mô, cụ thể trong bài báo này là hai mô hình pha loãng và Mori-Tanaka. Bằng cách thay đổi các thông số đặc trưng cho bề mặt gồ ghề của lỗ rỗng, chúng tôi tiến hành xem xét và bình luận ứng xử của giá trị độ thấm có hiệu. Phương pháp đề xuất được kiểm nghiệm tính hiệu quả và chính xác bằng việc so sánh với phương pháp phân tử hữu hạn.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường đại học Giao thông vận tải (ĐH GTVT) trong đề tài mã số T2024-CT-005.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. Whittaker, Diffusion and dispersion in porous media, *AlChE J.*, 13 (1967) 420-432. <https://doi.org/10.1002/aic.690130308>
- [2] E. Sanchez-Palencia, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer Berlin, Heidelberg, 1980.
- [3] A. Sangani, A. Acrivos, Creeping flow through cubic arrays of spherical bubbles, *International Journal of Multiphase Flow*, 9 (1983) 181–185. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(83\)90052-6](https://doi.org/10.1016/0301-9322(83)90052-6)
- [4] C. Wang, Stokes flow through an array of rectangular fibers, *International Journal of Multiphase Flow*, 22 (1) (1996) 185–194. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(95\)00063-1](https://doi.org/10.1016/0301-9322(95)00063-1)
- [5] D. Cioranescu, P. Donato, H. I. Ene, Homogenization of the stokes problem with non-homogeneous slip boundary conditions, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 19 (1996) 857–881. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1476\(19960725\)19:11<857::AID-MMA798>3.0.CO;2-D](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19960725)19:11<857::AID-MMA798>3.0.CO;2-D)
- [6] F. J. Alcocer, V. Kumar, P. Singh, Permeability of periodic porous media, *Phys. Rev. E*, 59 (1999) 711–714. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.59.711>
- [7] C. Wang, Stokes flow through a rectangular array of circular cylinders, *Fluid Dynamics Research*, 29 (2001) 65–80. [https://doi.org/10.1016/S0169-5983\(01\)00013-2](https://doi.org/10.1016/S0169-5983(01)00013-2)
- [8] F. J. Alcocer, P. Singh, Permeability of periodic arrays of cylinders for viscoelastic flows, *Physics of Fluids*, 14 (7) (2002) 2578–2581. <https://doi.org/10.1063/1.1483301>
- [9] M. Markov, E. Kazatchenko, A. Mousatov, E. Pervago, Permeability of the fluid-filled inclusions in porous media, *Transport in Porous Media*, 84 (2010) 307–317. <https://doi.org/10.1007/s11242-009-9503-1>
- [10] T. K. Nguyen, V. Monchiet, G. Bonnet, A fourier based numerical method for computing the dynamic permeability of periodic porous media, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 37 (2013) 90–98. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2012.07.004>
- [11] H. B. Ly, D. Monchiet, V. Grande, Computation of permeability with fast fourier transform from 3-d digital images of porous microstructures, *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, 26 (2016) 1328–1345. <https://doi.org/10.1108/HFF-12-2014-0369>

- [12] M. Rasoulzadeh, F. J. Kuchuk, Effective permeability of a porous medium with spherical and spheroidal vug and fracture inclusions, *Transport in Porous Media*, 116 (2017) 613–644. <https://doi.org/10.1007/s11242-016-0792-x>
- [13] V. Monchiet, H.-B. Ly, D. Grande, Macroscopic permeability of doubly porous materials with cylindrical and spherical macropores, *Meccanica*, 54 (2019) 1583–1596. <https://doi.org/10.1007/s11012-019-01023-1>
- [14] M. Rasoulzadeh, M. M. H. Al Hubail, H. Deng, F. J. Kuchuk, Hydrodynamic driven dissolution in porous media with embedded cavities, *Physics of Fluids*, 32 (2020) 076607. [10.1063/5.0009562](https://doi.org/10.1063/5.0009562)
- [15] A. T. Tran, H. Le-Quang, Q. C. He, D. H. Nguyen, Determination of the effective permeability of doubly porous materials by a two-scale homogenization approach, *Transport in Porous Media*, 145 (2022) 197–243. <https://doi.org/10.1007/s11242-022-01846-9>
- [16] A. T. Tran, H. L. Quang, Q. C. He, D. H. Nguyen, Solutions for two coupled stokes and darcy flows around and in spheroidal inclusions, *Journal of Engineering Mathematics*, 132 (2022) 19. <https://doi.org/10.1007/s10665-021-10202-7>
- [17] J. L. Auriault, E. Sanchez-Palencia, Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable, *J. Mécanique*, 16 (1977) 575-603.
- [18] E. Sanchez-Palencia, Non-homogeneous media and vibration theory, *Lecture Notes in Physics*, 127 (1981). <https://doi.org/10.1007/3-540-10000-8>
- [19] J. Barrere, J. -P. Caltagirone, O. Gipouloux, Détermination numérique de la perméabilité en milieu poreux périodique tridimensionnel, *C. R. Acad. Sci.*, 310 (1990) 347-352.
- [20] F. Alcocer, P. Singh, Permeability of periodic porous media, *Phys. Rev. E*, 59 (1999) 771. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.59.711>
- [21] V. Monchiet, G. Bonnet, G. Lauriat, A fft-based method to compute the permeability induced by a stokes slip flow through a porous medium, *C. R. Mécanique*, 337 (2009) 192-197. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2009.04.003>
- [22]. B. V. Trần, T. K. Nguyễn, A. T. Trần, Đ. H. Nguyễn, Đồng nhất vật liệu nhiều thành phần - Ứng xử tuyến tính, Xuất bản lần 1, Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội, 2019.
- [23]. C. Pozrikidis, Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [24]. J. T. Katsikadelis, Boundary elements: Theory and applications, Elsevier, Amsterdam, 2002.
- [25]. C. A. Brebbia, J. Dominguez, Boundary elements An introductory course, WIT Press/Computational Mechanics Publications, Southamton, 1992.