



IMPERFECT CONTACT MODEL IN FIBER-REINFORCED CONCRETE: ONE-DIMENSIONAL PROBLEM

Le Gia Khuyen¹, Nguyen Hoang Quan^{2*}, Tran Bao Viet²

¹Campus in Ho Chi Minh City, University of Transport and Communications, Ho Chi Minh City, Vietnam

²University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Ha Noi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 09/08/2023

Revised: 08/09/2023

Accepted: 10/10/2023

Published online: 15/12/2023

<https://doi.org/10.47869/tcsj.74.9.4>

* *Corresponding author*

Email: quannah_tkxd@utc.edu.vn; Tel: +84912907227

Abstract. Fiber-reinforced concrete is a material with many advantages due to the enhanced tensile strength from the action of dispersed fiber reinforcement. However, modeling that material still poses many challenges. The paper aims to establish a theoretical basis for the damage model of fiber-reinforced concrete materials, considering concurrent actions of fractures within the bulk material and interfacial debonding between the matrix and fibers. The model is constructed based on the thermodynamics approach, utilizing the regularization technique within the framework of the Phase-Field method. Specifically, the damage within the bulk material and the interfacial region is described by two independent phase fields and an auxiliary displacement field. Building upon the general theoretical framework, a detailed solution for the one-dimensional multiphase problem is established. Comparative examples between analytical and numerical results under various conditions demonstrate the accuracy of the proposed model, as well as the challenges involved in effectively applying it to more complex problems.

Keywords: fiber concrete, phase field, thermodynamics, finite element method, cohesive fracture.

@ 2023 University of Transport and Communications



MÔ HÌNH MẶT TIẾP XÚC KHÔNG HOÀN HẢO TRONG BÊ TÔNG CỐT SỢI: BÀI TOÁN MỘT CHIỀU

Lê Gia Khuyên¹, Nguyễn Hoàng Quân^{2*}, Trần Bảo Việt²

¹Phân hiệu tại thành phố Hồ Chí Minh, Trường Đại học Giao thông vận tải, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

²Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 09/08/2023

Ngày nhận bài sửa: 08/09/2023

Ngày chấp nhận đăng: 10/10/2023

Ngày xuất bản Online: 15/12/2023

<https://doi.org/10.47869/tcsj.74.9.4>

* Tác giả liên hệ

Email: quannah_txd@utc.edu.vn; Tel: +84912907227

Tóm tắt. Bê tông cốt sợi phân tán là vật liệu nhiều ưu điểm do tăng cường khả năng chịu kéo nhờ sự làm việc của cốt sợi phân tán. Tuy nhiên việc mô hình hóa vật liệu này vẫn còn nhiều khó khăn. Bài báo nhằm mục đích thiết lập cơ sở lý thuyết cho mô hình hư hại của vật liệu bê tông cốt sợi có tính đến sự làm việc đồng thời của hư hại tròn tại miền vật liệu nền và hư hại tựa tròn tại mặt tiếp xúc giữa pha nền và cốt liệu. Mô hình được xây dựng dựa trên cơ sở tiếp cận năng lượng, chuẩn hóa trường kỳ dị theo kiểu của phương pháp Trường pha. Trong đó, hư hại tại vật liệu nền và mặt tiếp xúc được mô tả bởi hai biến trường pha độc lập và trường chuyển vị bổ sung. Trên cơ sở lý thuyết tổng quát, lời giải chi tiết cho bài toán nhiều pha một chiều được thiết lập. Các ví dụ so sánh giữa kết quả giải tích và kết quả số cho một số điều kiện khác nhau được thực hiện chứng tỏ tính chính xác của mô hình cũng như các vấn đề cần thực hiện để áp dụng hiệu quả trong các bài toán phức tạp hơn.

Từ khóa: bê tông cốt sợi, trường pha, nhiệt động học, phần tử hữu hạn, phá hủy dính bám.

@ 2023 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hiện nay, bê tông là loại vật liệu được sử dụng rộng rãi trên toàn thế giới do có nhiều ưu điểm như khả năng chịu nén cao, độ bền lớn, giá thành rẻ. Mặc dù được sử dụng từ thế kỷ 19 nhưng đến nay loại vật liệu này vẫn không ngừng được nghiên cứu và phát triển để tạo ra các loại bê tông có tính năng cao nhằm đảm bảo cho các công trình xây dựng vừa có độ bền lớn vừa có tính thẩm mỹ cao. Ở cấp độ vật liệu (mesoscale), bê tông được coi là vật liệu có tính bất

đồng nhất cao được tạo thành từ nhiều pha vật liệu khác nhau như hạt cốt liệu lớn, hạt cốt liệu nhỏ, lỗ rỗng, vữa xi măng, miền tiếp xúc giữa các pha vật liệu (interfacial transition zone – ITZ) ... Trong đó, miền tiếp xúc có chiều dày nhỏ (40-70 μm) được coi là pha yếu nhất trong bê tông do có độ rỗng cao. Các hư hại (vết nứt) trong bê tông thường hình thành và phát triển từ miền tiếp xúc này. Tuy nhiên, phần lớn các nghiên cứu, đặc biệt các nghiên cứu công bố bằng tiếng Việt, có xu hướng bỏ qua miền tiếp xúc này với việc coi dính bám giữa nền xi măng và cốt liệu là dính bám tuyệt đối. Vai trò của miền tiếp xúc này đặc biệt quan trọng đối với bê tông cốt sợi thép phân tán. Đây là loại vật liệu trong đó các sợi thép được bố trí phân tán trong bê tông. Loại vật liệu này có một số ưu điểm hơn so với vật liệu bê tông truyền thống như: có khả năng chịu lực cao, có khả năng chịu va chạm, va đập tốt. Đối với bê tông cốt sợi thép, khi vết nứt gặp sợi, lực vẫn truyền được trong bê tông thông qua các sợi (lực bắc cầu – bridging force). Khi tiếp tục gia tải, ở thời điểm đầu sợi không bị phá hoại ngăn cản vết nứt mở rộng và phát triển. Khả năng chịu lực của mẫu không giảm xuống (sợi giữ vai trò chính trong việc chịu tải ở thời điểm này). Tiếp tục tăng tải, có ba dạng phát triển phá hoại có thể xảy ra tùy thuộc vào loại sợi và miền tiếp xúc giữa sợi với bê tông: (i) sợi tuột ra khỏi bê tông (pull-out mode), vết nứt phát triển và mở rộng; (ii) sợi bị kéo đứt, vết nứt tiếp tục phát triển và mở rộng; (iii) sợi không bị phá hoại, vết nứt tiếp tục phát triển nhưng không mở rộng. Quá trình lan truyền vết nứt trong bê tông cốt sợi tiếp tục diễn ra đến khi mẫu vật liệu ở trạng thái bão hòa vết nứt. Cuối cùng một hoặc nhiều vết nứt lớn xuất hiện làm phá hoại mẫu.

Có thể nói, khả năng dính bám (hoặc tổng quát hơn là ứng xử tại mặt tiếp xúc không hoàn hảo) giữa cốt sợi và vật liệu nền sẽ quyết định tích chất của dạng vật liệu này. Tuy nhiên việc nghiên cứu cơ chế ảnh hưởng này vẫn là một thách thức không nhỏ, cho dù bê tông cốt sợi thép phân tán đã có lịch sử nghiên cứu phát triển cũng như áp dụng dụng đại trà từ một nửa thế kỷ cho tới nay [1]. Những khó khăn tới từ việc xác định các ứng xử cục bộ đối với các công việc thực nghiệm, trong khi nghiên cứu lý thuyết thuần túy không phù hợp với mô hình hỗn độn phân tán của vật liệu. Mô hình số là một cách tiếp cận phù hợp với chủ đề này. Tuy vậy việc xây dựng mô hình số hư hại tính đến dự tương tác giữa cốt sợi và vật liệu nền là chủ đề tương đối phức tạp. Một số công bố gần đây nhất về chủ đề này cũng chưa thực sự thuyết phục để giải quyết vấn đề nêu ra [2,3].

Được phát triển trong khoảng mười năm trở lại đây, phương pháp Trường pha nổi lên như một trong những phương pháp tốt nhất để mô phỏng hư hại của môi trường vật liệu có độ bất đồng nhất cao. Nội dung cơ bản nhất của phương pháp này là biểu diễn các điểm hoặc mặt kỳ dị bằng các trường liên tục (có thể coi là các trường ảo hoặc gọi là trường pha) trên toàn miền và xây dựng các luật ứng xử có tính đến sự xuất hiện của các trường liên tục này [4]. Để tính đến ảnh hưởng của các vết nứt gây ra bởi các mặt tiếp xúc không hoàn hảo trong khuôn khổ của phương pháp Trường pha, trình tự công việc có thể được tiến hành như sau: (i) – định vị vị trí của mặt tiếp xúc dựa trên hàm level set; (ii) chuẩn hóa các kỳ dị gây ra bởi luật ứng xử không hoàn hảo tại các mặt tiếp xúc; (iii) xây dựng luật ứng xử tương ứng và kèm theo là các phép giải rời rạc hóa. Kỹ thuật này được phát triển bởi một số công bố bắt đầu từ kết quả của De Borst và cộng sự năm 2013 [5,6]. Trong phương pháp này, các tác giả đề xuất một trường biến dạng thay thế cho bước nhảy hư hại tại mặt tiếp xúc, từ đó cho phép xây dựng quy luật ứng xử trên toàn miền, kèm theo đó là kỹ thuật rời rạc hóa theo phương pháp phần tử hữu hạn. Nhược điểm của phương pháp này là gia tăng thời lượng tính toán do có trường chuyển vị bổ sung, sự giao động của ứng suất và không cho phép tính đến việc phát triển vết nứt gây ra bởi phá hủy dính bám trong miền vật rắn. Nguyễn và cộng sự năm 2016 [7] đề xuất một phương pháp thay thế trường chuyển vị bổ sung bằng hàm level set để định nghĩa bước nhảy. Phương pháp này được áp dụng để xem xét hư hại của vật liệu đa tinh thể [8]. Tuy vậy sự ảnh hưởng lớn của tham

số mô hình tới kết quả dẫn đến phương pháp này không đạt được độ tin cậy như phương pháp của nhóm De Borst. Đồng thời với các hướng nghiên cứu trên, Wu năm 2017 [9] xây dựng một phương pháp Trường pha cho vật liệu tựa ròn cho phép tính đến hư hại dính bám trên toàn miền. Tuy vậy để đánh giá ảnh hưởng phá hủy tựa ròn tại mặt tiếp xúc trên pha nền của vật liệu phá hủy ròn thì phương pháp của nhóm De Borst và cộng sự đơn giản và giảm thiểu tính toán hơn.

Trong khuôn khổ chủ đề về đánh giá hư hại của vật liệu bê tông cốt sợi thép phân tán, chúng tôi xem xét xây dựng công cụ số phần tử hữu hạn dựa trên mô hình Trường pha kết hợp với phá hủy tựa ròn tại mặt tiếp xúc theo luật phá hủy vùng dính bám. Dựa trên các phân tích ở trên, mô hình đề xuất bởi Borst và cộng sự năm 2013 [5] được ưu tiên để phát triển. Do sự nhạy cảm của các tham số mô hình tới kết quả phát triển các cách thức hư hại tại vùng xung quanh sợi, việc cần trọng đánh giá cũng như tham chiếu với các kết quả giải tích là vô cùng quan trọng. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi xem xét thiết lập mô hình phương pháp Trường pha kết hợp với mô hình mặt tiếp xúc vùng dính (cohesive zone model). Một số kết quả lý thuyết tính đến sự làm việc đồng thời của hai cơ chế hư hại tại miền vật rắn và hư hại tại mặt tiếp xúc sẽ được thiết lập lại một cách kỹ lưỡng nhằm hướng tới nhu cầu của các độc giả chính của tạp chí. Phần quan trọng hơn là chúng tôi sẽ xây dựng các lời giải chi tiết trong bài toán một chiều, cái cho phép chúng ta đạt được các nghiệm giải tích chính xác. Thông qua đó, bản chất vật lý của các đại lượng sẽ được làm rõ, đồng thời ảnh hưởng của một số thông số quan trọng của mô hình sẽ được khảo sát. Kết quả đạt được sẽ cho phép khẳng định sự chính xác của mô hình lý thuyết và là cơ sở quan trọng để phát triển các bài toán với cấu trúc vật liệu phức tạp hơn.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1 Kỹ thuật chuẩn hóa các biến rời rạc

Trong các bài toán cơ học rạn nứt nói chung, vết nứt hoặc các điểm/đường hư hại thường được xem như là các vùng vật chất kỳ dị nơi có trường ứng suất hoặc/và chuyển vị không liên tục. Dưới góc độ tiếp cận nhiệt động học, việc liên tục hóa các vùng kỳ dị là một kỹ thuật quan trọng trong tiến trình giải quyết bài toán thông qua các phương pháp rời rạc hóa. Kỹ thuật này càng ngày càng phát huy hiệu quả trong việc mô tả các bài toán hư hại phức tạp kể cả xem xét dưới góc độ hư hại cục bộ hoặc là bài toán đồng nhất. Nội dung chính là thay thế mặt rời rạc bằng một trường liên tục, hoặc gọi là trường ảo. Cơ sở toán học cơ bản của phương pháp này dựa trên định nghĩa hàm phân bố xấp xỉ Dirac với định nghĩa trong trường hợp một chiều bởi công thức

$$\delta(x) = \frac{1}{2\ell} \exp\left(-\frac{|x|}{\ell}\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (1)$$

Trong đó ℓ là tham số tỉ lệ chiều dài, lấy giá trị dương, và liên quan đến độ rộng của miền liên tục thay thế cho các mặt kỳ dị. Trên cơ sở của hàm Dirac, để thiết lập bài toán cho không gian nhiều chiều, cần thiết lập lại phương trình (1) dưới dạng lời giải của hệ phương trình vi phân bậc cao thông qua một biến vô hướng $d(\mathbf{x}) \in [0,1]$, với \mathbf{x} là tọa độ điểm vật chất

$$\begin{cases} d(\mathbf{x}) - \ell^2 \Delta d(\mathbf{x}) = 0 & (\Omega) \\ d(\mathbf{x}) = 1 & (\Gamma) \\ \nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & (\partial\Omega). \end{cases} \quad (2)$$

Với $\Omega, \Gamma, \partial\Omega, \mathbf{n}$ lần lượt ký hiệu là miền liên tục thay thế, mặt kỳ dị, biên của miền liên tục thay thế, và véc tơ pháp tại biên. Hàm mật độ $\delta(d)$ liên hiệp với trường $d(\mathbf{x})$ có thể được tính

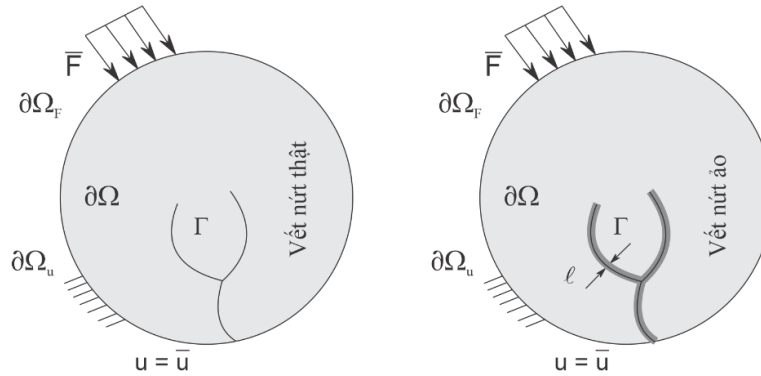
theo công thức sau và vẫn đảm bảo tính chất tại (1) với tích phân trên toàn miền đạt giá trị đơn vị

$$\delta(d, \nabla d) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{\ell} + \ell(\nabla d \cdot \nabla d) \right). \quad (3)$$

Chú ý rằng có nhiều kỹ thuật khác nhau để xây dựng hệ phương trình vi phân bậc cao và hàm mật độ Dirac, tuy nhiên trong khuôn khổ bài báo này chúng tôi sử dụng dạng mô tả phổ biến như đã thể hiện tại (2, 3). Chi tiết hơn, độc giả có thể tham khảo một số tài liệu tổng quan về phương pháp Trường pha [10].

2.2 Phương pháp Trường pha

Xét một môi trường có phát triển nứt, ký hiệu $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, với $D = 1, 2, 3$ là số chiều không gian và $\partial\Omega$ là biên của miền xem xét. Coi Γ có kích thước $D - 1$ thể hiện hư hại bên trong miền Ω (Hình 1). Áp dụng kỹ thuật chuẩn hóa tại mục trên, tổng thế năng của môi trường được định nghĩa như sau:



Hình 1. Minh họa bài toán.

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\Omega/\Gamma} \psi(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} g_c d\Gamma = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{u}, d) d\Omega + \int_{\Omega} g_c \delta(d, \nabla d) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} g(d) \psi(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} g_c \delta(d, \nabla d) d\Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Trong đó $\psi(\mathbf{u})$ là hàm mật độ năng lượng đàn hồi, g_c là năng lượng phá hủy tới hạn của miền vật rắn, \mathbf{u} là trường chuyển vị, $g(d)$ là hàm suy thoái cho phép tính đến ảnh hưởng tương tác của hư hại tới pha nền. Có nhiều kỹ thuật để xây dựng hàm suy thoái, trong bài báo này chúng tôi lấy dạng phổ biến và đơn giản nhất là hàm suy thoái bậc 2 $g(d) = (1 - d)^2 + k$, với k là tham số đảm bảo điều kiện hội tụ khi sử dụng tính toán số, với các phát triển giải tích tiếp theo, ta bỏ qua tham số này. Trong phương pháp Trường pha, vết nứt Γ được thay thế bởi trường vô hướng $d(\mathbf{x}) \in [0, 1]$, tại vị trí có vết nứt Γ thì $d = 1$ và càng ra xa vị trí có vết nứt thì d sẽ tiến về giá trị bằng 0.

Để giải bài toán được định nghĩa bởi (4) và điều kiện biên tại Hình 1, áp dụng nguyên lý tiêu hao năng lượng tối đa và cực tiểu năng, ta thu được cặp phương trình cho phép xác định trường chuyển vị $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ và trường pha $d(\mathbf{x})$ bên trong vật rắn Ω :

Phương trình xác định trường pha:

$$\begin{cases} 2(1-d)\mathcal{H} - \frac{g_c}{\ell}(d - \ell^2 \Delta d) = 0 & (\Omega) \\ d(\mathbf{x}) = 1 & (\Gamma) \\ \nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & (\partial\Omega). \end{cases} \quad (5)$$

Phương trình xác định trường chuyển vị:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, d) = \mathbf{0} & (\Omega) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} & (\partial\Omega_u) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{F}} & (\partial\Omega_F). \end{cases} \quad (6)$$

Trong phương trình **Error! Reference source not found.**, $\mathcal{H}(t)$ là hàm lịch sử mật độ năng lượng biến dạng. Hàm số này được sử dụng để miêu tả sự phụ thuộc của biến trường pha vào lịch sử gia tải và vào quá trình tăng – giảm tải trọng. Hàm số này được viết dưới dạng sau:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \max_{\tau \in [0, t]} \{\psi^+(\mathbf{x}, \tau)\}. \quad (7)$$

Trong đó dấu (+) thể hiện rằng hư hại chỉ gây ra bởi phần biến dạng kéo. Cùng với kỹ thuật về xây dựng hàm phân phối liên tục, hàm suy thoái $g(d)$, kỹ thuật phân tách biến dạng là các kỹ thuật tính toán cơ bản của phương pháp Trường pha trong nền tảng của giải quyết bài toán phương trình vi phân kèm điều kiện biên dựa trên việc rời rạc hóa cấu trúc theo kiểu phần tử hữu hạn.

2.3 Chuẩn hóa mô hình vùng dính bám tại mặt tiếp xúc

Khác biệt lớn nhất giữa mô hình phá hủy dính bám và mô hình phá hủy tròn ở điểm là với phá hủy dính bám, năng lượng phá hủy thay đổi tỉ lệ với sự phát triển của bước nhảy chuyển vị tại mặt phá hủy. Điều đó cho phép phá hủy dính bám mô tả khá tốt ứng xử vật liệu trong một số trường hợp. Tích hợp mô hình vùng dính bám cổ điển kiểu Barenblatt trong nền tiếp cận cơ học phá hủy đàn hồi tuyến tính cũng như phương pháp Trường pha đã được thực hiện bởi một số nhóm nghiên cứu như giới thiệu tại Mục 1. Trong số đó, mô hình thiết lập bởi Verhoosel and de Borst (2013) [5] đóng vai trò quan trọng và chứng tỏ hiệu quả trong một số nghiên cứu rất gần đây. Trong mô hình này, năng lượng phá hủy được định nghĩa như là tổn thất tạo ra một đơn vị bề mặt phá hủy, phụ thuộc vào bước nhảy chuyển vị tại mặt phá hủy $[\mathbf{u}]$ và lịch sử tải trọng κ

$$G = G([\mathbf{u}], \kappa), \quad (8)$$

và lực kéo tại mặt tiếp xúc được định nghĩa như đạo hàm của bước nhảy chuyển vị

$$\mathbf{t} = \frac{\partial G([\mathbf{u}], \kappa)}{\partial [\mathbf{u}]} \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}([\mathbf{u}], \kappa). \quad (9)$$

Để có thể liên tục hóa được mô hình nứt tại (8, 9), chúng ta đề xuất một trường chuyển vị liên tục/ảo để thay thế cho bước nhảy $[\mathbf{u}]$, ký hiệu là \mathbf{v}

$$[\mathbf{u}](\mathbf{x}_c) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \delta_{\beta} d\mathbf{x}_n. \quad (10)$$

Trong đó β là biến trường pha tương tự biến d được định nghĩa tại Mục 2.1, nhưng áp dụng cho mặt tiếp xúc không hoàn hảo ký hiệu bởi Γ^{β} , $\mathbf{x}_c \in \Gamma^{\beta}$, trong khi hàm mật độ δ_{β} liên hiệp với biến β được định nghĩa tại (3) khi thay d bằng β . x_n là độ lớn theo phương pháp tuyến tại điểm \mathbf{x}_c của véc tơ $\mathbf{x} - \mathbf{x}_c$, $x_n = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_c)$. Để đảm bảo điều kiện chuyển vị là không đổi dọc theo phương pháp tuyến của mặt tiếp xúc, ta có

$$\frac{\partial v(x_c)}{\partial x_n} = 0 \rightarrow v(x_c) = v(x) \rightarrow \llbracket \mathbf{u} \rrbracket(x_c) \approx \int_{-\infty}^{\infty} v(x_c) \delta_\beta dx_n = v(x_c). \quad (11)$$

2.4 Mô hình trường pha cho ứng xử phá hủy dính bám

Chúng ta quay trở lại bài toán chính của bài báo khi xem xét một môi trường gồm nhiều pha thành phần ký hiệu $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, với $D = 1, 2, 3$ là số chiều không gian và $\partial\Omega$ là biên của môi trường xem xét. Các pha vật liệu có ứng xử đàn hồi tuyến tính đặc trưng bởi độ cứng $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ và phá hủy ròn đặc trưng bởi năng lượng phá hủy $g_c(\mathbf{x})$, phụ thuộc vào vị trí không gian. Các biến hư hại của vật liệu ký hiệu như tại Mục 2.2 gồm biến trường pha d , và hàm phân bố $\delta(d, \nabla d)$. Mặt tiếp xúc giữa các pha vật liệu được xem như không hoàn hảo, tuân theo luật ứng xử vùng dính bám được mô tả tại phương trình (8, 9), được đặc trưng bởi biến trường pha β , hàm mật độ $\delta_\beta(\beta, \nabla\beta)$ và trường chuyển vị hỗ trợ $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Hệ được đặt dưới điều kiện biên kiểu Dirichlet như mô tả tại Hình 1. Mở rộng phương trình năng lượng tại (4), ta có

$$\begin{aligned} E &= \int_{\Omega} g(d) \psi(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} g_c \delta(d, \nabla d) d\Omega + \int_{\Gamma^\beta} G(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \kappa) d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \left(g(d) \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g_c \delta(d, \nabla d) + G(\mathbf{v}, \kappa) \delta_\beta(\beta, \nabla\beta) + \alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Trong công thức (12), hệ số α được bổ sung nhằm cân bằng với điều kiện chuyển vị hỗ trợ $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ không đổi dọc theo phương pháp tuyến của mặt tiếp xúc.

Áp dụng kỹ thuật biến phân, cũng như nguyên lý tiêu hao năng lượng tối đa và cực tiểu năng lượng cho phương trình (12), ta thu được cặp phương trình cho phép xác định trường chuyển vị \mathbf{u}, \mathbf{v} và trường pha $d(\mathbf{x})$ trong miền Ω :

Phương trình xác định trường pha:

$$\begin{cases} 2(1-d)\mathcal{H} - \frac{g_c}{\ell}(d - \ell^2 \Delta d) = 0 & (\Omega) \\ d(\mathbf{x}) = 1 & (\Gamma) \\ \nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & (\partial\Omega). \end{cases} \quad (13)$$

Phương trình xác định trường chuyển vị:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, d) = \mathbf{0} & (\Omega) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} & (\partial\Omega_u) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{F}} & (\partial\Omega_F) \\ \delta_\beta(\mathbf{t}(\mathbf{v}, \kappa) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = \alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} & (\Gamma^\beta) \\ \frac{\partial v(x_c)}{\partial x_n} = 0 & (\partial\Gamma^\beta). \end{cases} \quad (14)$$

Ứng suất Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ trong (14) được định nghĩa như là ứng suất tạo ra bởi năng lượng đàn hồi trong miền vật rắn

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (15)$$

với biến dạng đàn hồi $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ được xác định bởi

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p = \nabla \mathbf{u} - \mathbf{n}^{\Gamma^\beta} \otimes^s \mathbf{v} \delta_\beta. \quad (16)$$

Từ 2 hệ phương trình dạng “khỏe”, thông qua phương pháp biến phân, chúng ta có thể chuyển về dạng “yếu”, lần lượt như sau

$$\int_{\Omega} \left\{ \left(2\mathcal{H} + \frac{g_c}{\ell} \right) d\delta d + g_c \ell \nabla d \cdot \nabla d(\delta d) \right\} d\Omega = \int_{\Omega} 2 \delta \mathcal{H} d d \Omega \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e(\delta u) d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} \bar{\mathbf{F}} \cdot \delta u d\Gamma \quad \text{a,}$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \delta_{\beta}(\mathbf{t}(\mathbf{v}, \kappa) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p(\delta v)) - \alpha \frac{\partial v}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \delta v}{\partial x_n} \right\} d\Omega - \int_{\partial\Gamma^{\beta}} \frac{\partial v}{\partial x_n} \delta v d\Gamma = 0. \quad \text{b, c)}$$

Từ (17), chúng ta có thể chuyển về dạng rời rạc hóa và tính toán theo cơ sở của phương pháp phần tử hữu hạn. Việc triển khai đòi hỏi khá nhiều kỹ thuật tính toán khi phân tích biến dạng cũng như giải quyết đồng thời trường \mathbf{u}, \mathbf{v} tại phương trình (17 b, c). Tuy nhiên đây là chủ đề khác nằm ngoài khuôn khổ bài báo, chúng tôi sẽ đề cập chi tiết hơn tại các công bố tiếp theo.

3. BÀI TOÁN KÉO MỘT CHIỀU: NGHIỆM GIẢI TÍCH VÀ SỐ

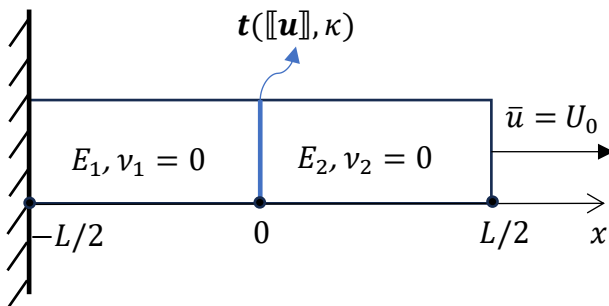
Một thực tế quan trọng rằng để có thể đánh giá được tính khả thi của một phương pháp số thì việc đầu tiên và quan trọng cần kiểm tra xem lời giải có phù hợp với các lời giải hoặc các kết quả đã được chứng thực. Nội dung chính của mục này là chúng tôi khảo sát các mô hình đã xây dựng ở mục trên trong trường hợp bài toán kéo dọc trục một thanh thẳng như mô tả tại Hình 2. Thanh gồm 2 phần có mô đun đàn hồi lần lượt là E_1, E_2 , hệ số nở ngang đều bằng không để bỏ qua ứng xử vuông góc với trục thanh. Đây là bài toán một chiều phụ thuộc vào trục x dọc trục của thanh, do đó hệ phương trình vi phân phức tạp (13-16) có thể thu được nghiệm tường minh. Hai phần có kích thước là $L/2$, kết nối bằng mặt tiếp xúc không hoàn hảo định nghĩa bởi hệ phương trình tuân theo luật dính bám như sau

$$t([\mathbf{u}]) = \frac{G_u [\mathbf{u}]}{d_n^2} \exp\left(-\frac{[\mathbf{u}]}{d_n} A_0\right), \quad d_n = \frac{G_u}{t_u \exp(A_0)}. \quad (18)$$

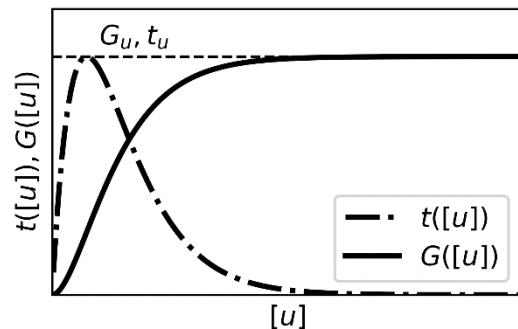
vì vậy

$$\rightarrow \mathbf{G}([\mathbf{u}]) = \int_0^{[\mathbf{u}]} t([\mathbf{u}]) d[\mathbf{u}]. \quad (19)$$

Tại quy luật dính bám (18, 19), G_u, t_u lần lượt là năng lượng pháp hủy và cường độ của bề mặt tiếp xúc. Hệ số A_0 là tham số tỉ lệ, $A_0 = 0$ tương đương với trường hợp quy luật ứng xử tuyến tính đàn hồi dạng lò xo, ngược lại đây là một quan hệ phi tuyến. Hình 3 minh họa quy luật ứng xử trong trường hợp $G_u = t_u = A_0 = 1$.



Hình 2. Minh họa bài toán kéo dọc trục một thanh thẳng với mặt tiếp xúc tại giữa.



Hình 3. Luật ứng xử dính bám tại mặt tiếp xúc với $G_u = t_u = A_0 = 1$.

Với giả thiết rằng phân bố hư hại trên toàn thanh là đều, tức là đạo hàm của biến trường pha bằng không trên toàn miền. Khi đó trường ứng suất và đàn hồi trên toàn miền là hằng số và trường chuyển vị phụ thuộc tuyến tính vào tọa độ. Khi đó, hệ phương trình (13, 14, 15, 16) được viết lại trong trường hợp bài toán một chiều chi tiết như sau.

- Vật liệu 1:

$$u^{e1}(x) = A^1x + B^1, \varepsilon^{e1} = \frac{du^{e1}}{dx} = A^1, \sigma^1 = E_1\varepsilon^{e1}. \quad (20)$$

- Vật liệu 2:

$$u^{e2}(x) = A^2x + B^2, \varepsilon^{e2} = \frac{du^{e2}}{dx} = A^2, \sigma^2 = E_2\varepsilon^{e2}. \quad (21)$$

- Trường pha:

$$\begin{aligned} 2(1-d)\frac{1}{2}E_1(\varepsilon^{e1})^2 - \frac{g_c}{\ell}d &= 0 \\ 2(1-d)\frac{1}{2}E_2(\varepsilon^{e2})^2 - \frac{g_c}{\ell}d &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

- Mặt tiếp xúc:

$$t = \frac{G_u v}{d_n^2} \exp\left(-\frac{v}{d_n} A_0\right), d_n = \frac{G_u}{t_u \exp(A_0)} \quad (23)$$

- Điều kiện biên chuyển vị

$$\begin{aligned} u^1(x) &= u^{e1} + v \int_{-L/2}^x \delta_\beta dx = u^{e1} + v \int_{-L/2}^x \frac{1}{2\ell_\beta} \exp\left(-\frac{|x|}{\ell_\beta}\right) dx \\ u^2(x) &= u^1(0) + u^{e2} + v \int_0^x \delta_\beta dx = u^1(0) + u^{e2} + v \int_{-L/2}^x \frac{1}{2\ell_\beta} \exp\left(-\frac{|x|}{\ell_\beta}\right) dx. \end{aligned} \quad (24)$$

$$u^1(-L/2) = 0, u^2(L/2) = U_0$$

- Điều kiện liên tục về ứng suất

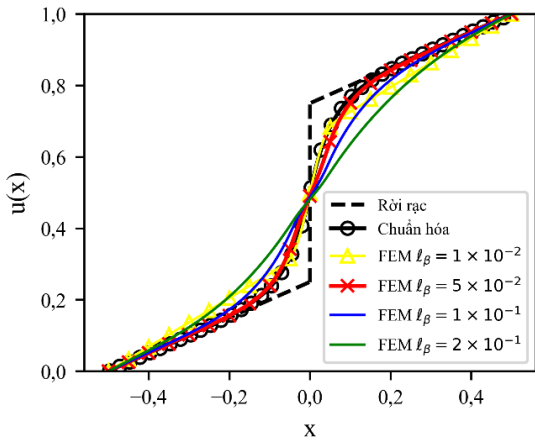
$$\sigma^1 = \sigma^2 = t \quad (25)$$

Hệ phương trình (20-25) ta có 13 ẩn và 13 phương trình, đủ điều kiện để giải quyết bài toán. Một khi đã giải được các hệ số thì $u^1(x), u^2(x)$ tại phương trình (24) thể hiện sự thay đổi của chuyển vị dọc theo chiều dài x (như sẽ được thể hiện tại Hình 4, 5, 10, 11), trong khi trường ứng suất và biến dạng sẽ được tính toán lần lượt tại phương trình (20) và (21). Trên cơ sở đó, tiếp theo trong bài báo này, chúng tôi đi khảo sát một số trường hợp cụ thể:

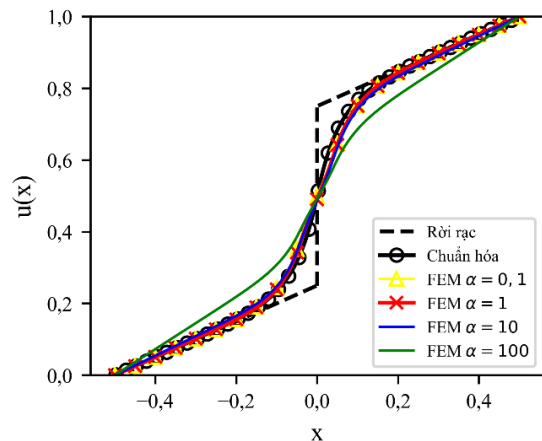
- Trường hợp rời rạc: khi không tính đến hư hại trong vật rắn ($\ell \rightarrow 0, d = 0$), và không xem xét việc chuẩn hóa bước nhảy tại mặt tiếp xúc ($\ell_\beta \rightarrow 0$).
- Trường hợp không tính đến hư hại trong vật rắn ($\ell \rightarrow 0, d = 0$), dùng kỹ thuật chuẩn hóa để giải bước nhảy tại mặt tiếp xúc.
- Trường hợp tính đến hư hại đồng thời tại vật rắn và chuẩn hóa bước nhảy tại mặt tiếp xúc.

Đầu tiên chúng tôi xem xét trường hợp khi không tính đến hư hại trong vật rắn, với tham số mô hình $E_1 = E_2 = G_u = t_u = A_0 = U_0 = 1$. Ảnh hưởng của tham số ℓ_β và α tới chuyển vị được xem xét. Kết quả giải tích trong trường hợp rời rạc (không sử dụng kỹ thuật chuẩn hóa), trường hợp bước nhảy được chuẩn hóa và phương pháp số (ký hiệu là FEM trong hình vẽ) cho các giá trị khác nhau của tham số ℓ_β và α được giới thiệu lần lượt tại Hình 4, 5. Ảnh

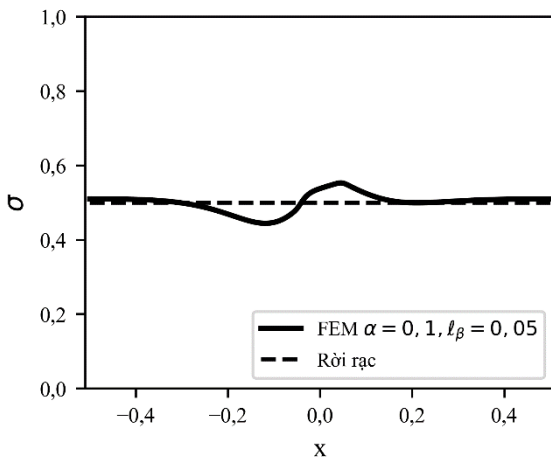
hường lớn của các tham số tới kết quả được ghi nhận. Trường hợp $\ell_\beta = 0,05$ và $\alpha = 1$, kết quả hội tụ khá tốt với các kết quả giải tích. Trong trường hợp đó, trường ứng suất và biến dạng (đàn hồi ε^e , và biến dạng tổng ε) được thể hiện tại Hình 5, 6. Sự giao động với kết quả số là không tránh khỏi tuy vậy nếu tính ứng xử tổng thể thì không lớn. Một số kỹ thuật chia lưới phần tử có thể giảm thiểu điều này [6].



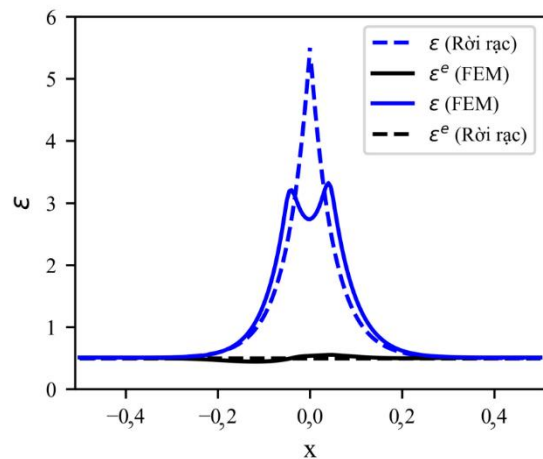
Hình 4. Phân bố chuyển vị theo vị trí - ảnh hưởng của ℓ_β .



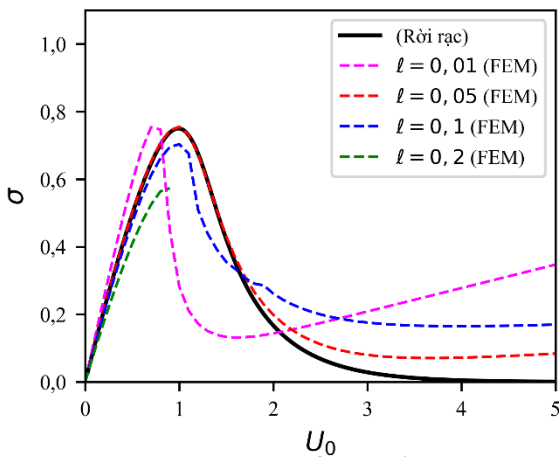
Hình 5. Phân bố chuyển vị theo vị trí - ảnh hưởng của α .



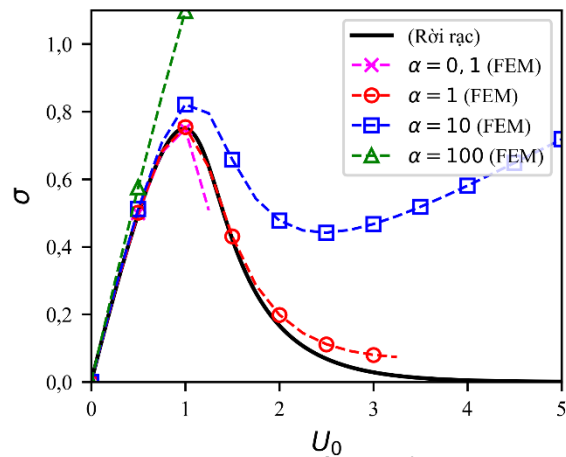
Hình 6. Phân bố ứng suất theo vị trí.



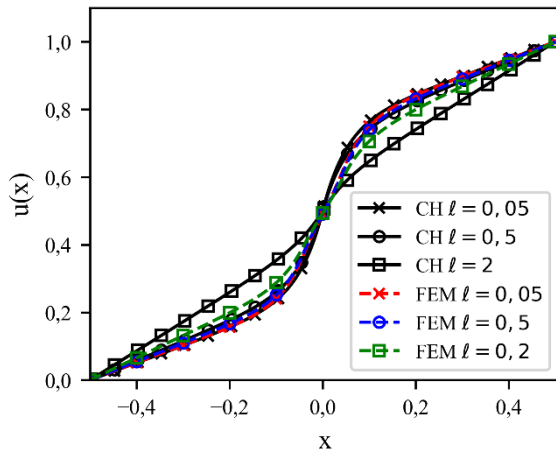
Hình 7. Phân bố biến dạng theo vị trí.



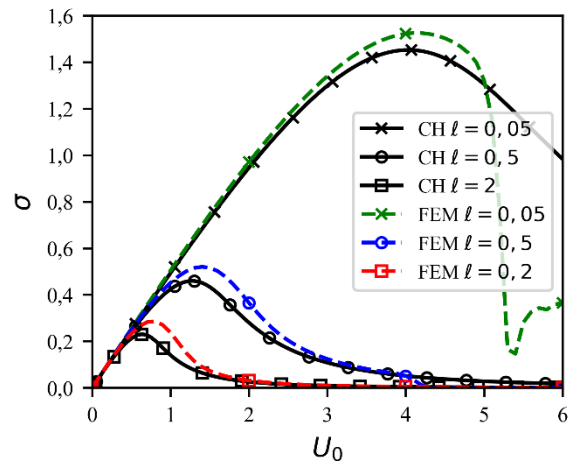
Hình 8. Quan hệ ứng suất chuyển vị - ảnh hưởng của ℓ_β .



Hình 9. Quan hệ ứng suất chuyển vị - ảnh hưởng của α .



Hình 10. Phân bố chuyển vị theo vị trí - ảnh hưởng của ℓ .



Hình 11. Quan hệ ứng suất chuyển vị - ảnh hưởng của ℓ .

Ở ví dụ tiếp theo, chúng tôi xem xét ứng xử phi tuyến của vật liệu gây ra bởi phá hoại tựa tròn theo luật vùng dính bám. Tải trọng U_0 tăng dần, với các tính chất vật liệu như sau $E_1 = G_u = A_0 = 1, t_u = 0,75, E_2 = 3$. Tương tự ví dụ trên, ảnh hưởng của tham số ℓ_β và α tới kết quả số được đối chiếu với nghiệm giải tích lần lượt tại Hình 8 và 9. Sự phụ thuộc là có thể quan sát được.

Tại ví dụ cuối cùng, chúng tôi đánh giá sự làm việc đồng thời của cả hai cơ chế phá hủy khi xem xét phá hoại tròn tại vật liệu nền. Chúng tôi cố định thông số của vật liệu và mô hình dính bám $E_1 = E_2 = G_u = t_u = 1, A_0 = 0, \ell_\beta = 0,05$ và $\alpha = 1$. Tại Hình 10, chúng tôi cố định tải trọng $U_0 = 1$, và khảo sát kết quả cho 3 trường hợp $\ell = 0,5; 0,05; 2$; với 2 cách tiếp cận giải tích (ký hiệu CH trong hình vẽ) và phần tử hữu hạn (ký hiệu FEM trong hình vẽ). Tương tự, tại Hình 11, quan hệ ứng suất - chuyển vị sẽ được xem xét. Dễ dàng nhận thấy tính chất tổng thể của vật liệu khá phụ thuộc vào tham số tỉ lệ ℓ . Vật liệu càng yếu khi ℓ tăng và ngược lại. Theo cách hiểu này ℓ có thể coi là thuộc tính của vật liệu hơn là thông số lựa chọn của mô hình. Ảnh hưởng của hệ số ℓ tới kết quả là nội dung quan trọng của phương pháp Trường pha, chúng ta có thể tham khảo thêm tại [7]. Sai số giữa giải tích và phương pháp số tại Hình 11 đến từ phần phá hủy tròn tại vật liệu nền, ta có thể khắc phục bằng cách giảm bước gia tải, tuy vậy dẫn đến tính toán tăng lên. Ảnh hưởng này sẽ được thảo luận trong các nghiên cứu tiếp theo.

6. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng một mô hình hư hại tính đến sự làm việc đồng thời hai cơ chế phá hủy tại vật liệu nền và tại bề mặt tiếp xúc không hoàn hảo trên cơ sở cách tiếp cận nhiệt động học và kỹ thuật chuẩn hóa biên kỳ dị. Từ các công thức tổng quát trong trường hợp nhiều chiều, chúng tôi xây dựng công thức tường minh cho trường hợp một chiều. Điều này cho phép tường minh các phát triển giải tích phức tạp, đồng thời là cơ sở để đối chiếu kết quả với phương pháp số. Một số ví dụ đã được thực hiện, trong đó các kết quả số được so sánh với kết quả giải tích trong trường hợp rời rạc hoặc chuẩn hóa. Sự gắn kết giữa các lời giải được ghi nhận, chứng tỏ sự chính xác trong cách xây dựng bài toán cũng như phương pháp giải. Sự phụ thuộc rất lớn của các kết quả số vào tham số của mô hình là vấn đề quan trọng của bài toán. Điều đó dẫn tới cần cẩn thận đánh giá kết quả trong các trường hợp cấu trúc vật liệu phức tạp cũng như trong việc áp dụng các kết quả mô hình với các bài toán thực tế.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2022-GHA-06.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] P. Zhang, C. Wang, Z. Gao, F. Wang, A review on fracture properties of steel fiber reinforced concrete, *Journal of Building Engineering*, 67 (2023) 105975. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2023.105975>
- [2] G. Li, B.B. Yin, L.W. Zhang, K.M. Liew, A framework for phase-field modeling of interfacial debonding and frictional slipping in heterogeneous composites, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 382 (2021) 113872. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113872>
- [3] B.B. Yin, A. Akbar, Y. Zhang, K.M. Liew, Modeling progressive failure and crack evolution in a randomly distributed fiber system via a coupled phase-field cohesive model, *Composite Structures*, 313 (2023) 116959. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.116959>
- [4] N.H. Quan, T.B. Viet, N.T. Tung, A mesoscale numerical approach to predict damage behavior in concrete basing on phase field method, *Vietnam Journal of Mechanics*, 43 (2021) 43–53. <https://doi.org/10.15625/0866-7136/15334>
- [5] C.V. Verhoosel, R. De Borst, A phase-field model for cohesive fracture: A phase field model for cohesive fracture, *International Journal Numerical Methods in Engineering*, 96 (2013) 43–62. <https://doi.org/10.1002/nme.4553>
- [6] L. Chen, R. de Borst, Phase-field regularised cohesive zone model for interface modelling, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 122 (2022) 103630. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103630>
- [7] T.T. Nguyen, J. Yvonnet, Q.-Z. Zhu, M. Bornert, C. Chateau, A phase-field method for computational modeling of interfacial damage interacting with crack propagation in realistic microstructures obtained by microtomography, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312 (2016) 567–595. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.10.007>
- [8] T.-T. Nguyen, J. Rethore, J. Yvonnet, M.-C. Baietto, Multi-phase-field modeling of anisotropic crack propagation for polycrystalline materials, *Comput. Mech.*, 60 (2017) 289–314. <https://doi.org/10.1007/s00466-017-1409-0>
- [9] J.-Y. Wu, A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 103 (2017) 72–99. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.03.015>
- [10] J.-Y. Wu, V.P. Nguyen, C.T. Nguyen, D. Sutula, S. Sinaie, S.P.A. Bordas, Chapter One - Phase-field modeling of fracture, *Advances in Applied Mechanics*, 53 (2020) 1–183. <https://doi.org/10.1016/bs.aams.2019.08.001>