



REPRESENTATIVE AREA ELEMENT FOR DOUBLE POROSITY MATERIALS WITH RANDOM MICROSTRUCTURES

Tran Thi Bich Thao*

University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam.

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 15/10/2023

Revised: 16/11/2023

Accepted: 08/12/2023

Published online: 15/12/2023

<https://doi.org/10.47869/tcsj.74.9.6>

* *Corresponding author*

Email: tbthao.tran@utc.edu.vn

Abstract. Porous materials constitute an important class of natural or artificial materials in many engineering branches and industrial sectors. In general, a porous multiphase medium can be considered as a heterogeneous material. Note that, the representative volume element (RVE) or representative area element (RAE) play an important role in the mechanics and physics of random heterogeneous materials with a view to predicting their effective properties. Therefore, the present work aims to apply the homogenization theory for determining the minimum size of the RAE for a two-dimensional (2D) porous materials consisting of an isotropic permeable solid matrix in which fluid-filled pores are embedded. To achieve the objective, the microstructure of the RAE is randomly generated first with identical elips. The Monte-Carlo method is proposed to determine the ensemble average of the effective permeability of the porous media for many independent realizations on each area size. The minimum size of the RAE will be derived from a required precision on the average value and variance of the effective permeability.

Keywords: RVE, RAE, unit cell, effective permeability, double porosity, Monte-Carlo.

@ 2023 University of Transport and Communications



PHẦN TỬ DIỆN TÍCH ĐẶC TRƯNG CHO VẬT LIỆU RỒNG KÉP VỚI VI CẤU TRÚC NGẪU NHIÊN

Trần Thị Bích Thảo*

Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

Chuyên mục: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 15/10/2023

Ngày nhận bài sửa: 16/11/2023

Ngày chấp nhận đăng: 8/12/2023

Ngày xuất bản Online: 15/12/2023

<https://doi.org/10.47869/tcsj.74.9.6>

* Tác giả liên hệ

Email: tbthao.tran@utc.edu.vn

Tóm tắt. Vật liệu rỗng là dạng vật liệu tồn tại ở cả dạng tự nhiên và nhân tạo, nó giữ vị trí quan trọng trong một số lĩnh vực kỹ thuật và công nghiệp. Về cơ bản, môi trường rỗng nhiều pha có thể được xem là một vật liệu hỗn độn. Lưu ý rằng phần tử thể tích đặc trưng (RVE) hay phần tử diện tích đặc trưng (RAE) đóng vai trò đặc biệt quan trọng trong cơ học và vật lý học vật liệu hỗn độn ở góc độ dự báo tính chất cơ hiệu của chúng. Vì vậy, nghiên cứu này nhằm mục tiêu áp dụng lý thuyết đồng nhất hóa để xác định kích thước nhỏ nhất của RAE cho vật liệu rỗng hai chiều tạo nên bởi một môi trường chất nền đẳng hướng cho phép thấm chứa đựng trong nó các lỗ rỗng lấp đầy nước. Để đạt được mục tiêu này, cấu trúc vi mô của RAE được thiết lập bởi việc khởi tạo ngẫu nhiên trong lòng nó các elip giống nhau. Phương pháp Monte-Carlo được đề xuất sử dụng để xác định giá trị trung bình độ thấm có hiệu của môi trường rỗng đối với một vài kích thước phần tử đại diện. Kích thước nhỏ nhất của RAE được xây dựng trên cơ sở phân tích độ chính xác cần thiết của giá trị trung bình và sai số đối với đại lượng độ thấm có hiệu.

Từ khóa: RVE, RAE, phần tử đơn vị đặc trưng, độ thấm có hiệu, độ rỗng kép, Monte-Carlo.

@2023 Trường Đại học Giao thông Vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Bài toán xác định các tính chất cơ lý có hiệu của vật liệu không đồng nhất (vật liệu hỗn độn) luôn là chủ đề trọng yếu trong cơ học vật liệu nhiều thành phần. Trong đó, vật liệu rỗng là một dạng trong số vô vàn vật liệu hỗn độn nhiều thành phần. Xem xét một cách cụ thể hơn, một môi trường rỗng có thể được xem như là một vật liệu không đồng nhất gồm một pha nền rắn chứa các lỗ rỗng, đặc biệt, khi độ rỗng trong vật liệu rỗng có hai hoặc nhiều hơn hai cấp độ lỗ

rỗng khác biệt, thì vật liệu đó được gọi là có độ rỗng kép hoặc vật liệu đa cấp độ rỗng. Trong tự nhiên, nhiều vật liệu như đá, đá cát kết, đất, xương hoặc gỗ có thể được coi là vật liệu có độ rỗng kép thậm chí là đa cấp độ rỗng. Ví dụ, ở các khối đá rạn nứt, cấp độ rỗng thứ nhất bao gồm các lỗ rỗng nằm giữa các tinh thể và giữa các hạt, trong khi đó các vết nứt được xem là thuộc cấp độ rỗng thứ hai [1-3]. Một ví dụ khác trong lĩnh vực công trình đó là vật liệu đất, trong đó cấp độ rỗng thứ nhất là các lỗ rỗng nằm trong bản thân các hạt, cấp độ thứ hai là lỗ rỗng nằm giữa các hạt [4, 5]. Cụ thể hơn nữa, trong bê tông thì khoảng hở giữa các hạt cốt liệu nhỏ đại diện cho cấp độ lỗ rỗng thứ nhất, lỗ khí hay vết nứt phát sinh trong giai đoạn chế tạo cũng như khai thác đại diện cho cấp độ lỗ rỗng thứ hai.

Khi nghiên cứu một môi trường vật liệu nhiều thành phần, tại một vị trí cục bộ bất kỳ thì nó được xem là hỗn độn, tuy nhiên với một miền (mẫu) tính toán đủ lớn thì nó có thể được coi là đồng nhất. Miền tính toán nói trên được gọi tên là phần tử thể tích đại diện ký hiệu là RVE (Representative Volume Element) trong không gian ba chiều, đối với các bài toán xem xét trong không gian hai chiều phần tử này thu gọn lại thành phần tử diện tích đại diện, ký hiệu là RAE (Representative Area Element). Để đơn giản, trong nghiên cứu này chúng ta thống nhất gọi chung là phần tử đơn vị đặc trưng. Tính chất cơ, lý có hiệu (hay còn gọi là trung bình) của vật liệu nhiều thành phần ban đầu được xác định bằng cách giải các phương trình ứng xử địa phương kết hợp với việc áp các điều kiện biên cần thiết vào phần tử đơn vị đặc trưng. Vấn đề đặt ra là kích thước của RVE phải đủ hàm chứa số lượng lớn các thành phần hỗn độn, tuy nhiên kích thước của nó phải đủ nhỏ để được coi là phần tử đặc trưng của môi trường đang xem xét. Liên quan đến vấn đề xác định kích thước của RVE, chúng ta có thể kể đến các nghiên cứu của Sab [6], của Gusev [7], của Lachihab và Sab [8, 9]. Mục tiêu của nghiên cứu này hướng đến việc sử dụng phương pháp số để phân tích, xác định kích thước phần tử đơn vị đặc trưng (RAE) dùng trong bài toán tính toán độ thấm có hiệu hai chiều của vật liệu rỗng kép, trong đó lỗ rỗng ở cấp độ thứ hai được mô hình dưới dạng elip phân bố ngẫu nhiên trong miền tính toán.

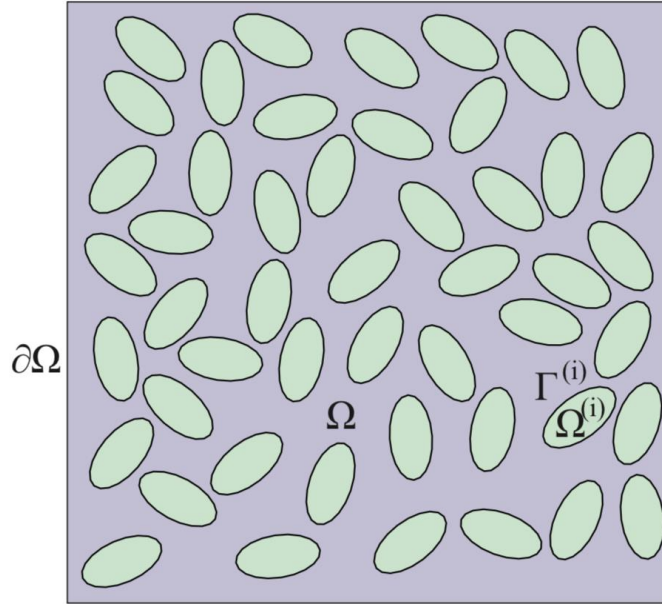
Bài báo được kết cấu theo trình tự như sau. Ở mục 2, nhóm nghiên cứu giới thiệu về mô hình mô phỏng cho việc tính toán, thiết lập hệ thống phương trình xác định độ thấm có hiệu đồng thời với các phương trình cơ sở của phương pháp Monte-Carlo dùng để xác định độ thấm có hiệu trung bình. Tiếp đến, mục 3 dành để phân tích và nhận xét một số kết quả thu được từ việc tính toán số. Cuối cùng, một số kết luận và kiến nghị rút ra từ nghiên cứu hiện tại được trình bày ngắn gọn trong mục 4.

2. MÔ HÌNH BÀI TOÁN VÀ THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Ở đây chúng ta xem xét bài toán thấm qua môi trường vật liệu rỗng kép trong không gian hai chiều. Cấu trúc vi mô của vật liệu rỗng kép trong thực tế rất phức tạp vì vậy nó thường được lý tưởng hoá bằng các mô hình ảo. Mô hình phần tử đơn vị đặc trưng RAE cho vật liệu rỗng kép trong nghiên cứu này được cấu tạo bởi hệ thống lỗ rỗng hình elip chứa đầy chất lỏng Stokes phân bố ngẫu nhiên trong môi trường chất rắn cho phép thấm tuân theo định luật Darcy có dạng hình vuông kích thước L . Lưu ý rằng, cấp độ lỗ rỗng thứ nhất tồn tại trong môi trường chất nền Darcy và cấp độ lỗ rỗng thứ hai chính là các hạt nhân elip. Hình vẽ minh họa cho phần tử đơn vị đặc trưng này được thể hiện trên hình 1.

Chúng ta đề xuất ký hiệu Ω là miền tính toán (dạng hình vuông) phần tử đơn vị đặc trưng RAE của vật liệu rỗng nói đến ở trên. Chi tiết hơn nữa, $\Omega^{(0)}$ và $\Omega^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) là các miền con đại diện cho chất rắn Darcy và lỗ rỗng thứ- i . Mặt tiếp xúc giữa pha rắn $\Omega^{(0)}$ và pha lỏng

thứ- i $\Omega^{(i)}$ được gọi tên là $\Gamma^{(i)}$. Khi xem xét ở cấp độ vi mô, dòng chảy chất lỏng lưu chuyển qua miền chất rắn được mô tả theo phương trình Darcy, cụ thể như sau:



Hình 1. Mô hình phân tử đơn vị đặc trưng (RAE) của môi trường rỗng kép.

$$\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x}) = -\frac{k}{\mu} \nabla p^{(s)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(0)}, \quad (1)$$

trong đó $\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x})$ và $p^{(s)}(\mathbf{x})$ lần lượt là trường vận tốc và trường áp suất của dòng chất lỏng chảy trong miền Darcy $\Omega^{(0)}$; k là ký hiệu của độ thấm trong miền Darcy và μ đại diện cho độ nhớt động lực của chất lỏng.

Bên cạnh đó dòng chảy chất lỏng bên trong lỗ rỗng $\Omega^{(i)}$ được coi như tuân theo hệ phương trình Stokes dưới đây:

$$\mu \Delta \mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) = \nabla p^{(f)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(i)} \quad (2)$$

và

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(i)}, \quad (3)$$

ở đây $\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x})$ và $p^{(f)}(\mathbf{x})$ lần lượt là ký hiệu cho đại lượng vận tốc và áp suất của dòng chảy chất lỏng trong lỗ rỗng $\Omega^{(i)}$.

Tại mặt tiếp xúc giữa chất lỏng và chất rắn, trường vận tốc và áp suất của hai pha được liên hệ với nhau thông qua điều kiện Beavers–Joseph–Saffman, hệ phương trình biểu diễn điều kiện tiếp xúc này ban đầu được đề xuất bởi Beavers và Joseph [10], sau đó được điều chỉnh bởi Saffman [11], cụ thể mô tả như sau:

$$\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{với } \mathbf{x} \in \Gamma^{(i)}, \quad (4)$$

$$[\mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) = -\frac{\lambda \sqrt{k}}{\mu} [\boldsymbol{\sigma}^{(f)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) \quad \text{với } \mathbf{x} \in \Gamma^{(i)}, \quad (5)$$

$$p^{(f)}(\mathbf{x}) - p^{(s)}(\mathbf{x}) = \mu \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \left[\nabla \mathbf{u}^{(f)}(\mathbf{x}) + \nabla^T \mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x}) \right] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ với } \mathbf{x} \in \Gamma^{(i)}. \quad (6)$$

Trong các phương trình trên, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ là vector pháp tuyến với đường tiếp xúc $\Gamma^{(i)}$, hướng ra ngoài miền Stokes; $\boldsymbol{\sigma}^{(f)}(\mathbf{x})$ là tensor ứng suất Cauchy tồn tại trong miền chất lỏng Stokes; λ là hệ số trượt bán kính nghiệm không thứ nguyên, có giá trị trong khoảng từ 0 đến 5; $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ là véc tơ tiếp tuyến với đường tiếp xúc $\Gamma^{(i)}$.

Ở cấp độ vĩ mô, độ thấm có hiệu của vật liệu rỗng được xác định bởi công thức suy ra từ định luật Darcy như sau:

$$\mathbf{K}^{\text{eff}} = -\frac{\mu \mathbf{U}}{\nabla P} \quad (7)$$

với khai triển cụ thể dưới đây

$$\mathbf{K}^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} k^{\text{eff}} & 0 \\ 0 & k^{\text{eff}} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Trong đó \mathbf{K}^{eff} là tensor độ thấm có hiệu của vật liệu rỗng đang xem xét; \mathbf{U} và ∇P là vận tốc và gradient áp suất vĩ mô, hai đại lượng này được xác định thông qua biểu thức sau:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{S} \int_{\partial\Omega} [\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})] \mathbf{x} d\mathbf{x} \quad (9)$$

và

$$\nabla P = \frac{1}{S} \int_{\partial\Omega} p^{(s)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (10)$$

với $\partial\Omega$ là biên ngoài của Ω , $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ đại diện cho vector pháp tuyến hướng ra ngoài biên $\partial\Omega$, còn S là diện tích của Ω .

Việc xác định các giá trị tích phân trong biểu thức (7) đòi hỏi trường nghiệm của vận tốc $\mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x})$ và áp suất $p^{(s)}(\mathbf{x})$ trên biên $\partial\Omega$. Để tìm được các trường nghiệm này chúng ta sử dụng phương pháp phần tử biên (BEM) để giải quyết bài toán ở cấp độ vi mô, quy trình cụ thể của phương pháp số này được trình bày rất chi tiết trong một vài quyển sách của các tác giả như Pozrikidis [12, 13], như Brebbia và Dominguez [14], và như Katsikadelis [15].

Tiếp theo, gọi ϕ là giá trị tỷ lệ về thành phần diện tích (tỷ diện) của lỗ rỗng trong mẫu RAE, tức là:

$$\phi = \frac{N\pi ab}{S} \text{ và } w = \frac{a}{b}, \quad (11)$$

trong đó a, b là kích thước hai bán trục của hình elip mô tả lỗ rỗng, w là tỷ lệ giữa chúng. Chúng ta biết rằng ứng với một giá trị ϕ nhất định nếu ta tăng số lượng lỗ rỗng N đồng nghĩa với việc kích thước của phần tử đơn vị đặc trưng RAE tăng lên, hay nói cách khác là kích thước của RAE tỷ lệ thuận với số lượng lỗ rỗng N . Vì vậy bài toán xác định kích thước của RAE cũng chính là bài toán xác định số lượng N . Giá trị N phải nhỏ để mang tính đặc trưng cho môi trường vật liệu hỗn độn, nhưng nó cũng phải đủ lớn để các tính chất có hiệu của vật liệu có độ tin cậy nhất định, đây chính là mục tiêu cơ bản của nghiên cứu này.

Với một giá trị N nhất định, tương đương với một kích thước RAE nhất định, thực hiện M lần khởi tạo cấu trúc vi mô như mô tả ở hình 1, chúng ta sẽ xác định được M giá trị độ thấm có hiệu tương ứng $(k_1^{\text{eff}}, k_2^{\text{eff}}, \dots, k_M^{\text{eff}})$. Giá trị trung bình của độ thấm có hiệu theo phương pháp Monte-Carlo được xác định theo công thức sau:

$$\overline{k_M^{\text{eff}}} = \frac{1}{M} (k_1^{\text{eff}} + k_2^{\text{eff}} + \dots + k_M^{\text{eff}}), \quad (12)$$

đồng thời phương sai được xác định bởi biểu thức

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (k_i^{\text{eff}} - \overline{k_M^{\text{eff}}})^2. \quad (13)$$

Sai số tuyệt đối, sai số tương đối lần lượt được xác định như sau:

$$\epsilon_{abs} = 1,96 \frac{\sigma_M}{\sqrt{M}} \quad (14)$$

và

$$\epsilon_{rel} = 1,96 \frac{\sigma_M}{k_M^{\text{eff}} \sqrt{M}}. \quad (15)$$

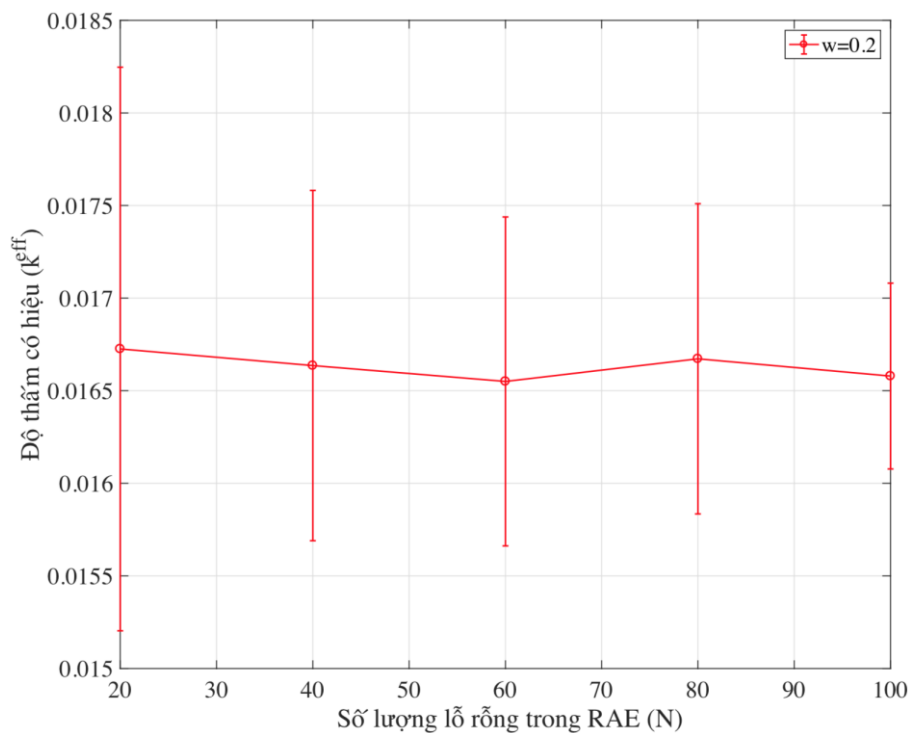
Với số lần khởi tạo cấu trúc vi mô M đủ lớn, xác suất để độ thấm có hiệu tổng thể nằm trong khoảng giá trị $\left[\overline{k_M^{\text{eff}}} - \epsilon_{rel} \overline{k_M^{\text{eff}}}, \overline{k_M^{\text{eff}}} + \epsilon_{rel} \overline{k_M^{\text{eff}}} \right]$ là 95%.

3. ÁP DỤNG SỐ VÀ PHÂN TÍCH KẾT QUẢ

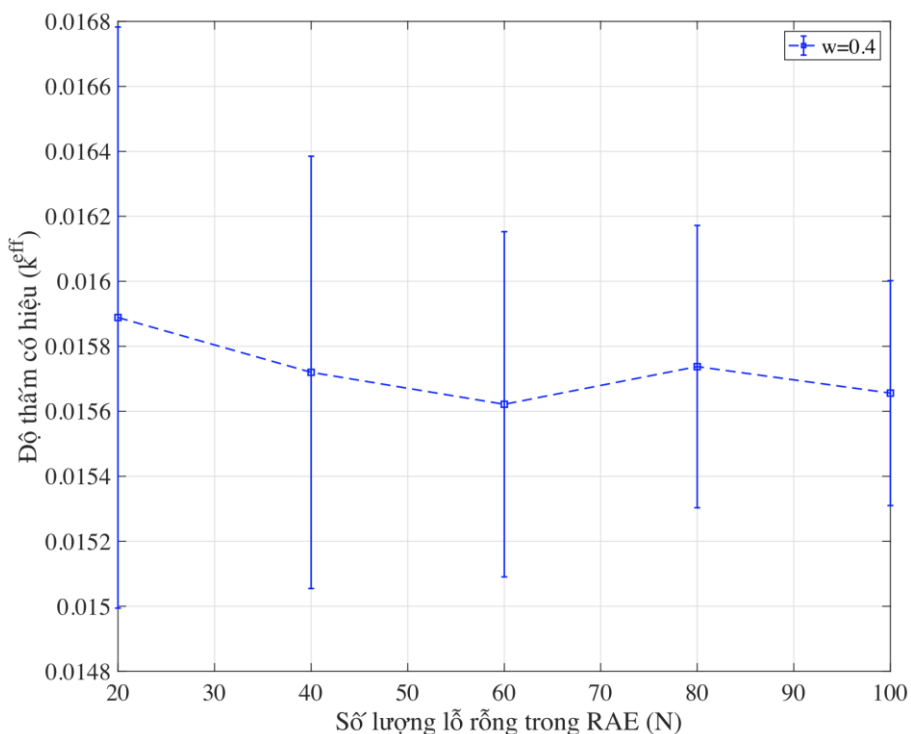
Mục này dành để phân tích mối liên hệ qua lại giữa ba tham số: Độ thấm có hiệu $\overline{k_M^{\text{eff}}}$, kích thước hay số lượng lỗ rỗng phân bố ngẫu nhiên N và số lần khởi tạo M cấu trúc vi mô RAE. Để thuận lợi cho việc phân tích, trong bài toán áp dụng số này chúng ta lựa chọn một số thông số và điều kiện đầu vào như sau: Tỷ diện $\phi = 0,2$; Số lượng lỗ rỗng phân bố ngẫu nhiên trong mẫu RAE lấy các giá trị $N = 20, 40, 60, 80, 100$. Điều kiện áp vào biên $\partial\Omega$ của phần tử đơn vị đặc trưng RAE là đại lượng áp suất biểu diễn như sau:

$$p^{(s)}(\mathbf{x}) = -\mathbf{G}^0 \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (16)$$

trong đó $\mathbf{G}^0 = (1,0)$ là gradient áp suất không đổi có tác dụng phát sinh dòng chảy lưu chuyển qua mẫu RAE. Với mỗi lần khởi tạo ngẫu nhiên vi cấu trúc, bài toán được giải số bằng phương pháp phần tử biên thu được giá trị độ thấm có hiệu tương ứng. Việc làm này được lặp đi lặp lại đến khi sai số tương đối giữa giá trị mới sinh ra với giá trị trung bình của các lần trước đó nhỏ hơn 1%. Lưu ý rằng trong ví dụ này với tỷ diện $\phi = 0,2$ không đổi chúng ta xem xét một vài trường hợp hình dạng elip của lỗ rỗng biến đổi, đặc trưng bởi tỷ lệ hai bán trục $w = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$. Mặc dù tỷ lệ hai bán trục thay đổi nhưng diện tích của mỗi lỗ rỗng không đổi đảm bảo việc giữ nguyên số lượng lỗ rỗng N trong RAE và tỷ diện bề mặt ϕ luôn không đổi trong mỗi lần khởi tạo cấu trúc vi mô của vật liệu.



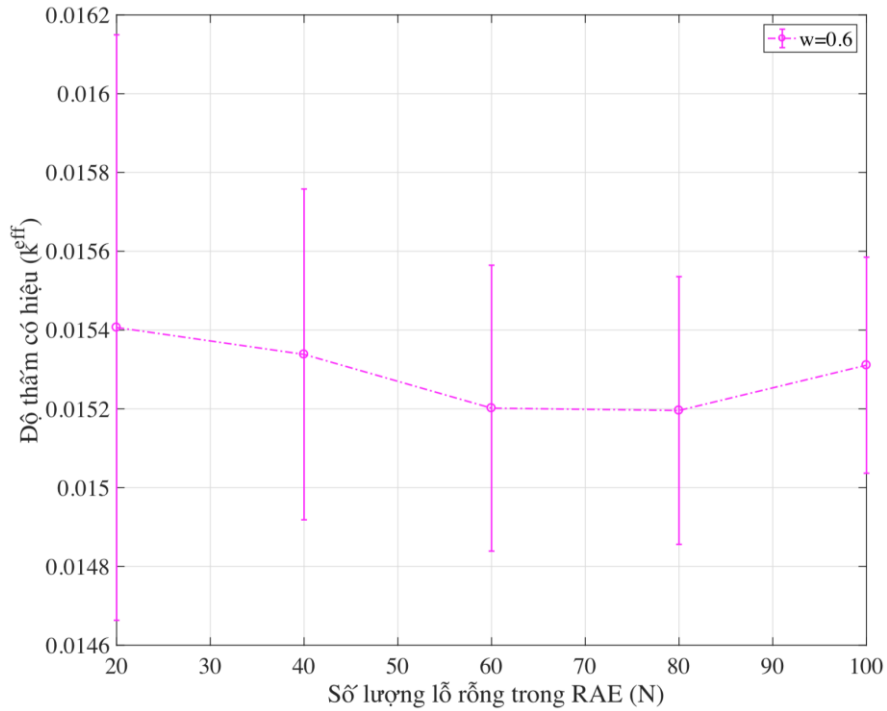
Hình 2. Biến thiên độ thấm có hiệu trung bình, phương sai theo số lượng lỗ rỗng khi $w = 0,2$.



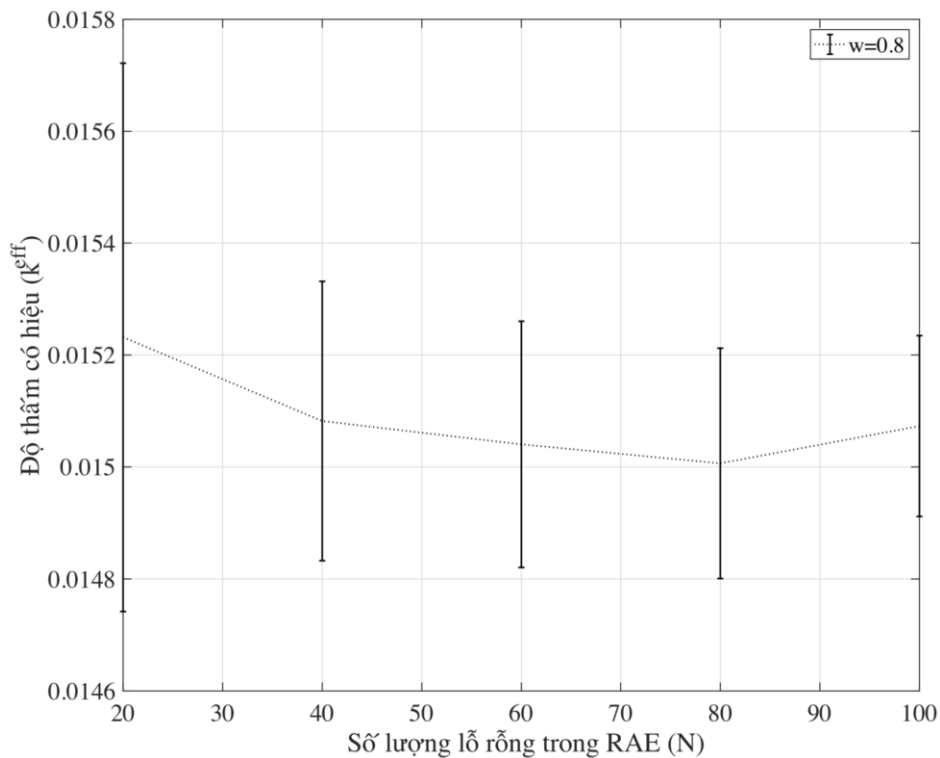
Hình 3. Biến thiên độ thấm có hiệu trung bình, phương sai theo số lượng lỗ rỗng khi $w = 0,4$.

Hình từ 2 đến hình 6 là biểu diễn giá trị trung bình của độ thấm có hiệu $\overline{k_M^{\text{eff}}}$ và phương sai của nó sau N lần gieo ngẫu nhiên vị trí lỗ rỗng để tạo nên cấu trúc vi mô của RAE, trong đó mỗi hình tương ứng với một giá trị w khác nhau. Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng giá trị độ

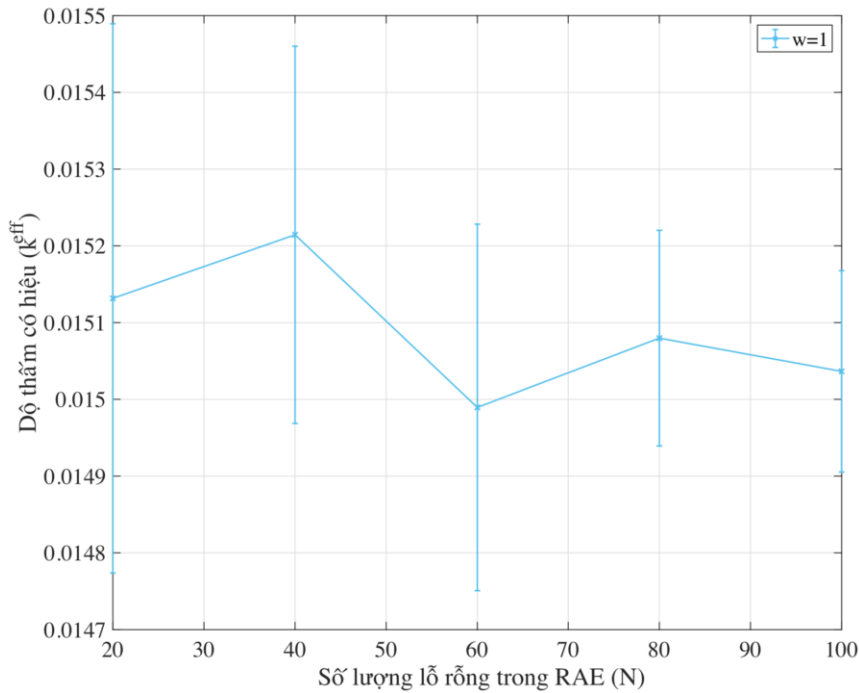
thấm có hiệu có tính ổn định, đồng thời phương sai nhỏ dần khi số lượng lỗ rỗng tăng lên, điều này chứng tỏ rằng với số lượng lỗ rỗng trong RAE đủ lớn thì giá trị độ thấm có hiệu tương ứng với mỗi lần khởi tạo cấu trúc càng hội tụ và phương sai càng nhỏ, nhận định này tạo cơ sở cho việc lựa chọn kích thước RAE một cách phù hợp.



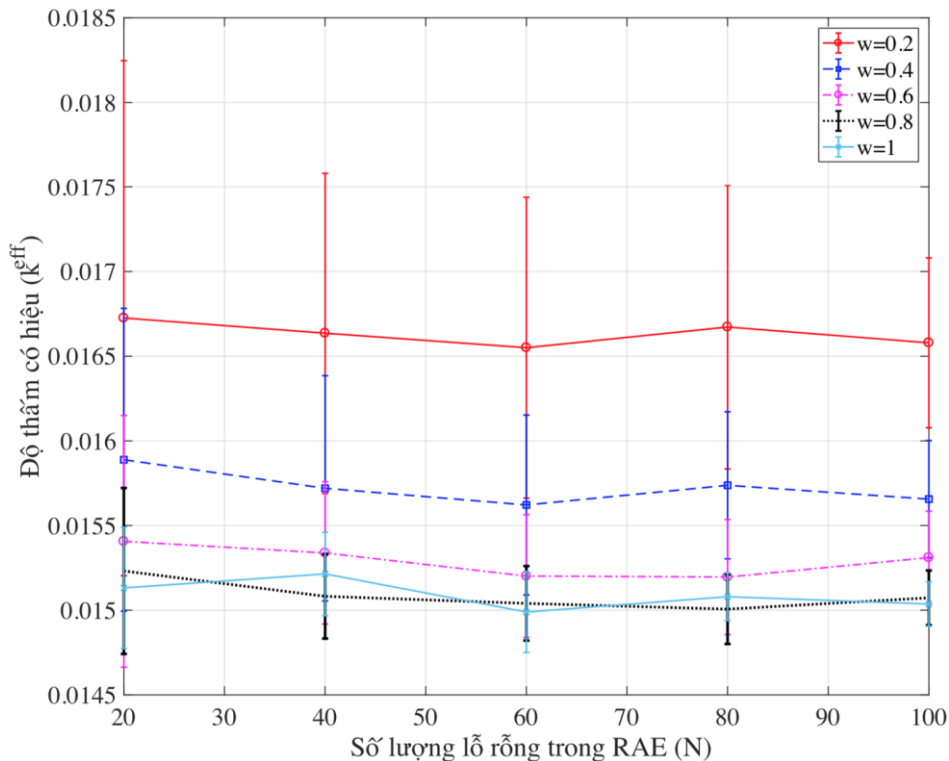
Hình 4. Biến thiên độ thấm có hiệu trung bình, phương sai theo số lượng lỗ rỗng khi $w = 0,6$.



Hình 5. Biến thiên độ thấm có hiệu trung bình, phương sai theo số lượng lỗ rỗng khi $w = 0,8$.



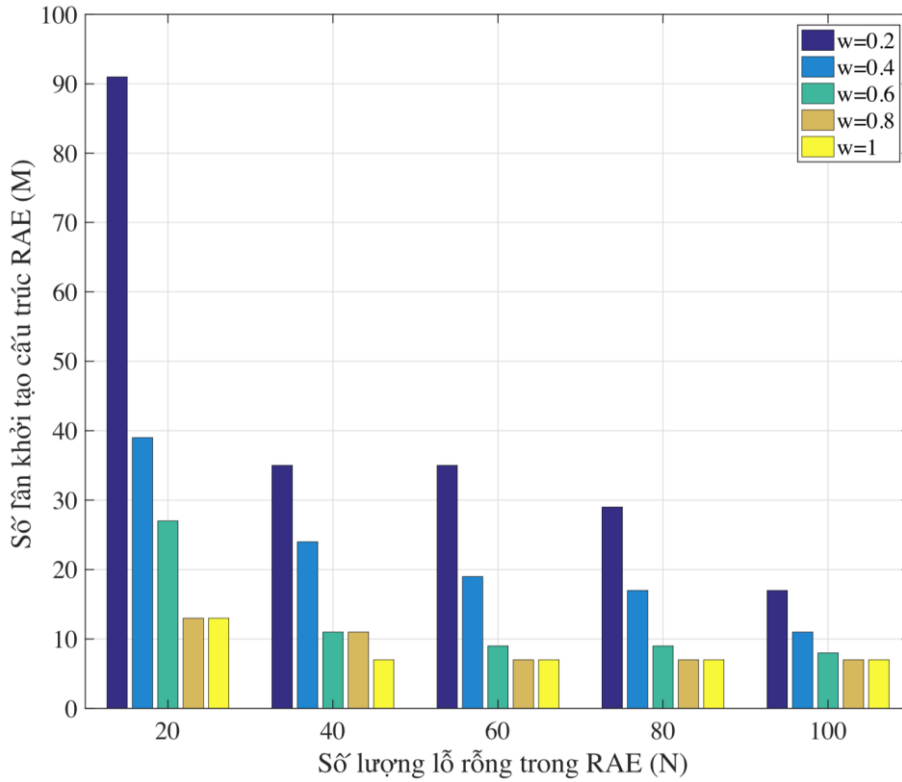
Hình 6. Biến thiên độ thấm có hiệu trung bình, phương sai theo số lượng lỗ rỗng khi $w = 1,0$.



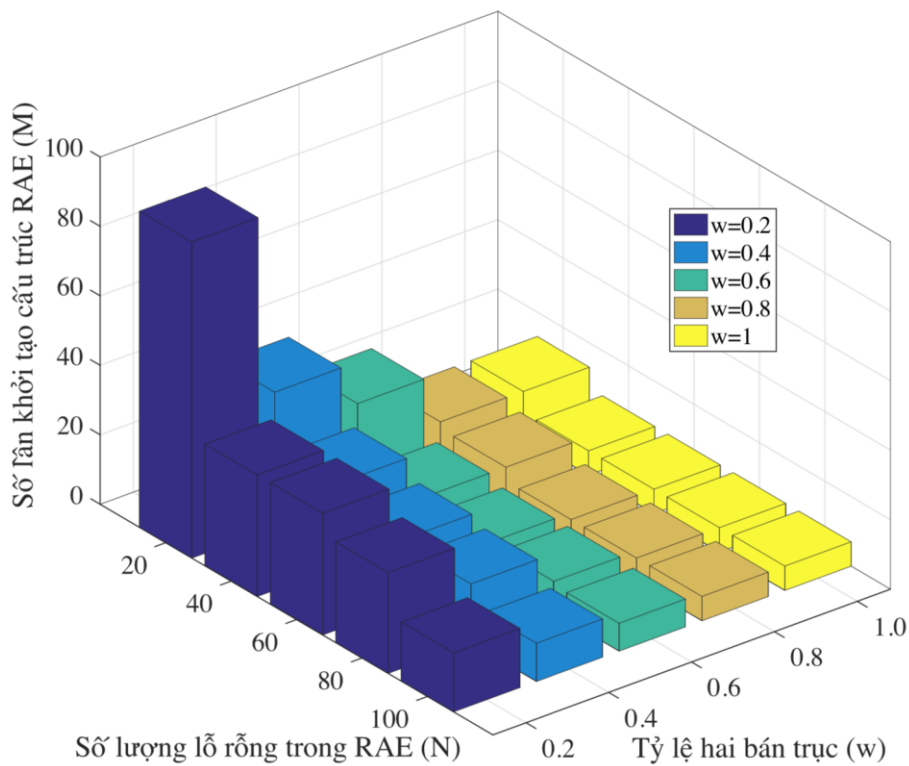
Hình 7. Biến thiên độ thấm có hiệu trung bình, phương sai theo số lượng lỗ rỗng.

Để dễ dàng so sánh, biến thiên độ thấm có hiệu trung bình $\overline{k_M^{eff}}$ và phương sai tương ứng theo sự thay đổi của số lượng lỗ rỗng N đối với tất cả các trường hợp tỷ lệ bán trục w được cùng biểu diễn trong hình 7. Qua đó chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng về cơ bản đối với mẫu RAE mà lỗ rỗng hình elip có tỷ lệ bán trục nhỏ thì độ thấm sẽ lớn hơn so với trường hợp tỷ lệ bán trục lớn. Trường hợp bán trục $w = 0,8$ và 1 thì giá trị độ thấm có hiệu trung bình có độ ổn

định nhất định và xấp xỉ bằng nhau. Như vậy có thể nhận định rằng hình dạng lỗ rỗng càng bất đẳng hướng càng làm cho vật liệu rỗng tăng khả năng thấm.



Hình 8. Số lần khởi tạo cấu trúc vi mô cần thiết đối với số lượng lỗ rỗng nhất định trong RAE.



Hình 9. Số lần khởi tạo cấu trúc vi mô cần thiết đối với số lượng lỗ rỗng nhất định trong RAE.

Hình 8 và 9 đều biểu diễn mối quan hệ giữa số lần (M) khởi tạo ngẫu nhiên cấu trúc vi mô và số lượng (N) lỗ rỗng của mẫu RAE đối với các trường hợp tỷ lệ bán trục khác nhau đã nói ở trên. Chúng ta nhận thấy rằng khi số lượng lỗ rỗng trong RAE lớn, hay nói cách khác là kích thước RAE lớn, thì số lần khởi tạo ngẫu nhiên cấu trúc vi mô giảm đi. Tức là với kích thước RAE đủ lớn thì có thể đại diện được cho cấu trúc vi mô của mô hình vật liệu rỗng đang xem xét trong nghiên cứu này. Dựa vào hình 9 chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng với số lượng lỗ rỗng nhất định, khi hình dạng elip có độ bất đẳng hướng lớn (tức là w càng nhỏ) thì cần nhiều lần khởi tạo cấu trúc vi mô RAE hơn mới đủ để tìm được giá trị độ thấm có hiệu trung bình hội tụ. Như vậy kích thước RAE phụ thuộc rất lớn vào hình dạng bất đẳng hướng của các lỗ rỗng chứa trong nó. Đây chính là cơ sở để lựa chọn kích thước RAE thích hợp đem lại kết quả độ thấm có hiệu trung bình chính xác mà số lượt phải tính toán giảm đi.

4. KẾT LUẬN

Bài báo này giới thiệu phương pháp mô phỏng để xác định kích thước phù hợp của phần tử đơn vị đặc trưng RAE trong bài toán xác định độ thấm có hiệu của mô hình vật liệu rỗng kép. Trong đó mô hình vật liệu rỗng kép được cấu trúc bởi vật liệu nền cho phép thấm (đại diện cho cấp độ thấm thứ nhất) chứa đựng trong nó là các lỗ rỗng dạng elip (đại diện cho cấp độ thấm thứ hai). Cấu trúc này được khởi tạo ngẫu nhiên và độ thấm có hiệu tương ứng được xác định bằng lời giải số dựa trên phương pháp phần tử biên. Giá trị trung bình của độ thấm có hiệu sau một số lần khởi tạo độc lập cấu trúc vi mô ứng với kích thước RAE nhất định được xác định bằng cách ứng dụng phương pháp Monte-Carlo. Kết quả nghiên cứu của bài báo là cơ sở để xác định kích thước RAE phù hợp cho các bài toán đồng nhất hóa. Kích thước phù hợp ở đây phải được hiểu là kích thước đủ nhỏ để đảm bảo sự đại diện đặc trưng cho vật liệu nhưng cũng phải đủ lớn để đảm bảo các giá trị có hiệu có độ chính xác cao, đồng thời số lần khởi tạo cấu trúc vi mô phải là ít nhất để giảm thiểu khối lượng tính toán. Tùy vào bài toán đồng nhất hoá cụ thể mà người nghiên cứu có thể đề xuất một kích thước RAE phù hợp dựa trên những phân tích nêu trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. J. Auriault, C. Boutin, Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics. I: Coupling effects, *Transp. Porous Media*, 7 (1992) 63–82. <https://doi.org/10.1007/BF00617317>
- [2]. J. Auriault, C. Boutin, Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics. II: Memory effects, *Transp. Porous Media*, 10 (1993) 153–169. <https://doi.org/10.1007/BF00617006>
- [3]. J. Auriault, C. Boutin, Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics. III: Acoustic, *Transp. Porous Media*, 14 (1994) 143–162. <https://doi.org/10.1007/BF00615198>
- [4]. C. Boutin, P. Royer, J. Auriault, Acoustic absorption of porous surfacing with dual porosity, *Int. J. Solids Struct.*, 35 (1998) 4709–4737. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00091-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00091-2)
- [5]. X. Haller, Y. Monerie, S. Pagano, P. -G. Vincent, Elastic behavior of porous media with spherical nanovoids, *Int. J. Solids Struct.*, 84 (2016) 99–109. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.01.018>
- [6]. K. Sab, On the homogenization and the simulation of random materials, *Euro J. Mech. A/Solids*, 11 (1992) 585–607.
- [7]. A. A. Gusev, Representative volume element size for elastic: A numerical study, *J. Mech. Phys. Solids*, 45 (1997) 1449–1459. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(97\)00016-1](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(97)00016-1)
- [8]. A. Lachihab, K. Sab, Aggregate composites: a contact based modeling, *Comput. Mater. Sci.*, 33 (2005) 467–490. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2004.10.003>

- [9]. A. Lachihab, K. Sab, Does a representative volume element exist for fatigue life prediction? The case of aggregate composites, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 32 (2008) 1005–1021. <https://doi.org/10.1002/nag.655>
- [10]. G. S. Beavers, D. D. Joseph, Boundary conditions at a naturally permeable wall, *J. Fluid. Mech.*, 30 (1967) 197–207. <https://doi.org/10.1017/S0022112067001375>
- [11]. P. G. Saffman, On the boundary condition at the surface of a porous medium, *Stud. Appl. Math.*, L2 (1971) 93–101. <https://doi.org/10.1002/sapm197150293>
- [12]. C. Pozrikidis, *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [13]. C. Pozrikidis, *A practical guide to boundary element methods with the software library BEMLIB*, Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [14]. C. A. Brebbia, J. Dominguez, *Boundary elements An introductory course*, WIT Press/Computational Mechanics Publications, Southamton, 1992.
- [15]. J. T. Katsikadelis, *Boundary elements: Theory and applications*, Elsevier, Amsterdam, 2002.