



## FREE VIBRATION OF POROUS FUNCTIONALLY GRADED SANDWICH BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION BASED ON TRIGONOMETRIC SHEAR DEFORMATION THEORY

Pham Thi Ba Lien\*

Faculty of Basic Sciences, University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

### ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 02/07/2023

Revised: 30/08/2023

Accepted: 04/09/2023

Published online: 15/10/2023

<https://doi.org/10.47869/tcsj.74.8.8>

\* *Corresponding author*

Email: phamthibalien@utc.edu.vn

**Abstract.** Understanding the behavior of porous structures resting on elastic foundations plays an important role for designers. This paper studies the free vibration of a three-phase sandwich beam with porosity on a Pasternak elastic foundation using the trigonometric shear strain beam theory. The core of the sandwich beam is homogeneous, while the two face layers are made from power-law bidirectional functionally graded material. Based on Hamilton's principle, the differential equation of motion of the beam is established and solved by the finite element method to calculate the natural frequency of the beam. Numerical results are performed to confirm the accuracy and convergence of the present method. The influence of the porosity volume fraction, foundation stiffness parameters, material grading indexes, the beam layer thickness and aspect ratio on natural frequency of the beam is investigated in detail. The results in this paper also show that the porosity and elastic foundation have a great influence on the free vibration of the beam.

**Keywords:** Pasternak elastic foundation, sandwich beam, natural frequencies, porosity, functionally graded material.

@ 2023 University of Transport and Communications



# DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA DẦM SANDWICH CƠ TÍNH BIẾN THIÊN CÓ LỖ RỖNG TRÊN NỀN ĐÀN HỒI SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT LƯỢNG GIÁC

Phạm Thị Ba Liên\*

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

## THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 02/07/2023

Ngày nhận bài sửa: 30/08/2023

Ngày chấp nhận đăng: 04/09/2023

Ngày xuất bản Online: 15/10/2023

<https://doi.org/10.47869/tcsj.74.8.8>

\* Tác giả liên hệ

Email: phamthibalien@utc.edu.vn

**Tóm tắt.** Hiểu biết về ứng xử của kết cấu có lỗ rỗng đặt trên nền đàn hồi đóng vai trò quan trọng đối với các nhà thiết kế. Bài báo này nghiên cứu dao động tự do của dầm sandwich ba pha có lỗ rỗng đặt trên nền đàn hồi Pasternak bằng lý thuyết dầm biến dạng trượt dạng lượng góc. Dầm có lõi là vật liệu thuần nhất, trong khi hai lớp mặt làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên hai chiều theo quy luật hàm lũy thừa. Dựa trên nguyên lý Hamilton, phương trình vi phân chuyển động của dầm đã được thiết lập và được giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn để xác định tần số riêng của dầm. Kết quả số được thực hiện để khẳng định độ chính xác và sự hội tụ của phương pháp đưa ra trong bài báo. Ảnh hưởng của tỷ phân thể tích lỗ rỗng, tham số độ cứng nền, tham số vật liệu, độ dày các lớp trong dầm và tỷ số chiều dài/chiều dày lên tần số riêng của dầm được khảo sát chi tiết. Kết quả nghiên cứu này cũng cho thấy lỗ rỗng và nền đàn hồi có ảnh hưởng lớn đến dao động riêng của dầm.

**Từ khóa:** Nền đàn hồi Pasternak, dầm sandwich, tần số riêng, lỗ rỗng, vật liệu cơ tính biến thiên.

@ 2023 Trường Đại học Giao thông vận tải

## 1. GIỚI THIỆU

Vật liệu có cơ tính biến thiên (*Functionally Graded* - FG) là một loại vật liệu composite mới có tính chất liệu thay đổi liên tục theo một hoặc nhiều hướng. Đưa vật liệu FG vào chế tạo kết cấu sandwich tránh được các vấn đề thường gặp trong kết cấu sandwich truyền thống như nứt, tách lớp và tập trung ứng suất. Ngày nay, kết cấu sandwich FG (FGSW) được ứng

dụng nhiều trong lĩnh vực hàng không vũ trụ, hàng hải, xây dựng dân dụng,...do đó hiểu biết về ứng xử của kết cấu FGSW là một vấn đề cần thiết. Amirani và cộng sự [1] đã nghiên cứu dao động tự do của dầm FGSW có lõi FG bằng phương pháp Galerkin. Dựa trên lý thuyết biến dạng trượt cải tiến, Vo và cộng sự [2] nghiên cứu dao động tự do và mất ổn định của dầm FGSW có cơ tính biến đổi ngang. Các kết quả nghiên cứu cho thấy tham số vật liệu, độ dày lõi, tỷ số chiều dài/chiều dày và điều kiện biên có ảnh hưởng đáng kể lên tần số riêng và mất ổn định của dầm. Lý thuyết biến dạng trượt bậc cao và nguyên lý Hamilton được Nguyen và Nguyen [3], Osofero và cộng sự [4] áp dụng để thiết lập phương trình vi phân chuyển động của dầm FGSW, phương pháp nghiệm Navier được các tác giả sử dụng để nghiên cứu mất ổn định và dao động tự do của dầm hai pha. Ứng xử tĩnh của dầm FGSW có cơ tính biến đổi theo chiều dày và chiều dài của dầm được xem xét bởi Karamanlı [5] dựa trên lý thuyết biến dạng trượt tựa-3D. Phương pháp không gian trạng thái được Trinh và cộng sự [6] sử dụng để tính tần số cơ bản của dầm FGSW có lõi là vật liệu đồng nhất và lõi là vật liệu FG với các điều kiện biên khác nhau. Trong tài liệu [7], Nguyen và cộng sự đã thu nhận đáp ứng động lực học của dầm sandwich có cơ tính biến đổi theo hai hướng (*Bidirectional Functionally Graded Sandwich* - BFGSW) mang khối lượng di động dựa trên phân tử dầm được làm giàu. Dầm được xét đến trong [7] được làm từ ba pha vật liệu có tính chất thay đổi theo quy luật hàm lũy thừa, và tính chất vật liệu của chúng được xác định bằng cả mô hình Voigt và công thức Maxwell.

Trong quá trình chế tạo vật liệu FG, lỗ rỗng có thể xuất hiện do có sự khác biệt lớn về nhiệt độ hóa rắn giữa các pha vật liệu cấu thành [8]. Vì lý do này, ảnh hưởng của lỗ rỗng lên ứng xử của kết cấu FG nhận được nhiều sự quan tâm. Wattanasakulpong và Ungbhakorn [9] phân tích dao động tuyến tính và phi tuyến của dầm FG có lỗ rỗng dựa trên lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và phương pháp biến đổi vi phân. Sử dụng lý thuyết dầm Reddy, các đặc trưng dao động của dầm FG chứa lỗ rỗng được nghiên cứu bởi Ebrahimi and Jafari [10,11] trong môi trường nhiệt độ. Dựa trên phương pháp nghiệm Navier, kết quả nghiên cứu đã khảo sát chi tiết ảnh hưởng của tỷ phần thể tích lỗ rỗng và sự phân bố lỗ rỗng lên tần số riêng của dầm với sự thay đổi nhiệt độ khác nhau. Dựa trên phương pháp không gian trạng thái, Demirhan và Taskin [12] phân tích uốn và dao động tự do của tấm FG có lỗ rỗng bằng phương pháp nghiệm Levy. Sự phân bố lỗ rỗng đều và không đều được xét đến trong nghiên cứu này. Zhang và Liu quan tâm đến ảnh hưởng của lỗ rỗng lên đáp ứng động lực học của dầm micro FG chịu tác động của lực điều hòa di động. Nghiên cứu này chỉ ra rằng tỷ phần thể tích lỗ rỗng và sự phân bố lỗ rỗng đóng vai trò quan trọng trong ứng xử của dầm micro FG.

Dầm đặt trên nền đàn hồi có ứng dụng rộng rãi trong thực tiễn và sự hiểu biết về ứng xử của dầm đặt trên nền là rất cần thiết đối với các nhà thiết kế. Kien [14] đã nghiên cứu ứng xử động lực học của dầm Timoshenko chịu tải điều hòa di động đặt trên nền đàn hồi hai tham số. Bài toán uốn của dầm FGSW đặt trên nền đàn hồi Pasternak được thực hiện bởi Zenkour và cộng sự [15] dựa trên các lý thuyết dầm bậc cao khác nhau. Các tác giả sử dụng phương pháp nghiệm Navier để tính các chuyển vị trong dầm và khảo sát ảnh hưởng của các tham số độ cứng nền lên độ võng của dầm. Su và cộng sự [16] phân tích dao động tự do của dầm FGSW đặt trên nền đàn hồi bằng công thức Fourier cải tiến. Ảnh hưởng của nền đàn hồi lên tần số của dầm được tác giả thực hiện bằng cả mô hình Voigt và Mori-Tanaka. Dựa trên lưới nội suy Chebyshev, Tossapanon và Wattanasakulpong [17] nghiên cứu mất ổn định và dao động tự do của dầm FGSW đặt trên nền đàn hồi hai tham số. Dao động tự do và đáp ứng động lực học của dầm FGSW đặt trên nền đàn hồi chịu lực điều hòa di động được thực hiện bởi Songsuwan và cộng sự [18]. Lý thuyết dầm Timoshenko kết hợp với phương pháp Ritz được áp dụng trong nghiên cứu này để tính toán các đặc trưng trong dao động tự do và dao động cưỡng bức,

và ảnh hưởng của nền đàn hồi lên các đặc trưng này. Ninh [19] đã nghiên cứu tần số cơ bản của dầm sandwich đặt tựa một phần trên nền đàn hồi bằng các lý thuyết dầm khác nhau.

Trong bài báo này nghiên cứu dao động tự do của dầm BFGSW ba pha có lỗ rỗng đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Dầm có ba lớp: lớp lõi làm từ vật liệu đồng nhất và hai lớp mặt làm từ vật liệu FG ba pha có tính chất thay đổi liên tục theo cả chiều dài và chiều dày của dầm bằng quy luật hàm lũy thừa. Sự phân bố lỗ rỗng là đều. Dựa trên lý thuyết biến dạng trượt dạng lượng giác, phương trình vi phân chuyển động của dầm có lỗ rỗng đặt trên nền đàn hồi đã được thiết lập và được giải bằng phương pháp phân tử hữu hạn. Ảnh hưởng của lỗ rỗng, độ cứng nền, các tham số vật liệu và tham số hình học của dầm lên tần số riêng đã được khảo sát và thảo luận chi tiết.

## 2. CÔNG THỨC TOÁN HỌC

### 2.1. Mô hình dầm BFGSW ba pha

Trong hình 1 là mô hình dầm BFGSW ba pha với chiều rộng  $b$  và chiều dày  $h$  đặt trên nền đàn hồi. Dầm được nghiên cứu trong bài báo này có biên tựa hai đầu và được cấu tạo bởi ba lớp: lớp lõi làm từ vật liệu thuần nhất và hai lớp mặt là FGM có lỗ rỗng. Nền đàn hồi Pasternak được sử dụng ở đây, với  $k_w$  là độ cứng lò xo đàn hồi Winkler và  $k_s$  là độ cứng lớp trượt. Hệ tọa độ Đề-các  $(x, y, z)$  được chọn sao cho  $(x, y)$  nằm trong mặt phẳng giữa của dầm và trục  $z$  vuông góc với mặt phẳng giữa. Ký hiệu  $z_0 = -h/2$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  và  $z_3 = h/2$  là tọa độ theo phương trục  $z$  của mặt phẳng đáy, mặt tiếp xúc giữa các lớp và mặt phẳng trên cùng của dầm.

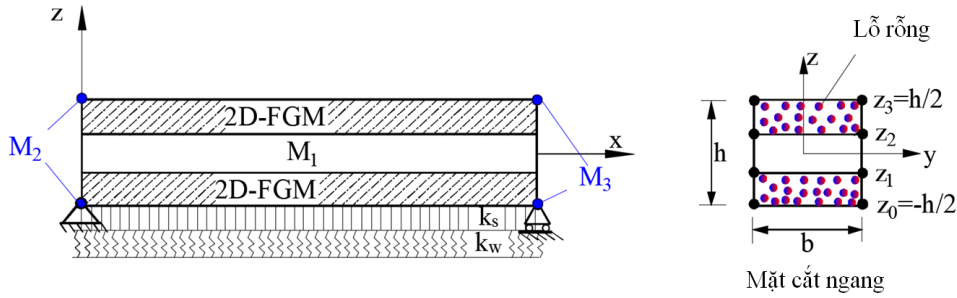
Dầm làm từ ba vật liệu riêng biệt  $M_1$ ,  $M_2$  và  $M_3$  với tỷ phần thể tích của chúng biến đổi theo cả trục  $x$  và trục  $z$  như sau [7]

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \left( \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^{n_z} \\ V_2 = \left[ 1 - \left( \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^{n_z} \right] \left[ 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^{n_x} \right] \\ V_3 = \left[ 1 - \left( \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^{n_z} \right] \left( \frac{x}{L} \right)^{n_x} \end{array} \right. \quad : \quad z \in [z_0, z_1]$$

$$V_1 = 1, V_2 = V_3 = 0 \quad : \quad z \in [z_1, z_2] \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \left( \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \right)^{n_z} \\ V_2 = \left[ 1 - \left( \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \right)^{n_z} \right] \left[ 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^{n_x} \right] \\ V_3 = \left[ 1 - \left( \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \right)^{n_z} \right] \left( \frac{x}{L} \right)^{n_x} \end{array} \right. \quad : \quad z \in [z_2, z_3]$$

trong đó  $V_1, V_2$  và  $V_3$  là tỷ phần thể tích của  $M_1, M_2$  và  $M_3$ ;  $n_x$  và  $n_z$  là các tham số vật liệu theo phương  $x$  và  $z$  tương ứng;  $L$  là chiều dài của dầm.



Hình 1. Mô hình dầm BFGSW có lỗ rỗng với biên tựa hai đầu đặt trên nền đàn hồi.

Tính chất vật liệu hiệu dụng  $P_f$  của dầm như mô-đun đàn hồi  $E_f$ , mật độ khối  $\rho_f$ , tỷ số Poisson  $\nu_f$  với sự phân bố lỗ rỗng đều được xác định bởi mô hình Voigt như [10]

$$P_f(x, z) = \begin{cases} P_1 \left( V_1 - \frac{a}{2} \right) + P_2 \left( V_2 - \frac{a}{2} \right) + P_3 \left( V_3 - \frac{a}{2} \right) & : z \in [z_0, z_1], \quad z \in [z_2, z_3] \\ P_1 V_1 + P_2 V_2 + P_3 V_3 & : z \in [z_1, z_2] \end{cases} \quad (2)$$

với  $P_1, P_2$  và  $P_3$  lần lượt là các tính chất của  $M_1, M_2$  và  $M_3$ ;  $a$  ( $a \ll 1$  [10]) là tỷ phần thể tích của lỗ rỗng.

Thế phương trình (1) vào phương trình (2), ta được

$$P_f(x, z) = \begin{cases} \left[ P_1 - P_{23}(x) \right] \left( \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^{n_z} + P_{23}(x) - \frac{a}{2} (P_1 + P_2 + P_3) & : z \in [z_0, z_1] \\ P_1 & : z \in [z_1, z_2] \\ \left[ P_1 - P_{23}(x) \right] \left( \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \right)^{n_z} + P_{23}(x) - \frac{a}{2} (P_1 + P_2 + P_3) & : z \in [z_2, z_3] \end{cases} \quad (3)$$

trong đó  $P_{23}(x) = P_2 - (P_2 - P_3) \left( \frac{x}{L} \right)^{n_x}$ . Từ phương trình (3) cho thấy, nếu  $a = 0$  thì dầm đang xét đến trở về dầm nguyên vẹn trong [7]. Nếu  $n_x = 0$  và  $a = 0$  thì phương trình (3) trở về mô hình dầm sandwich hai pha trong tài liệu [16, 18].

## 2.2. Các phương trình cơ bản

Theo lý thuyết biến dạng trượt dạng lượng giác [20], trường chuyển vị theo trục  $x$  và trục  $z$  của một điểm bất kỳ trong dầm,  $u_1(x, z, t)$  và  $u_3(x, z, t)$ , được cho dưới dạng sau

$$\begin{aligned} u_1(x, z, t) &= u(x, t) - z w_{,x}(x, t) + f(z) \theta(x, t), \\ u_3(x, z, t) &= w(x, t) \end{aligned} \quad (4)$$

trong đó  $u(x, t)$  và  $w(x, t)$  là các chuyển vị dọc trục và chuyển vị ngang của một điểm trên mặt phẳng giữa của dầm;  $\theta(x, t)$  là góc xoay của mặt cắt ngang;  $t$  là biến thời gian; dấu “,” được sử dụng để ký hiệu đạo hàm theo biến viết phía sau nó. Hàm  $f(z)$  có dạng

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (5)$$

Từ phương trình (4), các biến dạng  $\varepsilon_{xx}$  và  $\gamma_{xz}$  có dạng

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} - zw_{,xx} + f\theta_{,x}, \quad \gamma_{xz} = f_{,z}\theta \quad (6)$$

Dựa trên ứng xử tuyến tính của vật liệu, ứng suất  $\sigma_{xx}$  và  $\tau_{xz}$  được xác định như sau

$$\sigma_{xx} = E_f(x, z)\varepsilon_{xx}, \quad \tau_{xz} = G_f(x, z)\gamma_{xz} \quad (7)$$

trong đó  $G_f(x, z) = \frac{E_f(x, z)}{2[1 + \nu_f(x, z)]}$  là mô-đun trượt hiệu dụng,  $E_f$  và  $\nu_f$  được xác định từ phương trình (3).

Năng lượng biến dạng của dầm  $U_B$  được cho bởi

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dA dx \quad (8)$$

trong đó  $A$  là diện tích mặt cắt ngang của dầm.

Thế các phương trình (6) và (7) vào phương trình (8), cho ta

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^L \left( A_{11}u_{,x}^2 - 2A_{12}u_{,x}w_{,xx} + A_{22}w_{,xx}^2 + 2A_{13}u_{,x}\theta_{,x} - 2A_{23}w_{,xx}\theta_{,x} + A_{33}\theta_{,x}^2 + B_{33}\theta^2 \right) dx \quad (9)$$

với các độ cứng  $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{13}, A_{23}, A_{33}$  và  $B_{33}$  được xác định như sau

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{13}, A_{23}, A_{33}) &= b \int_{z_0}^{z_3} E_f(x, z) [1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)] dz \\ B_{33} &= b \int_{z_0}^{z_3} G_f(x, z) f_{,z}^2(z) dz \end{aligned} \quad (10)$$

Năng lượng biến dạng chứa trong nền đàn hồi  $U_F$  được xác định bởi

$$U_F = \frac{b}{2} \int_0^L (k_w w^2 + k_s w_{,x}^2) dx \quad (11)$$

Động năng  $T$  của dầm được xác định như sau

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho_f(x, z) (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2) dA dx \quad (12)$$

dấu chấm trong công thức (12) được ký hiệu là đạo hàm theo biến thời gian. Thế phương trình (4) vào phương trình trên, động năng của dầm được viết lại như sau

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ I_{11} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) - 2I_{12} \dot{u}\dot{w}_{,x} + I_{22} \dot{w}_{,x}^2 + 2I_{13} \dot{u}\dot{\theta} - 2I_{23} \dot{w}_{,x}\dot{\theta} + I_{33} \dot{\theta}^2 \right] dx \quad (13)$$

trong đó các mô-men khối lượng  $I_{11}, I_{12}, I_{22}, I_{13}, I_{23}, I_{33}$  được xác định

$$(I_{11}, I_{12}, I_{22}, I_{13}, I_{23}, I_{33}) = b \int_{z_0}^{z_3} \rho_f(x, z) [1, z, z^2 f(z), zf(z), f^2(z)] dz \quad (14)$$

Áp dụng nguyên lý Hamilton đối với các phương trình (9), (11) và (13), phương trình vi phân chuyển động cho dầm BFGSW có lỗ rỗng đặt trên nền đàn hồi có dạng

$$\begin{aligned} \delta u: & \quad (A_{11} u_{,x} - A_{12} w_{,xx} + A_{13} \theta_{,x})_{,x} = I_{11} \ddot{u} - I_{12} \ddot{w}_{,x} + I_{13} \ddot{\theta} \\ \delta w: & \quad (-A_{12} u_{,x} + A_{22} w_{,xx} - A_{23} \theta_{,x})_{,xx} = -I_{11} \ddot{w} + (-I_{12} \ddot{u} + I_{12} \ddot{w}_{,x} - I_{23} \ddot{\theta})_{,x} - b(k_w - k_s w_{,xx}) \\ \delta \theta: & \quad (A_{13} u_{,x} - A_{23} w_{,xx} + A_{33} \theta_{,x})_{,x} - B_{33} \theta = I_{13} \ddot{u} - I_{23} \ddot{w}_{,x} + I_{33} \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (15)$$

Do các độ cứng và mô-men khối lượng của dầm là các hàm phụ thuộc  $x$  nên để tìm được nghiệm dạng đóng của phương trình (15) là rất khó. Do đó phương trình (15) sẽ được giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn để tính tần số riêng của dầm có lỗ rỗng đặt trên nền đàn hồi.

### 3. CÔNG THỨC PHẦN TỬ HỮU HẠN

Giả sử rằng dầm được chia thành các phần tử dầm hai-nút có độ dài  $l$ . Khi đó véc-tơ chuyển vị nút  $\mathbf{d}$  chứa tám thành phần có dạng

$$\mathbf{d} = \{\mathbf{d}_u \quad \mathbf{d}_w \quad \mathbf{d}_\theta\}^T \quad (16)$$

trong đó

$$\mathbf{d}_u = \{u_1 \quad u_2\}^T, \quad \mathbf{d}_w = \{w_1 \quad w_{,x1} \quad w_2 \quad w_{,x2}\}^T, \quad \mathbf{d}_\theta = \{\theta_1 \quad \theta_2\}^T \quad (17)$$

là các véc-tơ chuyển vị nút đối với  $u$ ,  $w$  và  $\theta$ . Chỉ số “ $T$ ” trong các phương trình trên và sau này được sử dụng để ký hiệu cho chuyển vị của một véc-tơ hoặc ma trận.

Các chuyển vị được nội suy từ các giá trị nút của chúng theo

$$u = \mathbf{N}\mathbf{d}_u, \quad w = \mathbf{H}\mathbf{d}_w, \quad \theta = \mathbf{N}\mathbf{d}_\theta \quad (18)$$

trong đó  $\mathbf{N}=[N_1 \quad N_2]$  và  $\mathbf{H}=[H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4]$  là các ma trận của các hàm nội suy với  $N_i$  ( $i=1,2$ ) và  $H_j$  ( $j=1,\dots,4$ ) là các hàm nội suy tuyến tính và các đa thức Hermite [7].

Áp dụng các phép nội suy ở trên, năng lượng biến dạng của dầm trong phương trình (9) được viết lại dưới dạng

$$U_B = \frac{1}{2} \sum^{nel} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_B \mathbf{d} \quad (19)$$

với  $nel$  là tổng số phần tử được sử dụng để rời rạc dầm;  $\mathbf{k}_B$  là ma trận độ cứng phần tử và nó được viết dưới dạng các ma trận con như sau

$$\mathbf{k}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{uu}^B & \mathbf{k}_{uw}^B & \mathbf{k}_{u\theta}^B \\ (\mathbf{k}_{uw}^B)^T & \mathbf{k}_{ww}^B & \mathbf{k}_{w\theta}^B \\ (\mathbf{k}_{u\theta}^B)^T & (\mathbf{k}_{w\theta}^B)^T & \mathbf{k}_{\theta\theta}^B \end{bmatrix} \quad (20)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{uu}^B &= \int_0^l \mathbf{N}_{,x}^T A_{11} \mathbf{N}_{,x} dx, & \mathbf{k}_{ww}^B &= \int_0^l \mathbf{H}_{,xx}^T A_{22} \mathbf{H}_{,xx} dx, & \mathbf{k}_{\theta\theta}^B &= \int_0^l (\mathbf{N}_{,x}^T A_{33} \mathbf{N}_{,x} + \mathbf{N}^T B_{33} \mathbf{N}) dx, \\ \mathbf{k}_{uw}^B &= -\int_0^l \mathbf{N}_{,x}^T A_{12} \mathbf{H}_{,xx} dx, & \mathbf{k}_{u\theta}^B &= \int_0^l \mathbf{N}_{,x}^T A_{13} \mathbf{N}_{,x} dx, & \mathbf{k}_{w\theta}^B &= \int_0^l \mathbf{H}_{,xx}^T A_{23} \mathbf{N}_{,x} dx \end{aligned} \quad (21)$$

Năng lượng biến dạng  $U_F$  trong phương trình (11) cũng được viết lại dưới dạng

$$U_F = \frac{1}{2} \sum^{nel} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_F \mathbf{d} \quad (22)$$

trong đó  $\mathbf{k}_F$  là ma trận độ cứng phần tử của nền và được viết dưới dạng sau

$$\mathbf{k}_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{ww}^F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

với

$$\mathbf{k}_{ww}^F = b \int_0^l (\mathbf{H}^T k_w \mathbf{H} + \mathbf{H}_{,x}^T k_s \mathbf{H}_{,x}) dx \quad (24)$$

Khi đó, ma trận độ cứng tổng thể của phần tử là

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_B + \mathbf{k}_F \quad (25)$$

Tương tự, động năng của dầm trong công thức (13) cũng được viết lại

$$T = \frac{1}{2} \sum^{nel} \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{d}} \quad (26)$$

trong đó ma trận khối lượng phần tử  $\mathbf{m}$  viết dưới dạng các ma trận con như sau

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{uu} & \mathbf{m}_{uw} & \mathbf{m}_{u\theta} \\ (\mathbf{m}_{uw})^T & \mathbf{m}_{ww} & \mathbf{m}_{w\theta} \\ (\mathbf{m}_{u\theta})^T & (\mathbf{m}_{w\theta})^T & \mathbf{m}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (27)$$

với



$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{uu} &= \int_0^l \mathbf{N}^T I_{11} \mathbf{N} dx, & \mathbf{m}_{ww} &= \int_0^l \left( \mathbf{H}^T I_{11} \mathbf{H} + \mathbf{H}_{,x}^T I_{22} \mathbf{H}_{,x} \right) dx, & \mathbf{m}_{\theta\theta} &= \int_0^l \mathbf{N}^T I_{33} \mathbf{N} dx, \\ \mathbf{m}_{uw} &= -\int_0^l \mathbf{N}^T I_{12} \mathbf{H}_{,x} dx, & \mathbf{m}_{u\theta} &= \int_0^l \mathbf{N}^T I_{13} \mathbf{N} dx, & \mathbf{m}_{w\theta} &= -\int_0^l \mathbf{H}_{,x}^T I_{23} \mathbf{N} dx \end{aligned} \quad (28)$$

Dựa trên các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng phần tử, phương trình chuyển động rời rạc để phân tích dao động riêng của dầm BFGSW có lỗ rỗng đặt trên nền đàn hồi được viết dưới dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (29)$$

trong đó  $\mathbf{D}$  và  $\ddot{\mathbf{D}}$  là các véc-tơ chuyển vị nút và gia tốc nút tổng thể;  $\mathbf{M}$  và  $\mathbf{K}$  lần lượt là ma trận khối lượng và ma trận độ cứng của kết cấu, các ma trận này nhận được bằng cách ghép các ma trận khối lượng phần tử  $\mathbf{m}$  và ma trận độ cứng phần tử  $\mathbf{k}$ . Giả sử rằng véc-tơ chuyển vị nút có dạng nghiệm điều hòa, khi đó phương trình (29) đưa đến bài toán giá trị riêng để xác định tần số  $\omega$  như sau

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad (30)$$

với  $\bar{\mathbf{D}}$  là biên độ dao động.

#### 4. KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

Trong phần này, tần số riêng của dầm BFGSW tựa hai đầu có lỗ rỗng, đặt trên nền đàn hồi sẽ được tính toán số. Dầm được xét đến ở đây có kích thước hình học  $h=1$  m,  $b=0,5$  m và được làm từ ba vật liệu alumina ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) –  $M_1$ , zirconia ( $\text{ZrO}_2$ ) –  $M_2$  và aluminum (Al) –  $M_3$  với các tính chất vật liệu của chúng được cho như sau [7]

- $\text{Al}_2\text{O}_3$ :  $E_1=380$  GPa;  $\rho_1=3960$  kg/m<sup>3</sup>;  $\nu_1=0,3$
- $\text{ZrO}_2$ :  $E_2=151$  GPa;  $\rho_2=3000$  kg/m<sup>3</sup>;  $\nu_2=0,3$
- Al :  $E_3=70$  GPa;  $\rho_3=2702$  kg/m<sup>3</sup>;  $\nu_3=0,3$

Tần số không thứ nguyên và các tham số độ cứng nền không thứ nguyên được đưa ra như sau [7, 16]

$$\mu_i = \omega_i \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}}; \quad k_1 = \frac{k_w L^4}{E_1 I}; \quad k_2 = \frac{k_s L^2}{E_1 I} \quad (31)$$

trong đó  $\omega_i$  là tần số riêng thứ  $i$  của dầm. Tỷ số độ dày các lớp trong dầm được ký hiệu bởi ba chữ số, ví dụ như (1-2-2), nghĩa là tỷ số độ dày lớp đáy, lớp lõi và lớp trên cùng là 1:2:2.

Trước khi nghiên cứu ảnh hưởng của lỗ rỗng, các tham số độ cứng nền, tham số vật liệu và tham số hình học lên tần số riêng của dầm BFGSW ba pha, việc khẳng định độ chính xác và sự hội tụ của phần tử dầm đưa ra cần thiết. Để làm điều này, tần số riêng của dầm BFGSW ba pha nguyên vẹn, không nền với  $L/h=5$  tính bởi phương pháp đưa ra trong bài báo được so sánh với các kết quả trong tài liệu [7], mà ở đó sử dụng lý thuyết dầm biến dạng trượt có chuyển vị ngang được phân tách thành hai thành phần, được đặt trong bảng 1. Quan sát từ

bảng 1 cho thấy tần số tính bằng phương pháp đưa ra ở trên rất gần với tần số tính được trong tài liệu [7], với mọi tham số vật liệu và tỷ số độ dày các lớp trong dầm.

Bảng 1. So sánh tham số tần số cơ bản của dầm BFGSW ba pha với các tham số vật liệu và tỷ lệ chiều dày các lớp khác nhau ( $L/h=5$ ;  $a=0$ ;  $k_1=k_2=0$ ).

$n_x$	$n_z$	2-1-2			2-1-1			2-2-1		
		Tài liệu [7]	Bài báo	Sai số (%)	Tài liệu [7]	Bài báo	Sai số (%)	Tài liệu [7]	Bài báo	Sai số (%)
0,5	0,5	4,3262	4,3325	-0,146	4,3918	4,3976	-0,132	4,4867	4,4910	-0,096
	1	3,8854	3,8854	0	3,9945	3,9945	0	4,1349	4,1350	-0,002
	2	3,4702	3,4701	0,003	3,6260	3,6261	0,003	3,7960	3,7961	-0,003
	5	3,1551	3,1551	0	3,3460	3,3462	-0,006	3,5094	3,5095	-0,003
1	0,5	4,3814	4,3872	-0,132	4,4421	4,4474	-0,119	4,5296	4,5337	-0,091
	1	3,9781	3,9781	0	4,0778	4,0778	0	4,2055	4,2055	0
	2	3,6053	3,6052	0,003	3,7456	3,7457	-0,003	3,8973	3,8974	-0,003
	5	3,3293	3,3292	0,003	3,4985	3,4986	-0,003	3,6408	3,6409	-0,003
5	0,5	4,4993	4,5040	-0,104	4,5496	4,5541	-0,099	4,6219	4,6253	-0,074
	1	4,1743	4,1743	0	4,2545	4,2546	-0,002	4,3559	4,3560	-0,002
	2	3,8881	3,8881	0	3,9968	3,9969	-0,003	4,1115	4,1115	0
	5	3,6898	3,6898	0	3,8153	3,8153	0	3,9165	3,9166	-0,003

Bảng 2. So sánh tham số tần số cơ bản của dầm (1-1-1) đặt trên nền đàn hồi ( $L/h=10$ ;  $n_x=0$ ;  $a=0$ ).

$k_1$	$k_2/\pi^2$	Nguồn	$n_z=0,6$	$n_z=1$	$n_z=2$	$n_z=5$
0	0	Tài liệu [16]	4,3706	4,0017	3,5159	3,0937
		Bài báo	4,3726	3,9995	3,5137	3,0918
		Sai số (%)	-0,046	0,055	0,063	0,061
	0,5	Tài liệu [16]	5,9427	5,7192	5,4540	5,2632
		Bài báo	5,9438	5,7176	5,4525	5,2619
		Sai số (%)	-0,019	0,028	0,028	0,025
	1	Tài liệu [16]	7,1784	7,0289	6,8652	6,7699
		Bài báo	7,1791	7,0275	6,8639	6,7688
		Sai số (%)	-0,010	0,020	0,019	0,016
100	0	Tài liệu [16]	7,2381	7,0917	6,9321	6,8406
		Bài báo	7,2389	7,0904	6,9309	6,8396
		Sai số (%)	-0,011	0,018	0,017	0,015
	0,5	Tài liệu [16]	8,2828	8,1846	8,0894	8,0576
		Bài báo	8,2832	8,1834	8,0883	8,0566
		Sai số (%)	-0,005	0,015	0,014	0,012
	1	Tài liệu [16]	9,2097	9,1479	9,1007	9,1134
		Bài báo	9,2098	9,1467	9,0996	9,1125
		Sai số (%)	-0,001	0,013	0,012	0,010

Tham số tần số cơ bản của dầm (1-1-1) có cơ tính biến đổi theo chiều dày dầm ( $n_x=0$ ), đặt trên nền đàn hồi được so sánh với kết quả tính bởi Su và cộng sự [16] trong bảng 2. Quan sát từ bảng 2 cho thấy các giá trị tham số tần số cơ bản nhận được từ bài báo rất sát với các kết quả trong tài liệu [16]. Lưu ý rằng, trong tài liệu [16] các tác giả đã sử dụng lý thuyết dầm biến dạng trượt bậc nhất để thiết lập các phương trình cơ bản và phương pháp chuỗi Fourier cải biên được sử dụng để giải phương trình chuyển động của dầm.

Bảng 3 so sánh tham số tần số cơ bản của dầm FG có lỗ rỗng với các kết quả nhận được bởi Ebrahimi và Jafari [10]. Phương pháp nghiệm Navier được sử dụng trong tài liệu [10] để tính tham số tần số cơ bản của dầm FG với  $L/h=20$ ;  $n_x=0$ ;  $k_1=k_2=0$  và các giá trị khác nhau của tỷ phần thể tích lỗ rỗng  $a$  và tham số vật liệu  $n_z$ . Từ bảng 3 có thể thấy rằng tham số tần số nhận được từ bài báo rất sát với các kết quả công bố trong tài liệu [10], điều này đúng với các giá trị của  $a$  và  $n_z$ .

Bảng 3. So sánh tham số tần số cơ bản của dầm FG có lỗ rỗng ( $L/h=20$ ;  $n_x=0$ ;  $k_1=k_2=0$ ).

$a$	Nguồn	$n_z=0$	$n_z=0.5$	$n_z=1$	$n_z=2$	$n_z=5$
0	Tài liệu [10]	6,55957	4,51585	3,95829	3,55529	3,23323
	Bài báo	6,5596	4,5397	3,9836	3,5809	3,2467
0.1	Tài liệu [10]	7,12576	4,58213	3,95091	3,50825	3,16336
	Bài báo	7,1262	4,6112	3,9825	3,5403	3,1805
0.2	Tài liệu [10]	8,04528	4,66783	3,94056	3,44947	3,07867
	Bài báo	8,0463	4,7041	3,9808	3,4904	3,1008

Sự hội tụ của phần tử dầm trong bài báo được đưa ra trong bảng 4, trong đó tham số tần số cơ bản của dầm đối xứng (1-2-1) và phi đối xứng (1-2-2) được tính toán với  $L/h=20$ ;  $k_1=50$ ;  $k_2=5$ ;  $a=0,1$  và các giá trị khác nhau của tham số vật liệu. Như quan sát từ bảng 4, sự hội tụ của phần tử dầm đạt được khi sử dụng 16 phần tử, điều này đúng với các tỷ số độ dày các lớp và tham số vật liệu khác nhau. Từ kết quả hội tụ này, các kết quả đưa ra dưới đây sử dụng lưới gồm 16 phần tử để tính toán.

Bảng 4. Sự hội tụ của phần tử dầm BFGSW trong đánh giá tham số tần số cơ bản ( $L/h=20$ ;  $k_1=50$ ;  $k_2=5$ ;  $a=0,1$ ).

Dầm	$n_x$	$n_z$	$nel=6$	$nel=8$	$nel=10$	$nel=12$	$nel=14$	$nel=16$
1-2-1	0,5	0,5	6,2620	6,2619	6,2619	6,2619	6,2619	6,2619
		5	5,5706	5,5706	5,5705	5,5705	5,5705	5,5705
	2	0,5	6,3286	6,3284	6,3284	6,3284	6,3284	6,3284
		5	5,7462	5,7461	5,7460	5,7460	5,7460	5,7460
1-2-2	0,5	0,5	6,2680	6,2678	6,2677	6,2676	6,2676	6,2676
		5	5,6037	5,6028	5,6024	5,6021	5,6019	5,6019
	2	0,5	6,3407	6,3405	6,3404	6,3404	6,3403	6,3403
		5	5,7895	5,7887	5,7884	5,7882	5,7881	5,7881

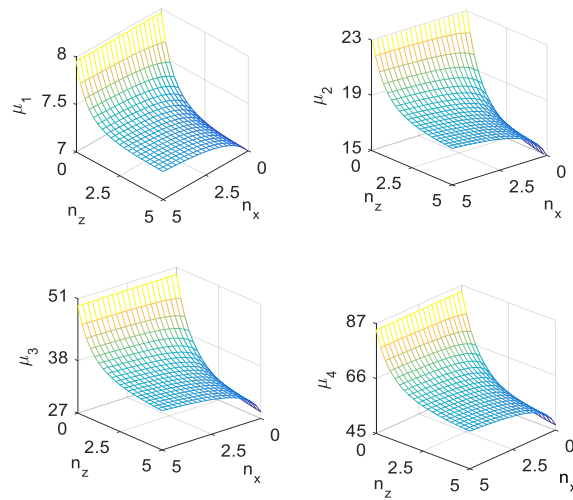
Ảnh hưởng của lỗ rỗng, tham số vật liệu lên tham số tần số cơ bản của dầm BFGSW đặt trên nền đàn hồi được thể hiện chi tiết trong bảng 5 với các tỷ số độ dày các lớp trong dầm khác nhau. Các kết quả trong bảng 5 được tính với các tham số độ cứng nền  $k_1=100$ ;  $k_2=10$  và hai trị của tỷ số chiều dài/chiều dày dầm  $L/h=\{5; 20\}$ . Quan sát từ bảng 5 cho thấy, tham số

tần số cơ bản tăng khi tăng tham số vật liệu dọc trục  $n_x$  và giảm tham số vật liệu ngang  $n_z$ , điều này đúng với các tỷ số độ dày các lớp trong dầm, và các giá trị khác nhau của  $a$  và  $L/h$ . Bên cạnh đó, khi tăng giá trị của  $a$  và  $L/h$  cũng dẫn đến giá trị của tham số tần số cơ bản của dầm tăng. Mặt khác, các kết quả trong bảng 5 cho thấy sự xuất hiện của lỗ rỗng ảnh hưởng đáng kể lên tham số tần số của dầm BFGSW, đối với dầm nguyên vẹn ( $a=0$ ), tham số tần số của dầm tăng khi tăng độ dày lớp giữa và giảm độ dày lớp mặt, trong khi đó, khi xuất hiện lỗ rỗng thì sự thay đổi của tham số tần số là ngược lại.

Bảng 5. Tham số tần số cơ bản của dầm BFGSW đặt trên nền đàn hồi ( $k_1=100; k_2=10$ ).

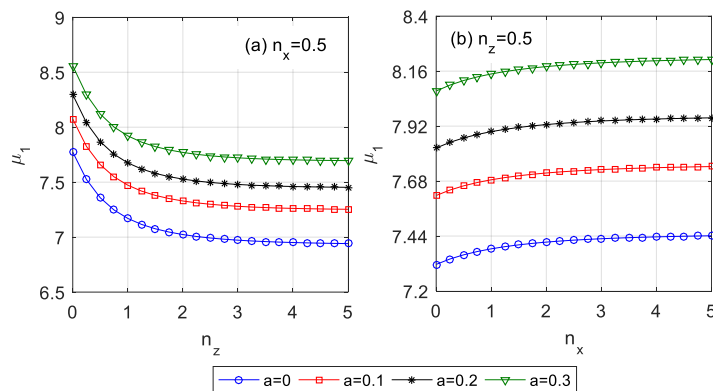
$a$	$n_x$	$n_z$	$L/h=5$			$L/h=20$			
			1-2-1	1-1-1	1-2-2	1-2-1	1-1-1	1-2-2	
0	0,3	0,5	7.2056	7.1602	7.1932	7.4006	7.3438	7.3841	
		1	7.0557	6.9961	7.0450	7.2222	7.1485	7.2070	
		2	6.9235	6.8662	6.9264	7.0667	6.9954	7.0662	
		5	6.8223	6.7940	6.8559	6.9481	6.9089	6.9814	
	3	0,5	7.2664	7.2320	7.2578	7.4722	7.4283	7.4604	
		1	7.1500	7.1068	7.1444	7.3313	7.2762	7.3223	
		2	7.0499	7.0118	7.0571	7.2109	7.1608	7.2160	
		5	6.9761	6.9639	7.0094	7.1216	7.1001	7.1560	
	0,1	0,3	0,5	7,3180	7,3418	7,3527	7,4979	7,5116	7,5307
			1	7,1605	7,1698	7,1976	7,3119	7,3082	7,3462
			2	7,0211	7,0339	7,0732	7,1494	7,1494	7,1997
			5	6,9142	6,9601	7,0001	7,0257	7,0621	7,1124
3		0,5	7,3819	7,4175	7,4207	7,5725	7,6001	7,6104	
		1	7,2599	7,2872	7,3027	7,4260	7,4425	7,4673	
		2	7,1549	7,1889	7,2123	7,3006	7,3236	7,3576	
		5	7,0776	7,1416	7,1643	7,2079	7,2634	7,2971	
0,3		0,3	0,5	7,5863	7,8093	7,7503	7,7332	7,9480	7,8992
			1	7,4118	7,6221	7,5805	7,5305	7,7293	7,6993
			2	7,2560	7,4751	7,4434	7,3527	7,5610	7,5402
			5	7,1361	7,4013	7,3624	7,2174	7,4766	7,4458
	3	0,5	7,6572	7,8933	7,8257	7,8147	8,0449	7,9866	
		1	7,5232	7,7542	7,6989	7,6559	7,8776	7,8336	
		2	7,4072	7,6514	7,6029	7,5198	7,7540	7,7175	
		5	7,3219	7,6083	7,5558	7,4195	7,6984	7,6574	

Ảnh hưởng của các tham số vật liệu lên bốn tần số riêng đầu tiên của dầm (1-1-1) được thể hiện trong hình 2 đối với các giá trị  $L/h=20; k_1=100; k_2=10; a=0,1$ . Các kết quả nhận được trong hình 2 cho thấy, sự phụ thuộc của các tham số tần số cao vào các tham số vật liệu giống với tham số tần số cơ bản, các tham số tần số tăng khi tăng tham số vật liệu dọc trục  $n_x$  và giảm tham số vật liệu ngang  $n_z$ .



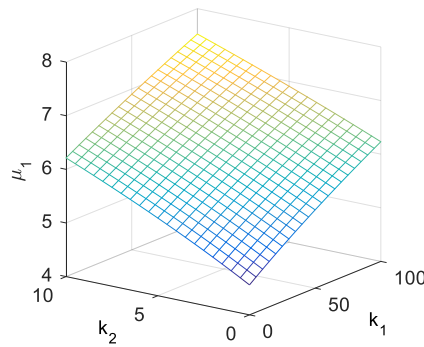
Hình 2. Sự biến đổi của bốn tham số tần số đầu tiên của dầm (1-1-1) theo các tham số vật liệu ( $L/h=20$ ;  $k_1=100$ ;  $k_2=10$ ;  $a=0,1$ ).

Ảnh hưởng của tỷ phần thể tích lỗ rỗng  $a$  lên tham số tần số cơ bản của dầm (1-1-1) đặt trên nền đàn hồi được thể hiện trong hình 3 với những giá trị khác nhau của tham số vật liệu. Quan sát trên hình 3 cho thấy tham số tần số của dầm nguyên vẹn là nhỏ nhất, tăng dần tỷ phần lỗ rỗng  $a$  dẫn đến tham số tần số tăng, đúng với mọi giá trị của tham số  $n_z$  (hình 3a) và tham số  $n_x$  (hình 3b). Nguyên nhân gây ra điều này có thể giải thích như sau: tăng tỷ phần thể tích  $a$  sẽ dẫn đến giảm tỷ phần thể tích của các pha vật liệu cấu tạo nên dầm, nghĩa là giảm mô-đun đàn hồi hiệu dụng và mật độ khối hiệu dụng của dầm, nhưng độ giảm của mật độ khối hiệu dụng lớn hơn nhiều so với mô-đun đàn hồi hiệu dụng và điều này sẽ làm cho dầm cứng hơn, do đó tần số lớn hơn.

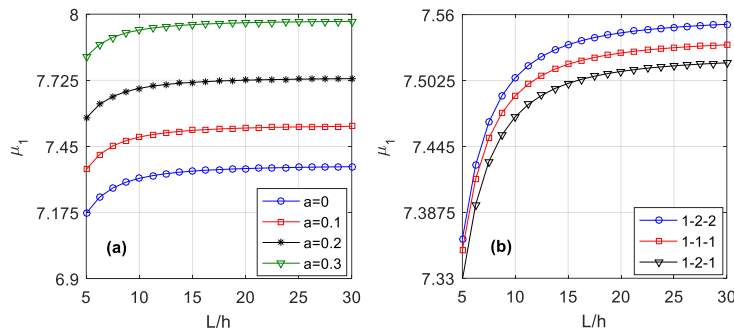


Hình 3. Sự biến đổi của tham số tần số cơ bản của dầm (1-1-1) theo tham số vật liệu với các tham số lỗ rỗng khác nhau ( $L/h=20$ ;  $k_1=100$ ;  $k_2=10$ ).

Hình 4 chỉ ra ảnh hưởng của các tham số độ cứng nền  $k_1$  và  $k_2$  lên tham số tần số cơ bản của dầm (1-1-1) có lỗ rỗng. Các kết quả trong hình 4 được tính với  $L/h=20$ ;  $n_x=n_z=0,5$ ;  $a=0,1$ . Dễ dàng quan sát từ hình 4 cho thấy các tham số độ cứng nền ảnh hưởng đáng kể lên tham số tần số của dầm, tăng  $k_1$  và  $k_2$  dẫn đến tham số tần số cơ bản của dầm tăng.



Hình 4. Sự biến đổi của tham số tần số cơ bản của dầm (1-1-1) theo các tham số độ cứng nền ( $L/h=20$ ;  $n_x=n_z=0,5$ ;  $a=0,1$ ).



Hình 5. Sự biến đổi của tham số tần số cơ bản của dầm BFGSW theo tỷ số  $L/h$  với  $n_x=n_z=0,5$ ;  $k_1=100$ ;  $k_2=10$ : (a) Dầm (1-1-1) và các giá trị khác nhau của tỷ phần lỗ rỗng; (b) Dầm với tỷ số độ dày các lớp khác nhau và  $a=0,1$ .

Sự biến đổi của tham số tần số cơ bản của dầm BFGSW theo tỷ số  $L/h$  được biểu diễn trong hình 5 đối với  $n_x=n_z=0,5$ ;  $k_1=100$ ;  $k_2=10$ . Hình 5a được tính với dầm (1-1-1) và các giá trị khác nhau của tỷ phần lỗ rỗng, trong khi đó hình 5b khảo sát dầm có các tỷ số độ dày các lớp khác nhau và  $a=0,1$ . Quan sát từ hình vẽ thấy rằng tham số tần số cơ bản tăng khi tăng tỷ số  $L/h$ , kết quả này đúng với mọi giá trị của  $a$  và tỷ số độ dày các lớp.

#### 4. KẾT LUẬN

Bài báo này đã nghiên cứu dao động tự do của dầm BFGSW có lỗ rỗng vi mô nằm trên nền đàn hồi. Dầm gồm lớp lõi là vật liệu đồng nhất và hai lớp mặt làm từ vật liệu FG ba pha có cơ tính biến biên theo chiều dài và chiều dày dầm bằng quy luật hàm lũy thừa. Ảnh hưởng của nền đàn hồi Pasternak và tỷ phần thể tích của lỗ rỗng được nghiên cứu chi tiết trong bài báo. Phương trình vi phân chuyển động của dầm được thiết lập dựa trên nguyên lý Hamilton và lý thuyết dầm biến dạng trượt dạng lượng giác. Phần tử dầm hai nút với tám bậc tự do được xây dựng và áp dụng để giải phương trình vi phân chuyển động và tính toán tần số dao động riêng của dầm. Các kết quả nhận được từ nghiên cứu số cho thấy tỷ phần thể tích của lỗ rỗng và tham số độ cứng nền đóng vai trò quan trọng đến giá trị của tần số dao động riêng của dầm. Bên cạnh đó, ảnh hưởng của các tham số vật liệu và tham số hình học tới tần số riêng của dầm cũng được nghiên cứu và thảo luận.

#### LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông vận tải trong đề tài mã số T2023-CB-003.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. M. C. Amirani, S. M. R. Khalili, N. Nemati, Free vibration analysis of sandwich beam with FG core using the element free Galerkin method, *Composite structures*, 90 (2009) 373-379. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.03.023>
- [2]. T. P. Vo, H. T. Thai, T. K. Nguyen, A. Maheri, J. Lee, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory, *Engineering structures*, 64 (2014) 12-22. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.01.029>
- [3]. T. K. Nguyen, B. D. Nguyen, A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 17 (2015) 613-631. <https://doi.org/10.1177/1099636215589237>
- [4]. A. I. Osofero, T. P. Vo, T. K. Nguyen, J. Lee, Analytical solution for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams using various quasi-3D theories, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 18 (2016) 3-29. <https://doi.org/10.1177/1099636215582217>
- [5]. A. Karamanlı, Bending behaviour of two directional functionally graded sandwich beams by using a quasi-3d shear deformation theory, *Composite structures*, 174 (2017) 70-86. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.04.046>
- [6]. L. C. Trinh, T. P. Vo, A. I. Osofero, J. Lee, Fundamental frequency analysis of functionally graded sandwich beams based on the state space approach, *Composite Structures*, 156 (2016) 263-275. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.010>
- [7]. D. K. Nguyen, A. N. T. Vu, V. N. Pham, T. T. Truong, Vibration of a three-phase bidirectional functionally graded sandwich beam carrying a moving mass using an enriched beam element, *Engineering with Computers*, 38 (2022) 4629-4650. <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01496-3>
- [8]. J. Zhu, Z. Lai, Z. Yin, J. Jeon, S. Lee, Fabrication of ZrO<sub>2</sub>-NiCr functionally graded material by powder metallurgy, *Materials chemistry and physics*, 68 (2001) 130-135. [https://doi.org/10.1016/S0254-0584\(00\)00355-2](https://doi.org/10.1016/S0254-0584(00)00355-2)
- [9]. N. Wattanasakulpong, V. Ungbhakorn, Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, *Aerospace Science and Technology*, 32 (2014) 111-120. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2013.12.002>
- [10]. F. Ebrahimi, A. Jafari, A higher-order thermomechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities, *Journal of Engineering*, 2016 (2016). <https://doi.org/10.1155/2016/9561504>
- [11]. F. Ebrahimi, A. Jafari, A four-variable refined shear-deformation beam theory for thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 25 (2018) 212-224. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1255820>
- [12]. P. A. Demirhan, V. Taskin, Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach, *Composites Part B: Engineering*, 160 (2019) 661-676. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.020>
- [13]. Q. Zhang, H. Liu, On the dynamic response of porous functionally graded microbeam under moving load, *International Journal of Engineering Science*, 153 (2020) 103317. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103317>
- [14]. N. D. Kien, Dynamic response of prestressed Timoshenko beams resting on two-parameter foundation to moving harmonic load, *Technische Mechanik-European Journal of Engineering Mechanics*, 28 (2008) 237-258. <https://journals.ub.ovgu.de/index.php/techmech/article/view/846>
- [15]. A. M. Zenkour, M. N. M. Allam, M. Sobhy, Bending analysis of FG viscoelastic sandwich beams with elastic cores resting on Pasternak's elastic foundations, *Acta Mechanica*, 212 (2010) 233-252. <https://doi.org/10.1007/s00707-009-0252-6>

- [16]. Z. Su, G. Jin, Y. Wang, X. Ye, A general Fourier formulation for vibration analysis of functionally graded sandwich beams with arbitrary boundary condition and resting on elastic foundations, *Acta mechanica*, 227 (2016) 1493-1514. <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1575-8>
- [17]. P. Tossapanon, N. Wattanasakulpong, Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation, *Composite structures*, 142 (2016) 215-225. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.01.085>
- [18]. W. Songsuwan, M. Pimsarn, N. Wattanasakulpong, Dynamic responses of functionally graded sandwich beams resting on elastic foundation under harmonic moving loads, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18 (2018) 1850112. <https://doi.org/10.1142/S0219455418501122>
- [19]. V. T. A. Ninh, Fundamental frequencies of bidirectional functionally graded sandwich beams partially supported by foundation using different beam theories, *Transport and Communications Science Journal*, 72 (2021) 452-467. <https://doi.org/10.47869/tcsj.72.4.5>
- [20]. M. Touratier, An efficient standard plate theory, *International journal of engineering science*, 29 (1991) 901-916. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90165-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y)