



## STATIC BENDING ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL SANDWICH PLATES USING A FINITE ELEMENT METHOD

Manh Tuan Duong\*

Institute of Technical Engineering, Sa Doi Street, Ha Noi, Vietnam

### ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 20/12/2023

Revised: 02/03/2023

Accepted: 31/03/2024

Published online: 15/04/2024

<https://doi.org/10.47869/tcsj.75.3.4>

\* *Corresponding author*

Email: tuanmanhvkt123@gmail.com; Tel: 0968776889

**Abstract.** The functionally graded material (FGM) is increasingly widely applied in many engineering fields such as civil construction, aerospace, nuclear technology, and so on. Therefore, studying the mechanical behaviour of FGM sandwich structures is of interest to many domestic and foreign scientists. The main goal of this paper is to use the quadrilateral (Q4) element based on Shi's third-order shear deformation plate theory (TSDT) for the static analysis of FGM sandwich plates. The proposed element with seven degrees of freedom (DOFs) per node is based on combining the Lagrange interpolations and the Hermit interpolations for establishing the governing equation of the FGM sandwich plate. This combination helps satisfy the zero-shear stress condition at the top and bottom surfaces of the plate. The accuracy and effectiveness of the proposed method are verified through comparative examples. Then, the effects of geometrical dimensions and material properties on the static response of FGM sandwich plates are studied in detail.

**Keywords:** Sandwich plates, functionally graded material, Q4 element, TSDT.



# PHÂN TÍCH UỐN TĨNH CỦA TẤM SANDWICH PHÂN LỚP CHỨC NĂNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Dương Mạnh Tuấn\*

Viện Kỹ thuật Công binh, Đường Sa Đồi, Hà Nội, Việt Nam

## THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 20/12/2023

Ngày nhận bài sửa: 02/03/2023

Ngày chấp nhận đăng: 31/03/2024

Ngày xuất bản Online: 15/04/2024

<https://doi.org/10.47869/tcsj.75.3.4>

\* Tác giả liên hệ

Email: tuanmanhvkt123@gmail.com; Tel: 0968776889

**Tóm tắt.** Vật liệu phân lớp chức năng (functionally graded material, FGM) ngày càng được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật như xây dựng dân dụng, hàng không vũ trụ, công nghệ hạt nhân, v.v. Vì vậy, nghiên cứu ứng xử cơ học của kết cấu sandwich FGM được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm. Mục tiêu chính của bài báo này là sử dụng phần tử tứ giác (Q4) dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (third-order shear deformation plate theory, TSDT) để phân tích tĩnh tấm sandwich FGM. Phần tử được đề xuất với bảy bậc tự do (degrees of freedom, DOFs) trên mỗi nút dựa trên sự kết hợp hàm nội suy Lagrange và hàm nội suy Hermite để thiết lập phương trình cân bằng của tấm sandwich FGM. Sự kết hợp này giúp thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt bằng không tại mặt trên và dưới của tấm. Độ chính xác và hiệu quả của phương pháp đề xuất được kiểm chứng thông qua các ví dụ so sánh. Qua đó, tác giả nghiên cứu chi tiết ảnh hưởng của kích thước hình học và thuộc tính vật liệu đến phản ứng tĩnh của tấm sandwich FGM.

**Từ khóa:** tấm sandwich, vật liệu phân lớp chức năng, phần tử tứ giác, lý thuyết biến dạng cắt bậc ba.

@ 2024 Trường Đại học Giao thông vận tải

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vật liệu phân lớp chức năng (functionally graded material, FGM) là loại vật liệu tiên tiến, trong đó các đặc tính vật liệu thay đổi một cách trơn tru và liên tục theo chiều dày của kết cấu. Đặc tính nổi bật của FGM là khả năng triệt tiêu sự tập trung ứng suất và hiện tượng phân tách giữa các lớp trong vật liệu composite truyền thống. Vì vậy, chúng đã được ứng dụng trong nhiều

lĩnh vực như xây dựng dân dụng, hàng không vũ trụ, công nghệ hạt nhân, công nghệ sinh học, v.v. Các kết quả nghiên cứu điển hình về ứng xử cơ học của kết cấu FGM có thể kể đến như: dầm [1]-[3], tấm [4]-[6], và vỏ [7]-[9].

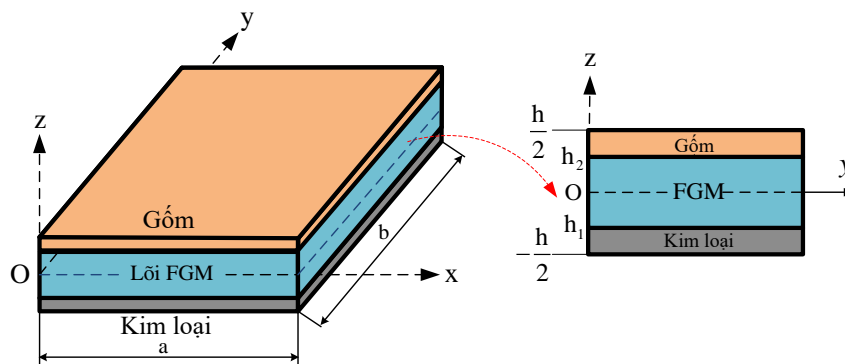
Kết cấu sandwich thường được chế tạo bởi hai lớp da mỏng gắn với một lớp lõi dày và nhẹ. Gần đây, kết cấu này được sử dụng phổ biến trong nhiều lĩnh vực khác nhau nhờ độ cứng uốn vượt trội, trọng lượng nhẹ, khả năng khử tiếng ồn và cách nhiệt tốt. Tuy nhiên, chúng rất dễ bị phá hủy do tập trung ứng suất tại các khu vực chịu tải, có sự gián đoạn về hình học và vật liệu. Một số nghiên cứu về ứng xử cơ học của kết cấu sandwich FGM có thể được tóm tắt như sau: Zenkour [10], [11] đã sử dụng phương pháp giải tích để phân tích đáp ứng tĩnh, ổn định và dao động riêng của tấm sandwich FGM chịu tải trọng cơ-nhiệt. Daikh và Zenkour [12], [13] đã phát triển lý thuyết biến dạng cắt bậc cao mới để nghiên cứu ứng xử cơ học của tấm sandwich FGM. Thái và cộng sự [14] đã đề xuất lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cải tiến (first-order shear deformation plate theory, r-FSDT) để phân tích uốn tĩnh, ổn định và dao động riêng của tấm sandwich FGM. Nhìn chung, các nghiên cứu về ứng xử cơ học của tấm sandwich FGM chủ yếu sử dụng phương pháp giải tích. Do vậy, các nghiên cứu trên bị hạn chế về mặt mô hình kết cấu và điều kiện biên.

Từ việc phân tích các tài liệu trên, có thể thấy rằng sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (finite element method, FEM) ngày càng được áp dụng rộng rãi trong phân tích ứng xử cơ học của kết cấu. Tuy nhiên, sử dụng FEM chỉ dựa trên hàm nội suy Lagrange không thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt bằng không tại mặt trên và dưới của tấm. Do vậy, mục tiêu chính của bài báo này là xây dựng một quy trình phần tử hữu hạn mới bằng cách sử dụng Q4 dựa trên TSĐT để phân tích ứng xử tĩnh của tấm sandwich FGM. Chương trình tính được lập trong môi trường Matlab. Độ chính xác và độ tin cậy của chương trình tính được xác minh thông qua các ví dụ so sánh. Hơn nữa, các kết quả số cho thấy ảnh hưởng đáng kể của kích thước hình học và thuộc tính vật liệu đến ứng xử tĩnh của tấm sandwich FGM.

## 2. CÔNG THỨC PHẦN TỬ HỮU HẠN PHÂN TÍCH TĨNH TẤM SANDWICH FGM

### 2.1. Mô hình tấm sandwich FGM

Xét tấm sandwich FGM có kích thước hình học được thể hiện như trên Hình 1.



Hình 1. Mô hình tấm sandwich FGM.

Tấm sandwich bao gồm lớp lõi FGM được kẹp giữa lớp dưới cùng làm bằng kim loại đồng nhất và lớp trên làm hoàn toàn bằng gôm. Thể tích gôm  $V_c^n$  và kim loại  $V_m^n$  ( $n = b, c, t$ ) trong các lớp được xác định bởi công thức [13]:

$$\begin{cases} V_c^b(z) = 0 & z \in \left[ \frac{-h}{2}; h_1 \right] \\ V_c^c(z) = \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k & z \in [h_1; h_2]; \text{ và } V_m^n(z) = 1 - V_c^n(z) \\ V_c^t(z) = 1 & z \in \left[ h_2; \frac{h}{2} \right] \end{cases} \quad (1)$$

với  $k$  là hệ số đặc trưng vật liệu. Kí hiệu “ $h_b - h_c - h_t$ ” là tỉ lệ độ dày của lớp dưới cùng, lớp lõi và lớp trên cùng (gọi tắt là “sơ đồ”). Thuộc tính cơ học của các thành phần vật liệu được thể hiện trong Bảng 1.

Bảng 1. Thuộc tính cơ học của các thành phần vật liệu.

| Thành phần vật liệu                  | Mô đun đàn hồi (GPa) | Khối lượng riêng (kg/m <sup>3</sup> ) | Hệ số Poát xông |
|--------------------------------------|----------------------|---------------------------------------|-----------------|
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (gốm) | $E_c = 380$          | $\rho_c = 3800$                       | $\nu_c = 0,3$   |
| Al (kim loại)                        | $E_m = 70$           | $\rho_m = 2707$                       | $\nu_m = 0,3$   |

## 2.2. Các công thức cơ bản

Áp dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (TSDT) của Shi [15], chuyển vị của một điểm bất kỳ thuộc tấm sandwich FGM được xác định bởi:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + \frac{5}{4} \left( z - \frac{4}{3h^2} z^3 \right) \varphi_x(x, y) + \left( \frac{1}{4} z - \frac{5}{3h^2} z^3 \right) w_{0,x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + \frac{5}{4} \left( z - \frac{4}{3h^2} z^3 \right) \varphi_y(x, y) + \left( \frac{1}{4} z - \frac{5}{3h^2} z^3 \right) w_{0,y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

với  $u_0, v_0, w_0, \varphi_x$  và  $\varphi_y$  là các thành phần chuyển vị trong mặt phẳng trung bình của tấm.

Trường biến dạng được suy ra từ trường chuyển vị như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\kappa}_1 + z^3\boldsymbol{\kappa}_2 \quad (3)$$

trong đó:

Biến dạng màng  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  được xác định bởi:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Biến dạng uốn  $\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2$  được biểu diễn như sau:

$$\boldsymbol{\kappa}_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5\varphi_{x,x} + w_{,xx} \\ 5\varphi_{y,y} + w_{,yy} \\ 5\varphi_{x,y} + 2w_{,xy} + 5\varphi_{y,x} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_2 = \frac{-5}{3h^2} \begin{pmatrix} \varphi_{x,x} + w_{,xx} \\ \varphi_{y,y} + w_{,yy} \\ \varphi_{x,y} + 2w_{,xy} + \varphi_{y,x} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Biên dạng cắt  $\boldsymbol{\gamma}$  có dạng:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + z^2 \boldsymbol{\gamma}_1 \quad (7)$$

với

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} w_{,y} + \varphi_y \\ w_{,x} + \varphi_x \end{pmatrix}; \boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{-5}{h^2} \begin{pmatrix} w_{,y} + \varphi_y \\ w_{,x} + \varphi_x \end{pmatrix} \quad (8)$$

Nội lực trong tấm sandwich FGM được xác định bởi công thức:

$$[\mathbf{N} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{P}]^T = \mathbf{D}_m [\boldsymbol{\varepsilon}_m \quad \boldsymbol{\kappa}_1 \quad \boldsymbol{\kappa}_2]^T; [\mathbf{Q} \quad \mathbf{R}]^T = \mathbf{D}_s [\boldsymbol{\gamma}_0 \quad \boldsymbol{\gamma}_1]^T \quad (9)$$

trong đó:

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} & \mathbb{B}^b \\ \mathbb{B} & \mathbb{F} & \mathbb{F}^b \\ \mathbb{B}^b & \mathbb{F}^b & \mathbb{H} \end{bmatrix}; \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^s & \mathbb{B}^s \\ \mathbb{B}^s & \mathbb{F}^s \end{bmatrix} \quad (10)$$

với

$$\begin{aligned} & (\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{B}^b, \mathbb{F}, \mathbb{F}^b, \mathbb{H}) \\ & = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & & 2(1 - \nu(z)) \end{bmatrix} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \end{aligned} \quad (11)$$

và

$$(\mathbb{A}^s, \mathbb{B}^s, \mathbb{F}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (1, z^2, z^4) dz \quad (12)$$

Phương trình (10) có thể được viết gọn lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} & \mathbb{B}^b & 0 & 0 \\ \mathbb{B} & \mathbb{F} & \mathbb{F}^b & 0 & 0 \\ \mathbb{B}^b & \mathbb{F}^b & \mathbb{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{A}^s & \mathbb{B}^s \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{B}^s & \mathbb{F}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \\ \boldsymbol{\gamma}_0 \\ \boldsymbol{\gamma}_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Sử dụng phần tử Q4 với 7 DOFs mỗi nút, các thành phần chuyển vị trong mặt phẳng trung bình của tấm có thể được tính gần đúng như sau:

$u_0, v_0, \varphi_x$  và  $\varphi_y$  được xấp xỉ bởi hàm Lagrange như sau [16]:

$$\{u_0 \quad v_0 \quad \varphi_x \quad \varphi_y\} = \left[ \sum_{i=1}^4 N_i u_{0i} \dots \quad \sum_{i=1}^4 N_i v_{0i} \dots \quad \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{xi} \dots \quad \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{yi} \dots \right]^T; \quad (14a)$$

$w$  được xấp xỉ bởi hàm Hermite như sau [16]:

$$w = H_1 w_1 + H_2 w_{1,x} + H_3 w_{1,y} + \dots + H_{10} w_4 + H_{11} w_{4,x} + H_{12} w_{4,y} \quad (14b)$$

Thay thế phương trình (14) vào phương trình (3), trường biến dạng được viết lại bởi:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3] \mathbf{q}_e; \quad (15a)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{B}_4 \quad \mathbf{B}_5] \mathbf{q}_e \quad (15b)$$

trong đó:

$$\mathbf{B}_1 = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (16a)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{(3i-2),xx} & 5N_{i,x} & 0 & H_{(3i-1),xx} & H_{(3i),xx} \\ 0 & 0 & H_{(3i-2),yy} & 0 & 5N_{i,y} & H_{(3i-1),yy} & H_{(3i),yy} \\ 0 & 0 & 2H_{(3i-2),xy} & 5N_{i,y} & 5N_{i,x} & 2H_{(3i-1),xy} & 2H_{(3i),xy} \end{bmatrix}; \quad (16b)$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{-5}{3h^2} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{(3i-2),xx} & N_{i,x} & 0 & H_{(3i-1),xx} & H_{(3i),xx} \\ 0 & 0 & H_{(3i-2),yy} & 0 & N_{i,y} & H_{(3i-2),yy} & H_{(3i),yy} \\ 0 & 0 & 2H_{(3i-2),xy} & N_{i,y} & N_{i,x} & 2H_{(3i-1),xy} & 2H_{(3i),xy} \end{bmatrix} \quad (16c)$$

$$\mathbf{B}_4 = \frac{5}{4} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{(3i-2),x} & N_i & 0 & H_{(3i-1),x} & H_{(3i),x} \\ 0 & 0 & H_{(3i-2),y} & 0 & N_i & H_{(3i-1),y} & H_{(3i),y} \end{bmatrix}; \quad (16d)$$

$$\mathbf{B}_5 = \frac{-5}{h^2} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{(3i-2),x} & N_i & 0 & H_{(3i-1),x} & H_{(3i),x} \\ 0 & 0 & H_{(3i-2),y} & 0 & N_i & H_{(3i-1),y} & H_{(3i),y} \end{bmatrix} \quad (16e)$$

Tổng năng lượng biến dạng của tấm sandwich FGM được xác định bởi:

$$\mathbf{U}_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{S_e} \mathbf{q}_e^T \mathbf{P} dS = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e - \mathbf{q}_e^T \mathbf{F}_e \quad (17)$$

trong đó:

$\mathbf{K}_e$  là ma trận độ cứng phần tử được xác định bởi:

$$\mathbf{K}_e = \int_{S_e} \left( \begin{matrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_5 \end{matrix} \right)^T \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} & \mathbb{B}^b & 0 \\ \mathbb{B} & \mathbb{F} & \mathbb{F}^b & 0 \\ \mathbb{B}^b & \mathbb{F}^b & \mathbb{H} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{A}^s & \mathbb{B}^s \\ 0 & 0 & \mathbb{B}^s & \mathbb{F}^s \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_5 \end{matrix} dS \quad (18)$$

$\mathbf{F}_e$  là vectơ tải trọng phần tử được tính như sau:

$$\mathbf{F}_e = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{P} dS \quad (19)$$

trong đó  $\mathbf{P} = \{0 \ 0 \ q_0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$  với  $q_0$  là cường độ của tải trọng phân bố đều.

### 2.3. Phương trình cân bằng tĩnh của tấm sandwich FGM

Áp dụng nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu, phương trình cân bằng của phần tử tấm được xác định bởi:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{F}_e \quad (20)$$

Sau khi tập hợp các ma trận và vectơ phần tử, phương trình cân bằng tĩnh của toàn bộ tấm sandwich FGM được xác định như sau:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (21)$$

trong đó  $\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_e$ ,  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_e$  và  $\mathbf{q} = \sum \mathbf{q}_e$  lần lượt là ma trận độ cứng tổng thể, vectơ tải trọng tổng thể và vectơ chuyển vị tổng thể.

## 3. CÁC KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

Mục đích chính của phần này là: (1) xác minh độ tin cậy của phần tử đề xuất; (2) trình bày các kết quả mới về đáp ứng tĩnh của tấm sandwich FGM.

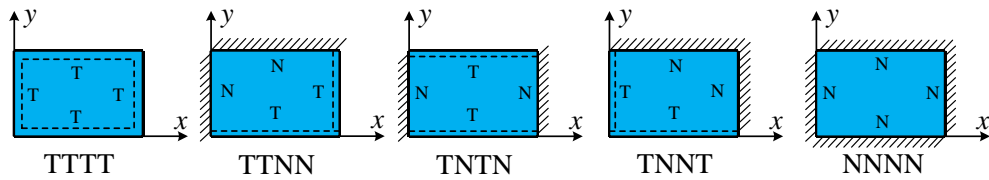
### 3.1. Các ví dụ xác minh

Để thuận tiện cho việc thực hiện các ví dụ, các tham số không thứ nguyên được giới thiệu bởi các công thức sau:

$$w^* = \frac{10E_0h}{q_0a^2} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right); \sigma_x^*(z) = \frac{10h^2}{q_0a^2} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right); \quad (22)$$

$$\sigma_{xz}^*(z) = \frac{h}{q_0a} \sigma_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, z \right); E_0 = 1 \text{ GPa.}$$

Các ký hiệu: TTTT, TTNN, TNTN, TNNT và NNNN lần lượt biểu diễn điều kiện biên tựa đơn 4 cạnh, tựa đơn-tựa đơn-ngàm-ngàm, tựa đơn-ngàm-tựa đơn-ngàm, tựa đơn-ngàm-ngàm-tựa đơn và ngàm 4 cạnh của tấm sandwich FGM được thể hiện như trên Hình 2.



Hình 2. Điều kiện biên của tấm sandwich FGM.

Bảng 2. So sánh chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM liên kết TTTT với các kích thước lưới khác nhau.

| k     | Số đồ | Kích thước lưới   |                   |         |         |         | Zenkour | Thai   |        |        |
|-------|-------|-------------------|-------------------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|
|       |       | 12 × 12           | 14 × 14           | 16 × 16 | 18 × 18 | 20 × 20 | [10]    | [14]   |        |        |
| 0     | 2-1-2 | $w^*$             | 0,1947            | 0,1949  | 0,1950  | 0,1951  | 0,1952  | 0,1961 | 0,1961 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,9837            | 1,9840  | 1,9844  | 1,9848  | 1,9852  | 2,0499 | 1,9758 |        |
|       | 1-1-1 | $w^*$             | 0,1949            | 0,1951  | 0,1952  | 0,1953  | 0,1953  | 0,1961 | 0,1961 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,9859            | 1,9862  | 1,9866  | 1,9871  | 1,9875  | 2,0499 | 1,9758 |        |
|       | 2-2-1 | $w^*$             | 0,1946            | 0,1947  | 0,1949  | 0,1949  | 0,1950  | 0,1961 | 0,1961 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,9811            | 1,9813  | 1,9818  | 1,9822  | 1,9826  | 2,0499 | 1,9758 |        |
|       | 1-2-1 | $w^*$             | 0,1945            | 0,1947  | 0,1948  | 0,1949  | 0,1950  | 0,1961 | 0,1961 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,9813            | 1,9815  | 1,9820  | 1,9824  | 1,9828  | 2,0499 | 1,9758 |        |
|       | 1     | 2-1-2             | $w^*$             | 0,3043  | 0,3046  | 0,3048  | 0,3050  | 0,3051 | 0,3063 | 0,3064 |
|       |       |                   | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,4511  | 1,4525  | 1,4536  | 1,4545  | 1,4553 | 1,4959 | 1,4517 |
| 1-1-1 |       | $w^*$             | 0,2903            | 0,2906  | 0,2908  | 0,2909  | 0,2910  | 0,2920 | 0,2920 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,3832            | 1,3847  | 1,3859  | 1,3868  | 1,3875  | 1,4262 | 1,3830 |        |
| 2-2-1 |       | $w^*$             | 0,2788            | 0,2790  | 0,2792  | 0,2794  | 0,2795  | 0,2809 | 0,2809 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,2758            | 1,2771  | 1,2782  | 1,2790  | 1,2797  | 1,3206 | 1,2775 |        |
| 1-2-1 |       | $w^*$             | 0,2688            | 0,2691  | 0,2693  | 0,2694  | 0,2695  | 0,2709 | 0,2710 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,2786            | 1,2800  | 1,2812  | 1,2821  | 1,2828  | 1,3231 | 1,2810 |        |
| 2     |       | 2-1-2             | $w^*$             | 0,3499  | 0,3502  | 0,3505  | 0,3506  | 0,3508 | 0,3523 | 0,3526 |
|       |       |                   | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,6729  | 1,6745  | 1,6758  | 1,6768  | 1,6775 | 1,7214 | 1,6750 |
|       | 1-1-1 | $w^*$             | 0,3308            | 0,3311  | 0,3314  | 0,3315  | 0,3316  | 0,3329 | 0,3330 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,5811            | 1,5828  | 1,5842  | 1,5852  | 1,5861  | 1,6275 | 1,5824 |        |
|       | 2-2-1 | $w^*$             | 0,3137            | 0,3140  | 0,3142  | 0,3144  | 0,3145  | 0,3162 | 0,3163 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,4218            | 1,4234  | 1,4246  | 1,4256  | 1,4264  | 1,4710 | 1,4253 |        |
|       | 1-2-1 | $w^*$             | 0,3001            | 0,3004  | 0,3006  | 0,3008  | 0,3009  | 0,3026 | 0,3027 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,4310            | 1,4328  | 1,4342  | 1,4353  | 1,4361  | 1,4799 | 1,4358 |        |
|       | 10    | 2-1-2             | $w^*$             | 0,4012  | 0,4016  | 0,4018  | 0,4020  | 0,4021 | 0,4041 | 0,3894 |
|       |       |                   | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,9211  | 1,9221  | 1,9229  | 1,9236  | 1,9242 | 1,9713 | 1,9216 |
| 1-1-1 |       | $w^*$             | 0,3830            | 0,3834  | 0,3836  | 0,3838  | 0,3839  | 0,3855 | 0,3724 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,8362            | 1,8377  | 1,8389  | 1,8398  | 1,8406  | 1,8838 | 1,8375 |        |
| 2-2-1 |       | $w^*$             | 0,3591            | 0,3594  | 0,3597  | 0,3598  | 0,3600  | 0,3622 | 0,3492 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,6116            | 1,6131  | 1,6144  | 1,6153  | 1,6161  | 1,6666 | 1,6160 |        |
| 1-2-1 |       | $w^*$             | 0,3451            | 0,3455  | 0,3457  | 0,3459  | 0,3460  | 0,3482 | 0,3361 |        |
|       |       | $\sigma_x^*(h/2)$ | 1,6513            | 1,6532  | 1,6548  | 1,6559  | 1,6568  | 1,7042 | 1,6587 |        |



*Ví dụ 1:* Xét tấm sandwich vuông FGM với lõi gồm có chiều dày  $h = a/10$  liên kết TTTT dưới tác dụng của tải phân bố hình sin  $q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ . Thuộc tính cơ học của vật liệu được thể hiện trong Bảng 1 với lõi được thay thế bằng  $ZrO_2$  với  $E_c = 151$  GPa,  $\nu_c = 0,3$ . Các kết quả so sánh được trình bày trong Bảng 2. Có thể thấy rằng chuyển vị  $w^*$  và ứng suất  $\sigma_x^*(z)$  ít thay đổi với kích thước lưới từ  $16 \times 16$  và gần với kết quả của phương pháp giải tích dựa trên TSDT [10] và FSDT [14]. Vì vậy, có thể khẳng định rằng phần tử được đề xuất đảm bảo độ chính xác và độ tin cậy cho bài toán uốn tĩnh tấm sandwich FGM. Từ đây, tác giả sử dụng kích thước lưới  $16 \times 16$  cho các nghiên cứu tiếp theo.

*Ví dụ 2:* Để xác minh hiệu quả của phương pháp hiện tại, tác giả so sánh chuyển vị và ứng suất của tấm vuông FGM với nghiên cứu của Vasiraja và cộng sự [17] sử dụng phần tử Shell181 với kích thước lưới  $50 \times 50$  bởi phần mềm ANSYS®15.0. Các kết quả so sánh được thể hiện trong Bảng 3, 4. Có thể thấy rằng, các kết quả thu được gần với kết quả phân tích của Vasiraja và cộng sự [17]. Từ hai ví dụ trên, có thể khẳng định độ chính xác của độ tin cậy của phương pháp hiện tại.

Bảng 3. So sánh chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất ( $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_{xz}$ ) của tấm vuông FGM ( $a/h=100$ ) liên kết NNNN dưới tác dụng của tải phân bố đều  $q_0$ .

| $k$             | $\bar{w} = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ |                          | $\bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 a} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ |                          | $\bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$ |                          |
|-----------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|
|                 | Tác giả   | Vasiraja và cộng sự [17] | Tác giả   | Vasiraja và cộng sự [17] | Tác giả   | Vasiraja và cộng sự [17] |
| <b>Gôm</b>      | 0,001234  | 0,001237                 | 28,3122   | 28,308                   | 0,639017  | 0,638044                 |
| <b>0.5</b>      | 0,001902  | 0,001949                 | 36,6621   | 36,652                   | 0,665653  | 0,665576                 |
| <b>1</b>        | 0,002471  | 0,002540                 | 42,8435   | 42,822                   | 0,693451  | 0,692580                 |
| <b>2</b>        | 0,003165  | 0,003264                 | 48,1633   | 49,154                   | 0,666412  | 0,665902                 |
| <b>5</b>        | 0,003746  | 0,003870                 | 54,4678   | 54,402                   | 0,603652  | 0,603208                 |
| <b>Kim loại</b> | 0,006500  | 0,006883                 | 28,3114   | 28,308                   | 0,639017  | 0,638044                 |

Bảng 4. So sánh chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất ( $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_{xz}$ ) của tấm vuông FGM ( $a/h=10$ ) liên kết TTTT dưới tác dụng của tải phân bố đều  $q_0$ .

| $k$             | $\bar{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ |                          | $\bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 a} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ |                          | $\bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$ |                          |
|-----------------|--|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|
|                 | Tác giả  | Vasiraja và cộng sự [17] | Tác giả   | Vasiraja và cộng sự [17] | Tác giả   | Vasiraja và cộng sự [17] |
| <b>Gôm</b>      | 0,4629   | 0,466                    | 2,9075  | 2,872                    | 0,5020  | 0,491                    |
| <b>0,5</b>      | 0,7096   | 0,712                    | 3,7887  | 3,719                    | 0,5119  | 0,501                    |
| <b>1</b>        | 0,9203   | 0,927                    | 4,4909  | 4,345                    | 0,5028  | 0,491                    |
| <b>2</b>        | 1,1815   | 1,193                    | 5,2529  | 4,988                    | 0,4657  | 0,466                    |
| <b>5</b>        | 1,4181   | 1,444                    | 6,1746  | 5,521                    | 0,4083  | 0,427                    |
| <b>Kim loại</b> | 2,4455   | 2,530                    | 2,9075  | 2,872                    | 0,4992  | 0,491                    |

### 3.2. Phân tích tĩnh tấm sandwich FGM

Đầu tiên, ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu  $k$  đến ứng xử tĩnh của tấm sandwich FGM vuông được nghiên cứu. Trong đó, Hình 3 và Bảng 5 thể hiện chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM vuông (sơ đồ 1-1-1) liên kết TTTT có chiều dày  $h = a/20$ . Hình 4 và Bảng 6 minh họa chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM vuông (sơ đồ 2-4-1) liên kết TNNT có chiều dày  $h = a/25$ . Từ các hình và bảng này có thể thấy rằng việc tăng hệ số đặc trưng vật liệu  $k$  làm tăng chuyển vị và ứng suất của các tấm sandwich FGM. Điều này là hoàn toàn phù hợp vì việc tăng hệ số đặc trưng vật liệu  $k$  dẫn đến tăng thể tích kim loại trong kết cấu và do đó làm giảm độ cứng của tấm sandwich FGM. Ngoài ra, chuyển vị tăng nhanh hơn khi  $k$  tăng từ 0 đến 2 và ít thay đổi khi  $k$  lớn hơn 2. Bên cạnh đó, phân tử hiện tại dựa trên sự kết hợp phép nội suy Lagrange và phép nội suy Hermite thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt  $\sigma_{xz}^*$  bằng không tại mặt trên và mặt dưới của tấm.

Tiếp theo, ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dày giữa các lớp (sơ đồ) đến ứng xử tĩnh của tấm sandwich FGM vuông liên kết TTTT được biểu diễn như trên Hình 5 và Bảng 7. Trong nghiên cứu này, tấm có chiều dày  $h = a/10$  và hệ số đặc trưng vật liệu nhận giá trị  $k=1$ . Có thể thấy rằng tấm sandwich có lõi FGM dày hơn sẽ “cứng” hơn dẫn đến chuyển vị và ứng suất giảm tương ứng với các sơ đồ 2-1-1; 1-1-1; 1-4-1; 1-8-1 và 0-1-0. Lưu ý rằng sơ đồ 0-1-0 là trường hợp tấm FGM thông thường và sơ đồ 2-1-1 là trường hợp tấm sandwich FGM bất đối xứng.

Bảng 5. Chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM (sơ đồ 1-1-1) liên kết tựa đơn 4 cạnh với các giá trị khác nhau của hệ số đặc trưng vật liệu  $k$ .

| Thông số không thứ nguyên | Hệ số đặc trưng vật liệu |        |        |        |        |
|---------------------------|--------------------------|--------|--------|--------|--------|
|                           | $k=0,5$                  | $k=1$  | $k=2$  | $k=4$  | $k=10$ |
| $w^*$                     | 1,1165                   | 1,1826 | 1,2436 | 1,281  | 1,2991 |
| $\sigma_x^*(h/2)$         | 4,7683                   | 4,8452 | 4,8843 | 4,8745 | 4,8398 |
| $\sigma_{xz}^*(0)$        | 0,2446                   | 0,1837 | 0,1329 | 0,0996 | 0,0991 |

Bảng 6. Chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM vuông (sơ đồ 2-4-1) liên kết tựa đơn-ngàm-ngàm-tựa đơn với các giá trị khác nhau của hệ số đặc trưng vật liệu  $k$ .

| Thông số không thứ nguyên | Hệ số đặc trưng vật liệu |        |        |        |        |
|---------------------------|--------------------------|--------|--------|--------|--------|
|                           | $k=0,5$                  | $k=1$  | $k=2$  | $k=4$  | $k=10$ |
| $w^*$                     | 0,9248                   | 10,093 | 10,812 | 11,184 | 11,399 |
| $\sigma_x^*(h/2)$         | 30,827                   | 31,622 | 32,049 | 32,325 | 33,242 |
| $\sigma_{xz}^*(0)$        | 0,1746                   | 0,1062 | 0,0797 | 0,0833 | 0,1002 |

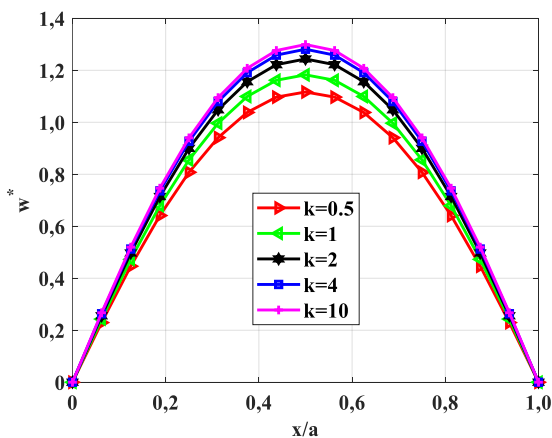
Bảng 7. Chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM vuông liên kết tựa đơn 4 cạnh với các sơ đồ khác nhau.

| Thông số không thứ nguyên | Sơ đồ  |        |        |        |        |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                           | 2-1-2  | 1-1-1  | 1-4-1  | 1-8-1  | 0-1-0  |
| $w^*$                     | 0,3099 | 0,303  | 0,2752 | 0,2611 | 0,2422 |
| $\sigma_x^*(h/2)$         | 4,9222 | 4,8678 | 4,6538 | 4,5385 | 4,4319 |
| $\sigma_{xz}^*(0)$        | 0,3325 | 0,3442 | 0,3782 | 0,3865 | 0,3912 |

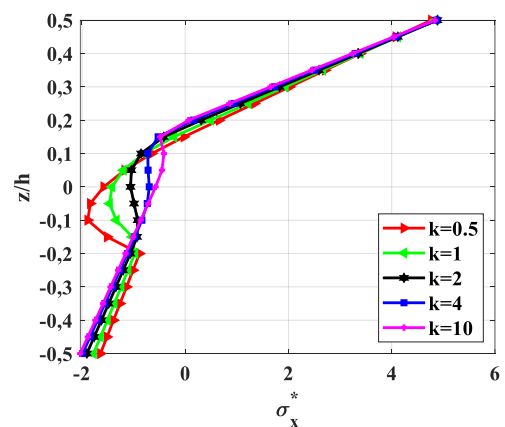
Bảng 8. Chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM vuông (sơ đồ 1-8-1) với các điều kiện biên khác nhau.

| Thông số không thứ nguyên | Điều kiện biên |         |         |        |         |
|---------------------------|----------------|---------|---------|--------|---------|
|                           | TTTT           | TTNN    | TNTN    | TNNT   | NNNN    |
| $w^*$                     | 6,2839         | 3,3936  | 2,9436  | 3,3936 | 1,9385  |
| $\sigma_x^*(h/2)$         | 4,5071         | 2,8098  | 3,1131  | 2,939  | 2,1476  |
| $\sigma_{xz}^*(0)$        | -0,0611        | -0,1228 | -0,0725 | 0,0316 | -0,1141 |

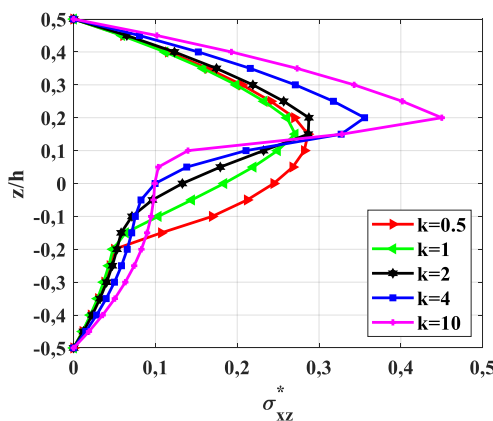
Cuối cùng, Hình 6 và Bảng 8 trình bày ảnh hưởng của điều kiện biên đến ứng xử tĩnh của tấm sandwich FGM vuông (sơ đồ 1-8-1) với chiều dày  $h = a/50$  và hệ số đặc trưng vật liệu  $k=2$ . Có thể thấy rằng, điều kiện biên tựa đơn 4 cạnh dẫn đến chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM lớn nhất, trong khi điều kiện biên ngàm 4 cạnh làm cho chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM nhỏ nhất, điều này là do điều kiện biên tựa đơn linh hoạt hơn điều kiện biên ngàm dẫn đến tấm liên kết tựa đơn “mềm” hơn tấm liên kết ngàm. Hơn nữa, việc dễ dàng áp đặt các điều kiện biên khác nhau cũng là một ưu điểm lớn của phương pháp số so với phương pháp giải tích.



a) Chuyển vị  $w^*$  của đường giữa tấm.

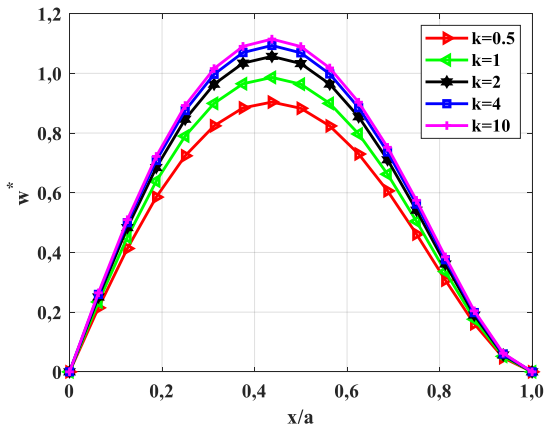


b) Ứng suất  $\sigma_x^*(z)$  theo chiều dày tấm.

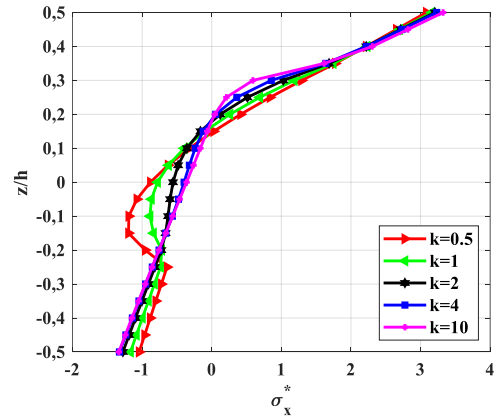


c) Ứng suất  $\tau_{xz}^*(z)$  theo chiều dày tấm.

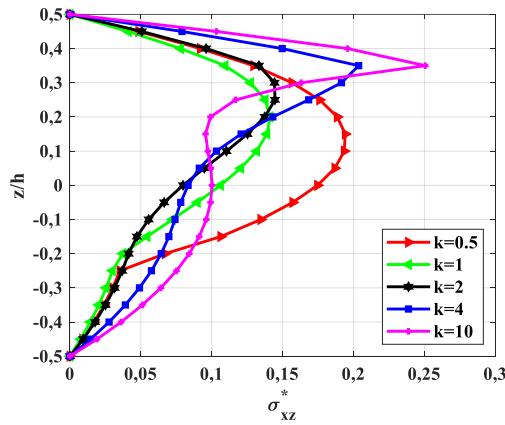
Hình 3. Ứng xử tĩnh của tấm sandwich FGM (sơ đồ 1-1-1) liên kết TTTT với các giá trị khác nhau của hệ số đặc trưng vật liệu  $k$ .



a) Chuyển vị  $w^*$  của đường giữa tấm.

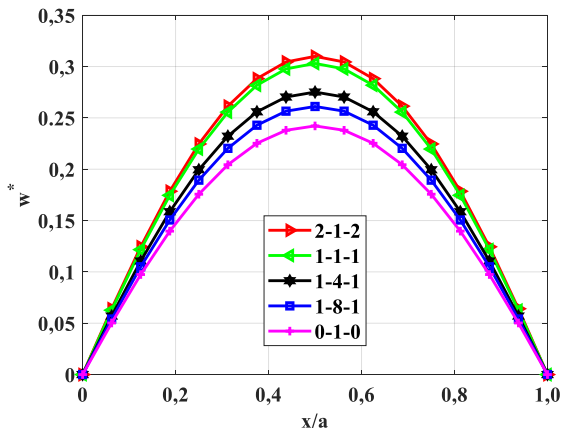


b) Ứng suất  $\sigma_x^*(z)$  theo chiều dày tấm.

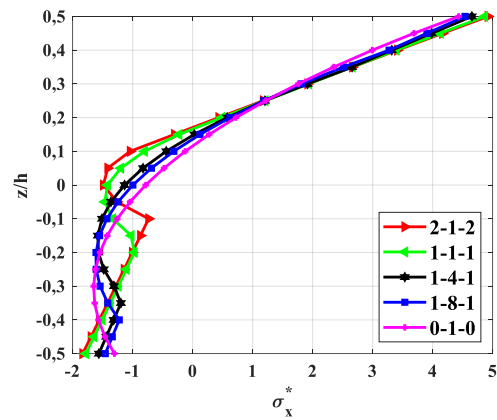


c) Ứng suất  $\sigma_{xz}^*(z)$  theo chiều dày tấm.

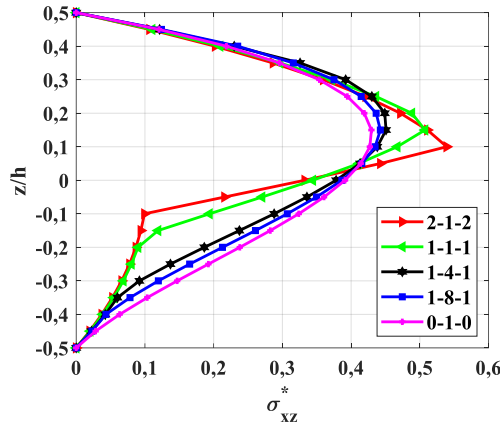
Hình 4. Ứng xử tĩnh của tấm sandwich FGM vuông (sơ đồ 2-4-1) liên kết TNNT với các giá trị khác nhau của hệ số đặc trưng vật liệu  $k$ .



a) Chuyển vị  $w^*$  của đường giữa tấm.

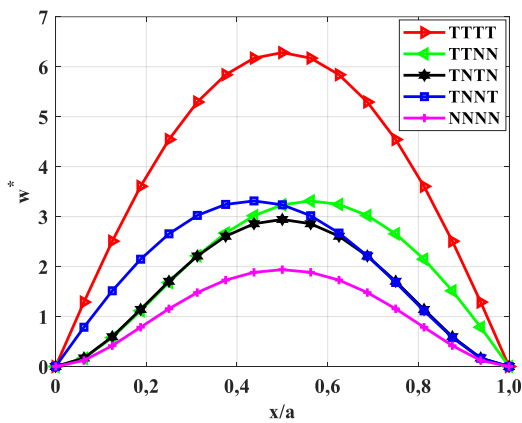


b) Ứng suất  $\sigma_x^*(z)$  theo chiều dày tấm.

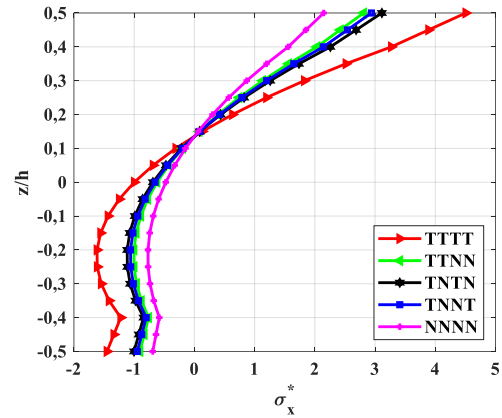


c) Ứng suất  $\sigma_{xz}^*(z)$  theo chiều dày tấm.

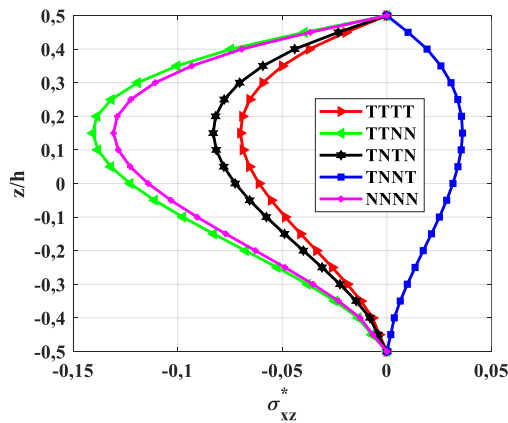
Hình 5. Ứng xử tĩnh của tấm sandwich FGM vuông liên kết TTTT với các sơ đồ khác nhau.



a) Chuyển vị  $w^*$  của đường giữa tấm.



b) Ứng suất  $\sigma_x^*(z)$  theo chiều dày tấm.



c) Ứng suất  $\sigma_{xz}^*(z)$  theo chiều dày tấm.

Hình 6. Ảnh hưởng của điều kiện biên đến ứng xử tĩnh của tấm sandwich FGM vuông.

#### 4. KẾT LUẬN

Bài báo sử dụng phần tử Q4 dựa trên TSĐT với bảy DOFs trên mỗi nút để nghiên cứu ứng xử tĩnh của các tấm sandwich FGM. Bài báo cũng phân tích và thảo luận ảnh hưởng của

các thông số hình học, thuộc tính cơ học của vật liệu đến ứng xử tĩnh của các tấm sandwich FGM. Từ các kết quả thu được có thể rút ra một số kết luận chính như sau:

- Sử dụng phần tử Q4 kết hợp với TSDT để dàng chia lưới phần tử ngay cả với các miền hình học phức tạp, thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt bằng không ở mặt trên và dưới của tấm, và tránh được hiện tượng “khóa cắt” khi sử dụng phần tử Q4 cổ điển.
- Sử dụng kết cấu bánh sandwich với lõi FGM giúp tăng cường khả năng chịu uốn của kết cấu. Cụ thể, tấm sandwich với lõi FGM dày hơn sẽ “cứng” hơn dẫn đến chuyển vị và ứng suất giảm.
- Hệ số đặc trưng vật liệu  $k$  tăng làm giảm độ cứng của tấm sandwich FGM dẫn đến tăng chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM. Cụ thể, chuyển vị tăng nhanh hơn khi  $k$  tăng từ 0 đến 2 và ít thay đổi khi  $k$  lớn hơn 2.
- Điều kiện biên ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử tĩnh của tấm sandwich FGM. Trong đó, biên ngàm làm cho tấm sandwich “cứng” hơn dẫn đến chuyển vị và ứng suất nhỏ hơn điều kiện biên tựa đơn.
- Với thuật toán và chương trình đã lập, có thể mở rộng để phân tích các lớp bài toán khác nhau như: bài toán dao động riêng, dao động cưỡng bức và các bài toán phân tích ứng xử cơ học của kết cấu sandwich FGM có kể đến yếu tố phi tuyến.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. T.P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, A. Maheri, J. Lee, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory, *Engineering structures*, 64 (2014) 12-22. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.01.029>
- [2]. M. Asghari, M. Ahmadian, M. Kahrobaian, M. Rahaeifard, On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams, *Materials & Design* (1980-2015), 31 (2010) 2324-2329. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.12.006>
- [3]. L.C. Trinh, T.P. Vo, A.I. Osofero, J. Lee, Fundamental frequency analysis of functionally graded sandwich beams based on the state space approach, *Composite Structures*, 156 (2016) 263-275. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.010>
- [4]. J. Reddy, Analysis of functionally graded plates, *International Journal for numerical methods in engineering*, 47 (2000) 663-684. <https://doi.org/10.12989/anr.2021.11.1.055>
- [5]. Luat DT, Van Thom D, Thanh TT, Van Minh P, Van Ke T, Van Vinh P, Mechanical analysis of bi-functionally graded sandwich nanobeams, *Advances in nano research*, 11 (2021) 55-71. <https://doi.org/10.12989/anr.2021.11.1.055>
- [6]. V.-H. Nguyen, T.-K. Nguyen, H.-T. Thai, T.P. Vo, A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates, *Composites Part B: Engineering*, 66 (2014) 233-246. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.012>
- [7]. F. Tornabene, Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 (2009) 2911-2935. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.04.011>
- [8]. J. L. Mantari, Refined and generalized hybrid type quasi-3d shear deformation theory for the bending analysis of functionally graded shells, *Composites Part B: Engineering*, 83 (2015) 142-152. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.08.048>
- [9]. J. Torabi, Y. Kiani, M. R. Eslami, Linear thermal buckling analysis of truncated hybrid FGM

conical shells, Composites Part B: Engineering, 50 (2013) 265–272. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.025>

[10]. A. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1–Deflection and stresses, International journal of solids and structures, 42 (2005) 5224–5242. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.015>

[11]. A.M. Zenkour, The effect of transverse shear and normal deformations on the thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates, International Journal of Applied Mechanics, 1 (2009) 667–707. <https://doi.org/10.1142/S1758825109000368>

[12]. A.A. Daikh, A.M. Zenkour, Free vibration and buckling of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates using a simple higher-order shear deformation theory, Materials Research Express, 6 (2019) 115707. <https://doi.org/10.1088/2053-1591/ab48a9>

[13]. A.A. Daikh, A.M. Zenkour, Effect of porosity on the bending analysis of various functionally graded sandwich plates, Materials Research Express, 6 (2019) 065703. <https://doi.org/10.1088/2053-1591/ab0971>

[14]. H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, T.P. Vo, J. Lee, Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory, European Journal of Mechanics-A/Solids, 45 (2014) 211–225. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.12.008>

[15]. Shi G, A new simple third-order shear deformation theory of plates, International Journal of Solids and Structures, 44 (2007) 4399–4417. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.11.031>

[16]. T. H. Nguyen, T.T. Nguyen, T.T. Tran, Q. H. Pham, Research on the mechanical behaviour of functionally graded porous sandwich plates using a new C1 finite element procedure, Results in Engineering, 17 (2023) 100817. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2022.100817>

[17]. N. Vasiraja, P. Nagaraj, The effect of material gradient on the static and dynamic response of layered functionally graded material plate using finite element method, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, 67 (2019) 827–838. <https://doi.org/10.24425/bpasts.2019.130191>