



APPLICATION OF HOMOGENIZATION METHOD TO PREDICT ELECTROMECHANICAL PROPERTIES OF COMPOSITE TWO PHASES

Nguyen Tien The¹, Nguyen Luong Thien^{2*}

¹University of Transport Technology, No 54 Trieu Khuc Street, Hanoi, Vietnam

²Space Technology Institute - VAST, No 18 Hoang Quoc Viet Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 09/04/2023

Revised: 12/06/2023

Accepted: 09/08/2023

Published online: 15/08/2023

<https://doi.org/10.47869/tcsj.74.6.3>

* *Corresponding author*

Email: nguyenluongthien140686@gmail.com

Abstract. Composite materials with two phases piezoelectric and magnetic (MEE) are widely used in daily life as well as in industry. The study of the physical and mechanical properties of this material has received a lot of attention for the past two decades in order to develop smart materials for many aspects in industry. MEE materials are a combination of piezoelectric and piezoelectric materials. Its characteristic feature is the change of piezoelectric mechanical properties by magnetic field and vice versa. The determination of physical and mechanical properties at the macroscopic material level (conductivity coefficient, magnetic conductivity, electro-magnetic coefficient ...) has always played an important role in the research, calculation and development of this material. In this article, we used the analytical method based on the average principle and the homogenization method to find out the behavior of two-phase piezoelectric and magnetic composite materials at the macroscopic level. Additionally, our study figured out the following formulas: calculate mechanical coefficients in macroscopic form: such as stiffness coefficient, piezoelectric coefficient, piezomagnetic coefficient, electro-magnetic coefficient in two types of materials: layers and fibers.

Keywords: Composite two phases, materials of piezomagnetic, materials of piezoelectric, average principle, homogenization method, electromechanical properties



ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG NHẤT HÓA VẬT LIỆU DỰ BÁO TÍNH CHẤT CƠ ĐIỆN TỬ CỦA VẬT LIỆU TỔNG HỢP HAI PHA

Nguyễn Tiến Thế¹, Nguyễn Lương Thiện^{2*}

¹Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, Số 54 Triều Khúc, Hà Nội, Việt Nam

²Viện Công nghệ vũ trụ-Viện Hàn Lâm Khoa học Công nghệ Việt Nam, Số 18 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 09/04/2023

Ngày nhận bài sửa: 12/06/2023

Ngày chấp nhận đăng: 09/08/2023

Ngày xuất bản Online: 15/08/2023

<https://doi.org/10.47869/tcsj.74.6.3>

* Tác giả liên hệ

Email: nguyenluongthien140686@gmail.com

Tóm tắt. Vật liệu composite với hai pha áp điện và áp từ (MEE) được sử dụng rất nhiều trong đời sống hàng ngày cũng như các ngành trong công nghiệp. Việc nghiên cứu các tính chất cơ lý của loại vật liệu này rất được chú trọng từ hai thập kỷ nay, để phát triển những vật liệu thông minh ứng dụng cho nhiều ngành công nghiệp. Vật liệu MEE là sự kết hợp giữa vật liệu áp điện và vật liệu áp từ. Đặc tính đặc trưng của nó là sự thay đổi các tính chất cơ lý áp điện bởi từ trường và ngược lại. Việc xác định các tính chất cơ lý ở cấp độ vật liệu vĩ mô (hệ số dẫn điện, dẫn từ, hệ số điện – từ...) luôn đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu, tính toán và phát triển loại vật liệu này. Trong bài báo này, tác giả sử dụng phương pháp giải tích dựa trên nguyên lý trung bình và phương pháp đồng nhất hóa để tìm ra ứng xử của vật liệu composite 2 pha áp điện và áp từ ở cấp vĩ mô. Nghiên cứu cũng đưa ra được các công thức tính các hệ số cơ lý ở dạng vĩ mô: như hệ số độ cứng, hệ số áp điện, hệ số áp từ hệ số điện – từ, ở 2 dạng vật liệu là dạng lớp và sợi.

Từ khóa: composite 2 pha, vật liệu áp điện, vật liệu áp từ, nguyên lý trung bình, phương pháp đồng nhất hóa, hệ số cơ điện từ.

© 2023 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vật liệu composite MEE là sự kết hợp giữa 2 vật liệu áp điện và áp từ. Nói một cách khác, vật liệu composite MEE giới thiệu liên kết “điện – từ”. Đặc điểm chính của vật liệu này

là sự thay đổi độ phân cực điện được gây ra bởi từ trường. Và ngược lại, điện trường có thể làm thay đổi độ từ hóa của vật liệu này. Việc xác định các tính chất cơ lý ở cấp độ vật liệu vĩ mô (hệ số dẫn điện, dẫn từ, hệ số điện – từ...) luôn đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu, tính toán và phát triển loại vật liệu này. Rất nhiều phương pháp để xác định các hệ số này nhưng đều rất phức tạp. Li vcs [1] sử dụng phương pháp giải tích dựa trên nguyên lý trung bình dựa trên mô hình của Mori và Tanaka [2] kết hợp công thức của d'Eshelby để tìm được các công thức tính các hệ số của vật liệu đối với trường hợp vật liệu xếp lớp. Bravo vcs [3, 4] dựa vào phương pháp đồng nhất hóa cũng đã đưa ra được các công thức tính toán các hệ số cơ lý của dạng lớp. Trong các thí nghiệm vật liệu đầu tiên được thực hiện bởi Suchtelen [5] trên mẫu bao gồm một vật liệu áp điện có chứa các tạp chất từ giả giả. Hệ số ghép nối, ký hiệu là α , duy trì ở mức thấp ở nhiệt độ phòng ($0,13V.cm^{-1}.Oe^{-1}$). Để cải thiện hệ số này, các kết hợp khác nhau của vật liệu áp điện và áp từ đã được xem xét. Ví dụ, các tấm mỏng và sợi dài có thể đạt được hệ số cao hơn so với cấu trúc xếp lớp [6]. Hơn nữa, chúng dễ sản xuất hơn và với chi phí sản xuất thấp hơn. Về nghiên cứu ứng xử cơ học đối các kết cấu composite áp điện đã được nhiều nhà khoa học trên thế giới quan tâm. Dipak Kumar Maiti [7] nghiên cứu ứng xử uốn và ổn định tĩnh đàn hồi của tấm composite áp điện chịu tác dụng của tải trọng cơ và nhiệt độ bằng phương pháp PTHH. Kết quả tính toán số cho thấy ảnh hưởng của điện thế áp đặt vào lớp áp điện, nhiệt độ, cách bố trí lớp vật liệu composite đến chuyển vị và ổn định của tấm là đáng kể. Dipak Kumar Maiti vcs [8], Dimitris Varelis vcs [9] đã thiết lập quan hệ ứng xử ổn định phi tuyến và nghiên cứu sau ổn định của tấm composite áp điện chịu tác dụng của tải trọng tĩnh và nhiệt độ. Hui-Shen Shen [10] nghiên cứu ứng xử sau ổn định của tấm composite áp điện trong điều kiện đầy đủ tải trọng điện - cơ - nhiệt. Kết quả cho thấy ảnh hưởng của một số yếu tố như nhiệt độ, điện thế và kích thước hình học của tấm đến lực tới hạn.

Ở Việt Nam, việc nghiên cứu tính toán ứng dụng kết cấu dạng tấm, vỏ bằng vật liệu composite nói chung và composite áp điện nói riêng để làm cơ sở ứng dụng vào các lĩnh vực kỹ thuật cũng đã được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu. Đào Huy Bích vcs [11, 12], Đào Văn Dũng vcs [13], Nguyễn Đình Đức vcs [14, 15] đã sử dụng phương pháp giải tích để nghiên cứu đáp ứng cơ học của kết cấu FGM có gân gia cường, với giả thiết gân gia cường bố trí phải mau, vật liệu gân đồng nhất với tấm FGM và kết cấu có dạng thành mỏng (bỏ qua khoảng cách giữa mặt trung hòa và mặt trung bình). Các tác giả dựa trên lý thuyết tấm cổ điển và lý thuyết san đều tác dụng gân của Lekhnitsky với những điều kiện biên đơn giản để giải bài toán. Tuy nhiên, trong thực tế các kết cấu FGM có thể có dạng đa liên kết và chỉ cần bố trí gân tại những vị trí xung yếu (số lượng gân ít) thì việc sử dụng phương pháp giải tích để tính vẫn gặp hạn chế và chưa giải quyết triệt để. Bằng phương pháp PTHH tron, nghiên cứu điều khiển dao động tự do của tấm composite áp điện đã được Phan Đào Hoàng Hiệp vcs [16] đã phân tích ứng xử cơ học của tấm composite lớp với các lớp áp điện.

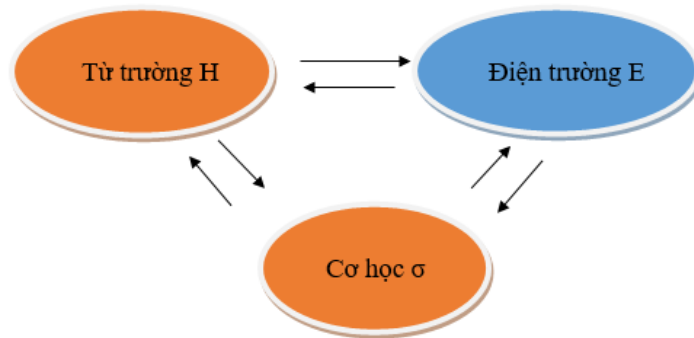
Ngoài những ưu việt về tính chất cơ lý tính của vật liệu composite, một trong những đặc điểm nổi bật của loại vật liệu composite áp điện từ là sự linh hoạt trong điều khiển ứng xử cơ học (chuyển vị, biến dạng, dao động và ổn định) của kết cấu do sự góp mặt của vật liệu áp điện từ dưới các dạng khác nhau. Trong ngành giao thông vận tải, với tính chất này, vật liệu MEE được sử dụng cho các ứng dụng công nghệ cao như: bê tông áp điện thông minh, cảm biến cho phép đo dao động, máy thu năng lượng trong các công trình giao thông, cân tự động ... Do đó, nghiên cứu về ghép điện từ, ME, đã thu hút sự chú ý của các nhà nghiên cứu. Trong nghiên cứu này, chúng tôi trình bày hai phương pháp mà chúng tôi sử dụng: phương pháp trung bình và phương pháp đồng nhất hóa. Phương pháp trung bình được sử dụng để thiết lập các biểu thức của các hệ số của các tenxơ hiệu quả của vật liệu tổng hợp đàn hồi. Nguyên tắc của phương pháp này là xét ở cấp độ vĩ mô, ứng suất và biến dạng thay đổi rất ít nhưng chứa

đựng những dao động đáng kể ở cấp độ vi mô. Mối quan hệ giữa hai thang đo được đảm bảo bằng cách xem xét mức trung bình của các trường này trên V.E.R. Bằng cách giữ lại phương pháp biến dạng, chúng tôi áp dụng phương pháp này cho vật liệu composite áp điện và áp điện từ để ước tính các quy luật hành vi cũng như các tenxơ hiệu quả của môi trường đồng nhất, tương đương. Chúng tôi đặc biệt nghiên cứu trường hợp vật liệu trong mỗi pha của hỗn hợp được giả định là đẳng hướng ngang. Các biểu thức của các hệ số hiệu quả của các vật liệu này được trình bày. Phương pháp đồng nhất hóa dùng để lập phương trình chuyển động trong môi trường đồng nhất tương đương.

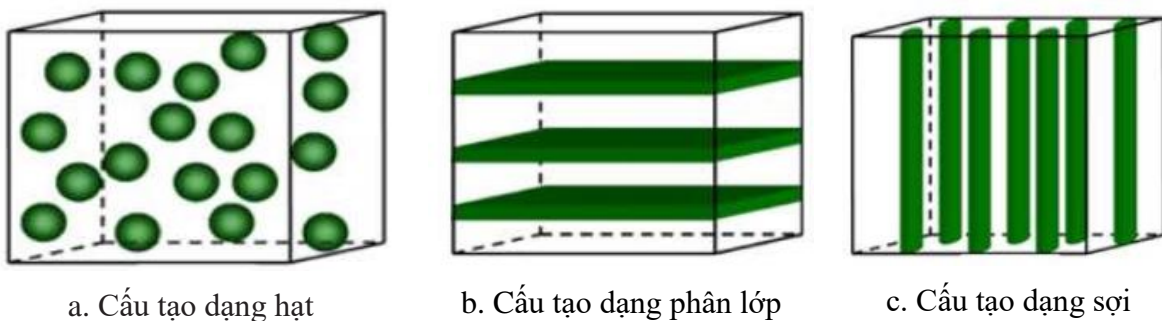
2. GIỚI THIỆU VẬT LIỆU

2.1. Hiện tượng “điện-từ”

Từ trường H đặt trong mẫu điện - từ có độ dày h , sinh ra phân cực điện trường P bên trong mẫu và điện thế ϕ . Mặt khác, điện trường E trong mẫu này cũng sẽ sinh ra một từ trường H và một thế năng từ trường v . Sự kết hợp giữa vật liệu áp điện (PE) và vật liệu áp từ (PM) tạo ra vật liệu điện - từ (MEE). Trong vật liệu này, sự xuất hiện của từ trường do biến dạng cơ học tạo ra. Điều này dẫn tới sự biến đổi trong vật liệu áp điện và sự phân cực điện được diễn ra. Ngược lại, sự xuất hiện của trường điện từ sẽ sinh ra ứng suất làm thay đổi trạng thái từ tính của vật liệu áp từ. Van Suchtelen vcs [17] là những người đầu tiên nghiên cứu hiện tượng “điện - từ” trong vật liệu composite. Mẫu thí nghiệm là vật liệu áp điện có chứa các sợi áp từ.



Hình 1. Hiện tượng điện-từ.



Hình 2. Các dạng cấu tạo của vật liệu MEE.

Hệ số “điện - từ” α là đặc tính của vật liệu composite MEE và là sản phẩm của sự kết hợp giữa hiện tượng áp điện và hiện tượng áp từ. Hệ số α phụ thuộc vào các hệ số đặc tính của các vật liệu thành phần, hình dạng của các lớp và số lượng của chúng, cách thức liên kết.

2.2. Phương trình cơ bản của vật liệu MEE

Đối với vật liệu áp điện (PE): Sử dụng các khái niệm của Voigt [18] và các phương trình của Maxwell, chúng ta đưa ra được mối quan hệ điện trường – cơ học như sau [19]:

$$\sigma = C : \varepsilon - e^T.E \quad (1)$$

$$D = e : \varepsilon + \kappa.E \quad (2)$$

Trong đó: C và e lần lượt là hệ số độ cứng, hệ số áp điện. κ là tensor của hệ số điện môi. e^T là chuyển vị của hệ số e.

Ngoài ra, chúng ta có mối liên hệ giữa điện trường E và điện thế φ :

$$E = -\nabla\varphi \quad (3)$$

Đối với vật liệu áp từ (PM): Một cách tương tự, chúng ta sẽ có được ứng xử vật liệu từ trường – cơ học trong vật liệu áp từ:

$$\sigma = C : \varepsilon - q^T.H \quad (4)$$

$$B = q : \varepsilon + \mu.H \quad (5)$$

Trong đó: q và μ lần lượt là hệ số từ trường, hệ số từ thẩm. q^T là chuyển vị của hệ số q.

Mặt khác, chúng ta cũng có mối liên hệ giữa từ trường H và thế năng từ trường v

$$H = -\nabla v \quad (6)$$

Kết hợp giữa 2 ứng xử vật liệu trong 2 pha áp điện và áp từ, chúng ta có các phương trình ứng xử vật liệu của vật liệu composit MEE

$$\sigma = C : \varepsilon - e^T.E - q^T.H \quad (7)$$

$$D = e : \varepsilon + \kappa.E + \alpha.H \quad (8)$$

$$B = q : \varepsilon + \alpha^T.E + \mu.H \quad (9)$$

Trong đó: α là hệ số điện – từ. α^T là chuyển vị của hệ số α . Hệ số α là hệ số mới của vật liệu, nó không xuất hiện trong ứng xử vật liệu của vật liệu PE và PM. Ngoài ra, chúng ta có mối liên hệ giữa biến dạng ε và chuyển vị u theo công thức sau:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (10)$$

3. NGUYÊN LÝ TÍNH TOÁN HỆ SỐ CƠ LÝ CỦA VẬT LIỆU MEE

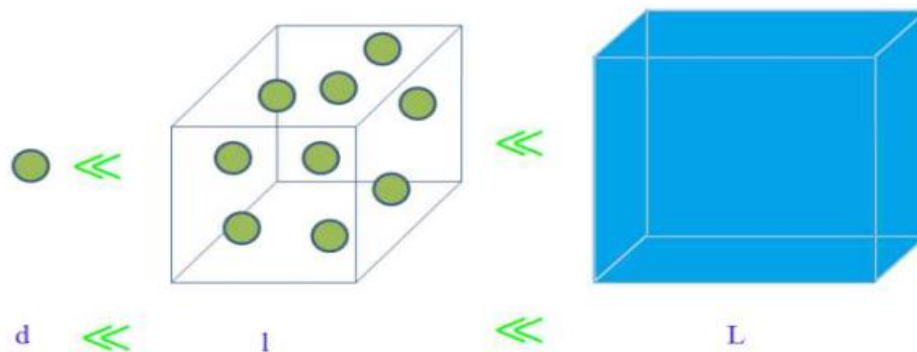
3.1. Phương pháp đồng nhất hóa

Vật liệu composite là vật liệu được tạo ra do sự kết hợp của nhiều vật liệu khác nhau trong tự nhiên. Tính chất của vật liệu phụ thuộc vào các thành phần cấu tạo. Sẽ rất khó để xét đến ảnh hưởng của các vật liệu thành phần đến việc xác định tính chất, đặc tính của vật liệu tổng hợp. Để xác định tính chất của vật liệu không đồng nhất, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp đồng nhất hóa hay còn gọi là thuận nhất hóa. Cần phải tạo ra mối liên hệ giữa các tính chất được gây ra bởi sự không đồng nhất ở cấp độ vi mô và vật liệu ở thang đo vĩ mô. Đồng nhất hóa là một phương pháp có thể đạt được sự chuyển đổi quy mô này [20].



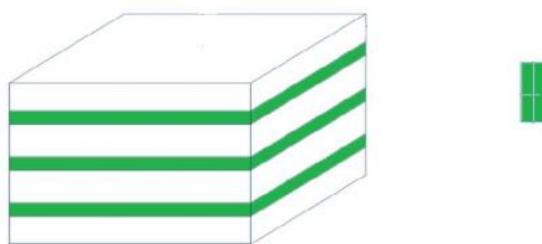
Hình 3. Phương pháp đồng nhất hóa.

Vật liệu sau khi đồng nhất hóa phải có đầy đủ các tính chất của các vật liệu không đồng nhất. Đồng nhất hóa là quá trình thay thế các vật liệu không đồng nhất bằng một vật liệu thuần nhất ở thang vĩ mô. Mục tiêu của quá trình đó là tạo ra một vật liệu tương đương với tất cả các vật liệu cấu thành. Hơn nữa, phương pháp đồng nhất hóa cũng sẽ đưa ra được ứng xử vật liệu cũng như các hệ số đặc tính của vật liệu đồng nhất tương đương. Xét một vật liệu composit 2 pha : áp điện và áp từ, với thể tích là $V(x)$, việc đồng nhất hóa nhằm mục đích tìm ra mối quan hệ giữa biến dạng cơ học, điện trường và từ trường trung bình trên thể tích V với ứng suất cơ học, cảm ứng điện trường, cảm ứng từ. Các mối quan hệ đó chính là ứng xử vật liệu của vật liệu đồng nhất hóa mà chúng ta cần tìm. Mục tiêu của quá trình đồng nhất hóa là thay thế một vật liệu không đồng nhất bằng một môi trường đồng nhất. Để thực hiện được quá trình đồng nhất hóa, người ta đưa ra khái niệm REV. REV được hình thành từ tập hợp các thành phần của các vật liệu thành phần. Nó như một mẫu được lấy ra để thực hiện các thí nghiệm.

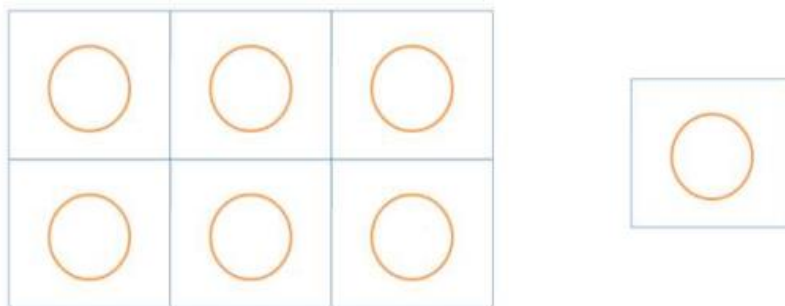


Hình 4. REV.

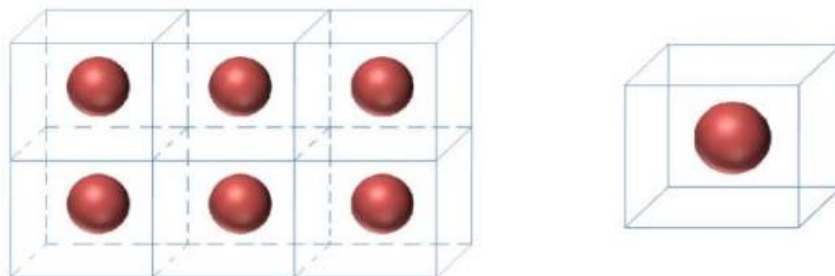
Kích thước l của REV phải thỏa mãn 2 điều kiện sau :Lớn hơn rất nhiều lần kích thước đặc trưng của các thành phần vật liệu (d) để có thể coi là đại diện ở dạng cấu trúc vi mô của vật liệu. Nhỏ hơn rất nhiều lần kích thước của kết cấu (L) để có thể coi cấu trúc như một môi trường đồng nhất. Trong suốt quá trình nghiên cứu này, dạng hình học của REV sẽ tuần hoàn. Những dạng cấu trúc như vậy được gặp rất nhiều trong nghiên cứu cũng như trong công nghiệp : như dạng xếp tầng hay dạng laminate, dạng sợi,...



Hình 5. Vật liệu composite dạng lớp và REV.



Hình 6. Vật liệu composite dạng sợi và REV.



Hình 7. Vật liệu composite dạng cầu và REV.

3.2. Nguyên lý trung bình

Nguyên lý trung bình được xác định như sau [21-23]: đối với mỗi điểm ở thang vi mô x , chúng ta lấy 1 phần tử đại diện, thang xét trong phần tử này gọi là thang vi mô y . Bằng các xem xét về dao động của các trường khác nhau, chúng ta có thể xác định các đại lượng vĩ mô thông qua các thông số vi mô. Sự chuyển đổi từ vi mô sang vĩ mô được thực hiện bằng cách sử dụng toán tử trung bình, xác định theo mối quan hệ qua công thức [21] :

$$\langle \cdot \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y \cdot dy \quad (11)$$

Trong đó : Y biểu thị REV. $|Y|$ là thể tích của chúng. $\langle \cdot \rangle_Y$ là giá trị trung bình của đại lượng vật lý trên Y . Đối với trường ứng suất và biến dạng, mối quan hệ giữa đại lượng vi mô và vĩ mô được xác định như sau:

$$\varepsilon^0(x) = \langle \varepsilon(x, y) \rangle_Y ; \sigma^0(x) = \langle \sigma(x, y) \rangle_Y \quad (12)$$

Để tìm ứng xử vật liệu của vật liệu thuần nhất, tức là ta sẽ đi tìm mối liên kết giữa các đại lượng vĩ mô σ_0, D_0, B_0 và ε_0, E_0, H_0 . Trong phạm vi nghiên cứu này, chúng tôi giải quyết các vấn đề trên vật liệu thuần nhất thông qua phép tính trung bình qua phần tử đại diện REV. Các trường biến dạng, điện trường và từ trường được định nghĩa như sau:

$$\varepsilon(u) = \varepsilon^0 + \varepsilon_y(\tilde{u}); E = E^0 - \nabla_y(\tilde{\phi}); H = H^0 - \nabla_y(\tilde{v}) \quad (13)$$

Trong đó ε_0, E_0, H_0 lần lượt là trường biến dạng, điện trường và từ trường ở thang vĩ mô, $\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{v}$ lần lượt là các dao động liên quan đến chuyển vị cơ học, điện thế và thế năng từ trường.

3.3. Phương pháp tính

Giả sử vật liệu tuần hoàn, chuyển vị u , điện thế và thế năng từ trường được biểu diễn theo dạng sau [24]:

$$\begin{cases} u(x, y) = \varepsilon_x^0(x).y + \tilde{u}(y) \\ \phi(x, y) = -E^0(x).y + \tilde{\phi}(y) \text{ trong } Y \\ v(x, y) = -H^0(x).y + \tilde{v}(y) \end{cases} \quad (14)$$

Trong đó: ε_0, E_0, H_0 lần lượt là trường biến dạng, điện trường và từ trường ở thang vĩ mô, $\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{v}$ - các hàm tuần hoàn, lần lượt là các dao động liên quan đến chuyển vị cơ học, điện thế và thế năng từ trường trong REV. Từ đó, ta có thể suy ra biến dạng, điện trường và từ trường ở cấp độ vĩ mô:

$$\begin{cases} \varepsilon(x, y) = \varepsilon_y(\varepsilon_x^0(x).y + \tilde{u}(y)) = \varepsilon_x^0(x) + \tilde{\varepsilon}_y(y) \\ E(x, y) = -\nabla_y(-E_x^0(x).y + \tilde{\phi}(y)) = E_x^0(x) + \tilde{E}(y) \text{ trong } Y \\ H(x, y) = -\nabla_y(-H_x^0(x).y + \tilde{v}(y)) = H_x^0(x) + \tilde{H}(y) \end{cases} \quad (15)$$

Như vậy, với các biểu thức trên, kết luận rằng: các ten xơ biến dạng cơ học, điện trường và từ trường ε, E, H trong REV được cấu tạo bởi 2 thành phần: thành phần đầu tiên ε_0, E_0, H_0 là các giá trị vĩ mô, trong khi thành phần thứ hai $\tilde{\varepsilon}, \tilde{E}, \tilde{H}$ là các dao động trong không gian của chúng. Dựa vào lý thuyết Stokes, Giá trị trung bình của các biến dạng cơ học, điện trường và từ trường trong REV Y bằng các giá trị vĩ mô của chúng:

$$\langle \varepsilon(x, y) \rangle_Y = \varepsilon_x^0(x); \langle E(x, y) \rangle_Y = E^0(x); \langle H(x, y) \rangle_Y = H^0(x) \quad (16)$$

Bằng cách lấy giá trị trung bình, mối liên hệ giữa các giá trị trung bình của σ, D và B với các giá trị ε_y, E và H ở trường vĩ mô.

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma \rangle_Y \\ \langle D \rangle_Y \\ \langle B \rangle_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^* & \tilde{e}^* & \tilde{q}^* \\ e^* & \kappa^* & \alpha^* \\ q^* & \tilde{\alpha}^* & \mu^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_y \rangle_Y \\ \langle E \rangle_Y \\ \langle H \rangle_Y \end{bmatrix} \quad (17)$$

Ứng xử của vật liệu composit MEE có thể được viết dưới dạng như sau:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma \rangle_Y \\ \langle D \rangle_Y \\ \langle B \rangle_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^* & e^{T*} & q^{T*} \\ e^* & \kappa^* & \alpha^* \\ q^* & \alpha^{T*} & \mu^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ E^0 \\ H^0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\text{Từ đó, ta có mối quan hệ sau: } \tilde{\alpha}^* = \alpha^{T*}; \tilde{e}^* = e^{T*}; \tilde{q}^* = q^{T*} \quad (19)$$

Các hệ số cơ lý của vật liệu MEE ở trạng thái vi mô được viết lại như sau :

$$\begin{aligned} C_{ijpq}^* &= \langle C_{ijpq}(y) \rangle_Y + \langle C_{ijkl}(y) \chi_{k,l}^{1pq}(y) + e_{ijk}^T(y) \eta_{k,l}^{1pq}(y) + q_{ijk}^T(y) \xi_{k,l}^{1pq}(y) \rangle_Y \\ e_{ipq}^* &= \langle e_{ipq}(y) \rangle_Y + \langle e_{ikl}(y) \chi_{k,l}^{1pq}(y) - \kappa_{ik}(y) \eta_{k,l}^{1pq}(y) - \alpha_{ik}(y) \xi_{k,l}^{1pq}(y) \rangle_Y \\ q_{ipq}^* &= \langle q_{ipq}(y) \rangle_Y + \langle q_{ikl}(y) \chi_{k,l}^{1pq}(y) - \alpha_{ik}^T(y) \eta_{k,l}^{1pq}(y) - \mu_{ik}(y) \xi_{k,l}^{1pq}(y) \rangle_Y \\ \kappa_{ip}^* &= \langle \kappa_{ip}(y) \rangle_Y + \langle e_{ikl}(y) \chi_{k,l}^{2p}(y) - \kappa_{ik}(y) \eta_{k,l}^{2p}(y) - \alpha_{ik}(y) \xi_{k,l}^{2p}(y) \rangle_Y \\ \alpha_{ip}^* &= \langle \alpha_{ip}(y) \rangle_Y + \langle e_{ikl}(y) \chi_{k,l}^{3p}(y) - \kappa_{ik}(y) \eta_{k,l}^{3p}(y) - \alpha_{ik}(y) \xi_{k,l}^{3p}(y) \rangle_Y \\ \mu_{ip}^* &= \langle \mu_{ip}(y) \rangle_Y + \langle q_{ikl}(y) \chi_{k,l}^{3p}(y) - \alpha_{ik}^T(y) \eta_{k,l}^{3p}(y) - \mu_{ik}(y) \xi_{k,l}^{3p}(y) \rangle_Y \end{aligned} \quad (20)$$

4. ÁP DỤNG TÍNH TOÁN TÍNH CHẤT CƠ ĐIỆN TỬ CỦA VẬT LIỆU TỔNG HỢP HAI PHA

4.1 Các giả thiết về vật liệu

Trong nghiên cứu này, chúng tôi sẽ tính toán đối với dạng vật liệu đẳng hướng ngang (transverse isotropic material) với các thông số vật liệu (khác không) như sau [25]

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222}; C_{3333}; C_{1122} = C_{2211}; C_{1212} \\ C_{1133} &= C_{2233} = C_{3311} = C_{3322}; C_{1313} = C_{2323} \\ e_{113} &= e_{223}; e_{311} = e_{322}; e_{333}; q_{113} = q_{223}; q_{311} = q_{322}; q_{333} \\ \kappa_{11} &= \kappa_{22}; \kappa_{33}; \mu_{11} = \mu_{22}; \mu_{33} \end{aligned} \quad (21)$$

Sử dụng các khái niệm của Voigt, chúng ta biểu diễn dạng ma trận của các tenxơ hệ số độ cứng, hệ số áp điện, hệ số áp từ, hệ số từ thẩm, hệ số điện môi, hệ số điện – từ:

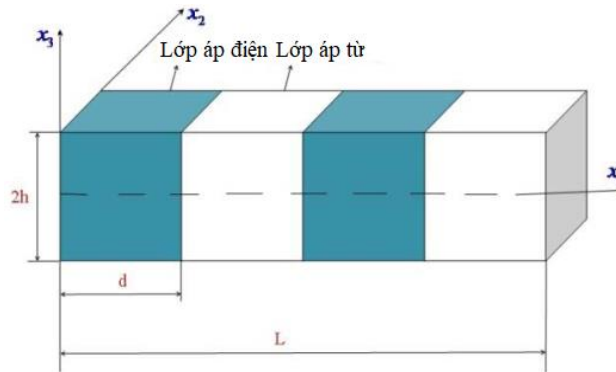
$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}; \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \quad (23)$$

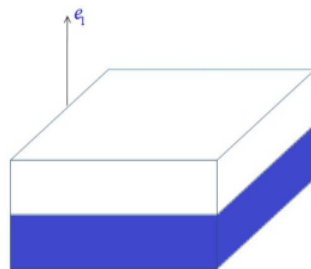
$$q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & q_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{15} & 0 & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mu = \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix} \quad (24)$$

4.2. Tính toán hệ số cơ điện từ cho vật liệu composite dạng lớp

Vật liệu composite dạng lớp bao gồm nhiều lớp được xếp chồng lên nhau theo quy luật bất thiên nhất định. Độ dày của các tấm từ 0,1 đến 0,2 mm. Xét vật liệu composite MEE dạng lớp, chiếm một thể tích là Ω trong không gian R^3 . Chúng bao gồm một số lượng lớn các lớp áp điện và áp từ. Các lớp này được giả định là đẳng hướng theo phương e_3 ; được liên kết hoàn toàn với nhau và được xếp chồng lên nhau theo hướng e_1 .



Hình 8. Vật liệu composite MEE dạng lớp.



Hình 9. REV của vật liệu dạng lớp.

Trong trường hợp này, vì các lớp được xếp chồng lên nhau theo dọc trục e_1 ; kết hợp với tính chất tuần hoàn của vật liệu, các biến ở trường vi mô chỉ còn duy nhất y_1 . Do đó, tất cả các đạo hàm đối với các biến ở trường vi mô $y_2; y_3$ đều bằng không.

Các hệ số hữu dụng của vật liệu MEE dạng lớp đã được tính toán và cho kết quả như sau

a. Các hệ số độ cứng

$$\begin{aligned}
 C_{1111}^* &= \frac{1}{\langle 1/C_{1111} \rangle_Y}; C_{1122}^* = \frac{\langle C_{1122}/C_{1111} \rangle_Y}{\langle 1/C_{1111} \rangle_Y}; C_{1133}^* = \frac{\langle C_{1133}/C_{1111} \rangle_Y}{\langle 1/C_{1111} \rangle_Y} \\
 C_{2222}^* &= \langle C_{2222} \rangle_Y + \frac{\langle C_{1122}/C_{1111} \rangle_Y^2}{\langle 1/C_{1111} \rangle_Y} - \left\langle \frac{C_{1122}^2}{C_{1111}} \right\rangle_Y \\
 C_{2233}^* &= \langle C_{1133} \rangle_Y + \frac{\langle C_{1133}/C_{1111} \rangle_Y \langle C_{1122}/C_{1111} \rangle_Y}{\langle 1/C_{1111} \rangle_Y} - \left\langle \frac{C_{1122}C_{1133}}{C_{1111}} \right\rangle_Y \\
 C_{3333}^* &= \langle C_{3333} \rangle_Y + \frac{\langle C_{1133}/C_{1111} \rangle_Y^2}{\langle 1/C_{1111} \rangle_Y} - \left\langle \frac{C_{1133}^2}{C_{1111}} \right\rangle_Y
 \end{aligned} \tag{25}$$

b. Các hệ số áp điện

$$\begin{aligned}
 e_{311}^* &= \frac{\langle e_{311}/C_{1111} \rangle_Y}{\langle 1/C_{1111} \rangle_Y}; e_{223}^* = \langle e_{223} \rangle_Y \\
 e_{322}^* &= \langle e_{322} \rangle_Y + \frac{\langle e_{311}/C_{1111} \rangle_Y \langle C_{1122}/C_{1111} \rangle_Y}{\langle 1/C_{1111} \rangle_Y} - \left\langle \frac{e_{311}C_{1122}}{C_{1111}} \right\rangle_Y
 \end{aligned} \tag{26}$$

c. Các hệ số áp từ

$$\begin{aligned}
 q_{311}^* &= \frac{\langle q_{311}/C_{1111} \rangle_Y}{\langle 1/C_{1111} \rangle_Y}; q_{223}^* = \langle q_{223} \rangle_Y \\
 q_{322}^* &= \langle q_{322} \rangle_Y + \frac{\langle q_{311}/C_{1111} \rangle_Y \langle C_{1122}/C_{1111} \rangle_Y}{\langle 1/C_{1111} \rangle_Y} - \left\langle \frac{q_{311}C_{1122}}{C_{1111}} \right\rangle_Y
 \end{aligned} \tag{27}$$

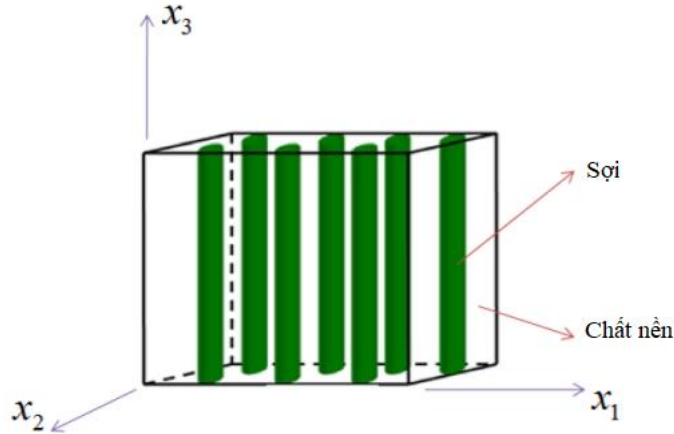
d. Hệ số điện – từ

$$\alpha_{22}^* = 0; \alpha_{33}^* = \left\langle \frac{e_{311}q_{311}}{C_{1111}} \right\rangle_Y - \frac{\langle q_{311}/C_{1111} \rangle_Y \langle e_{311}/C_{1111} \rangle_Y}{\langle 1/C_{1111} \rangle_Y} \tag{28}$$

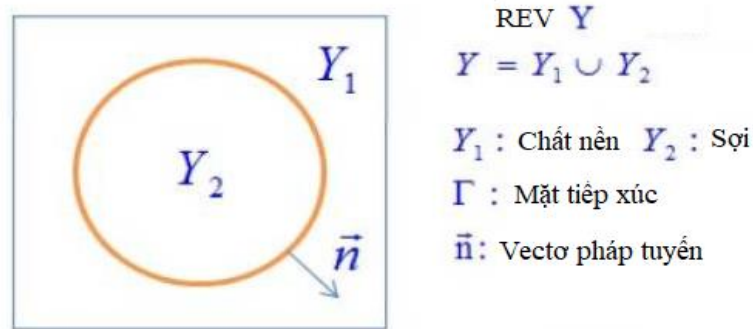
4.3. Tính toán hệ số cơ lý cho vật liệu composite dạng sợi

Vật liệu compositi dạng sợi đã được sử dụng rộng rãi trong công nghiệp cũng như trong nghiên cứu trong vài thập kỉ gần đây. Có rất nhiều ứng dụng cho loại vật liệu này ở một số quốc gia Châu Âu, Hoa Kỳ, Nhật Bản,... Loại vật liệu này là hỗn hợp của 2 thành phần: sợi và chất nền. Sợi đóng vai trò là chất gia cường, còn chất nền đảm bảo sự gắn kết trong vật liệu. Xét một vật liệu composit 2 pha: áp điện và áp từ, dạng cốt sợi, chiếm một thể tích Ω trong không gian R^3 . Ký hiệu $(x_1; x_2; x_3)$ tọa độ của điểm x thuộc Ω . Hướng e_3 là hướng phân

cực của vật liệu. Trong trường hợp này, tính tuần hoàn hướng e_3 là không có. Chính vì vậy, tất cả các tham số được tính toán trong REV đều độc lập với biến y_3



Hình 10. Vật liệu composite dạng sợi.



Hình 11. REV của vật liệu composite dạng sợi.

Các hệ số cơ lý của vật liệu MEE dạng sợi trong môi trường đồng nhất tương đương đã được tính toán và cho kết quả như sau

a. Các hệ số độ cứng

$$\begin{aligned}
 C_{1111}^* &= \langle C_{1111} + C_{1111}\chi_{1,1}^{111} + C_{1122}\chi_{2,2}^{111} \rangle_Y \\
 C_{1122}^* &= \langle C_{1122} + C_{1111}\chi_{1,1}^{122} + C_{1122}\chi_{2,2}^{122} \rangle_Y \\
 C_{1133}^* &= \langle C_{1133} + C_{1111}\chi_{1,1}^{133} + C_{1122}\chi_{2,2}^{133} \rangle_Y \\
 C_{2222}^* &= \langle C_{2222} + C_{2211}\chi_{1,1}^{122} + C_{2222}\chi_{2,2}^{122} \rangle_Y \\
 C_{2233}^* &= \langle C_{2233} + C_{2211}\chi_{1,1}^{133} + C_{2222}\chi_{2,2}^{133} \rangle_Y \\
 C_{3333}^* &= \langle C_{3333} + C_{3311}\chi_{1,1}^{133} + C_{3322}\chi_{2,2}^{133} \rangle_Y \\
 C_{2323}^* &= \langle C_{2323} + C_{2323}\chi_{3,2}^{123} + e_{223}\eta_{,2}^{123} + q_{223}\xi_{,2}^{123} \rangle_Y \\
 C_{3131}^* &= \langle C_{3131} + C_{3131}\chi_{3,1}^{131} + e_{131}\eta_{,1}^{131} + q_{131}\xi_{,1}^{131} \rangle_Y \\
 C_{1212}^* &= \langle C_{1212} + C_{1212}\chi_{1,2}^{112} + C_{1221}\chi_{2,1}^{112} \rangle_Y
 \end{aligned} \tag{29}$$

b. Các hệ số áp điện

$$\begin{aligned}
 e_{311}^* &= \langle e_{311} + e_{311}\chi_{1,1}^{111} + e_{322}\chi_{2,2}^{111} \rangle_Y \\
 e_{322}^* &= \langle e_{322} + e_{311}\chi_{1,1}^{122} + e_{322}\chi_{2,2}^{122} \rangle_Y \\
 e_{333}^* &= \langle e_{333} + e_{311}\chi_{1,1}^{133} + e_{322}\chi_{2,2}^{133} \rangle_Y \\
 e_{131}^* &= \langle e_{131} + e_{131}\chi_{3,1}^{131} - \kappa_{11}\eta_{,1}^{111} \rangle_Y \\
 e_{223}^* &= \langle e_{223} + e_{223}\chi_{3,2}^{123} - \kappa_{22}\eta_{,2}^{123} \rangle_Y
 \end{aligned} \tag{30}$$

c. Các hệ số áp từ

$$\begin{aligned}
 q_{311}^* &= \langle q_{311} + q_{311}\chi_{1,1}^{111} + q_{322}\chi_{2,2}^{111} \rangle_Y \\
 q_{322}^* &= \langle q_{322} + q_{311}\chi_{1,1}^{122} + q_{322}\chi_{2,2}^{122} \rangle_Y \\
 q_{333}^* &= \langle q_{333} + q_{311}\chi_{1,1}^{133} + q_{322}\chi_{2,2}^{133} \rangle_Y \\
 q_{131}^* &= \langle q_{131} + q_{131}\chi_{3,1}^{131} - \mu_{11}\eta_{,1}^{111} \rangle_Y \\
 q_{223}^* &= \langle q_{223} + q_{223}\chi_{3,2}^{123} - \mu_{22}\eta_{,2}^{123} \rangle_Y
 \end{aligned} \tag{31}$$

d. Các hệ số điện – từ

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}^* &= \langle \alpha_{11} + e_{131}\chi_{3,1}^{31} - \kappa_{11}\eta_{,1}^{31} \rangle_Y \\
 \alpha_{22}^* &= \langle \alpha_{22} + e_{232}\chi_{3,2}^{32} - \kappa_{22}\eta_{,2}^{32} \rangle_Y \\
 \alpha_{33}^* &= \langle \alpha_{33} + e_{311}\chi_{1,1}^{33} + e_{322}\chi_{2,2}^{33} \rangle_Y
 \end{aligned} \tag{32}$$

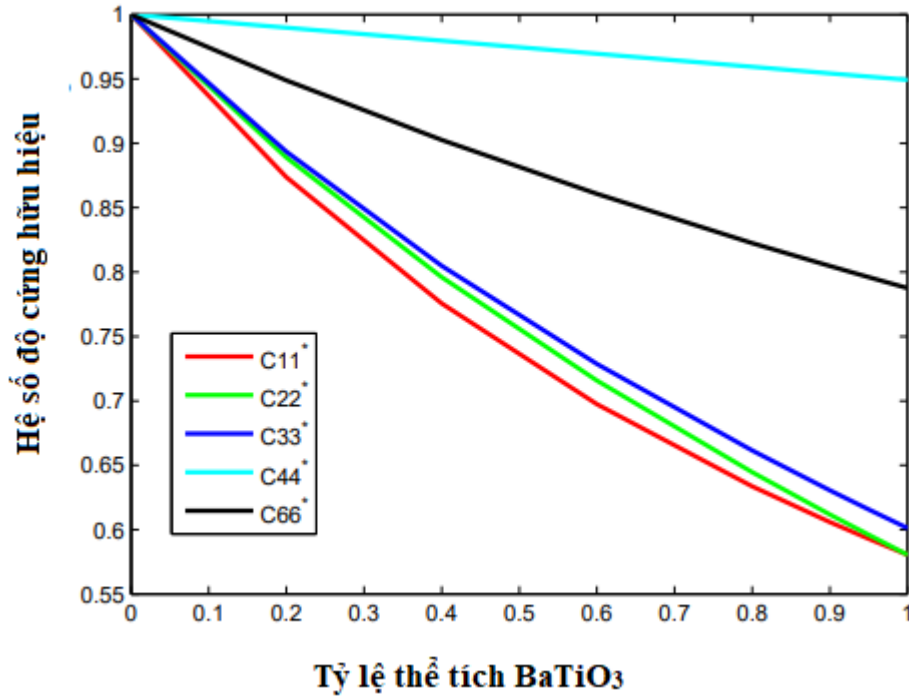
4.3. Kết quả tính toán

Áp dụng tính toán các hệ số cơ điện từ đối với vật liệu composit dạng sợi cấu tạo từ hai vật liệu BaTiO₃ và CoFe₂O₄, trong đó vật liệu BaTiO₃ đóng vai trò là vật liệu áp điện, CoFe₂O₄ là vật liệu áp từ. Các thông số của hai loại vật liệu được miêu tả trong bảng sau:

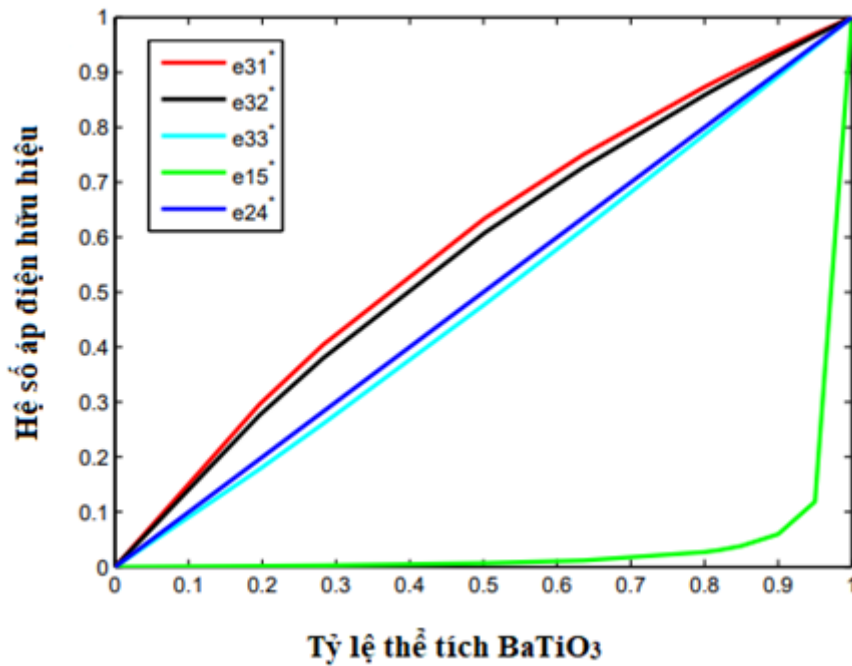
Bảng 1. Thông số vật liệu sử dụng cho tính toán.

Thông số	BaTiO ₃	CoFe ₂ O ₄
$\rho(\text{kg/m}^3)$	5.3×10^3	5.8×10^3
$C_{11}(\text{P a}) = C_{22}(\text{P a})$	166×10^9	286×10^9
$C_{12}(\text{P a})$	77×10^9	173×10^9
$C_{33}(\text{P a})$	162×10^9	269.5×10^9
$C_{13}(\text{P a}) = C_{23}(\text{P a})$	78×10^9	170.5×10^9
$C_{44}(\text{P a}) = C_{55}(\text{P a})$	43×10^9	45.3×10^9
$C_{66}(\text{P a})$	44.5×10^9	56.5×10^9
$e_{33}(\text{C/m}^2)$	18.6	
$e_{31}(\text{C/m}^2) = e_{32}(\text{C/m}^2)$	-4.4	
$e_{15}(\text{C/m}^2)$	11.6	
$q_{33}(\text{N/Am})$		699.7
$q_{31}(\text{N/Am}) = q_{31}(\text{N/Am})$		580.3
$q_{15}(\text{N/Am})$		550

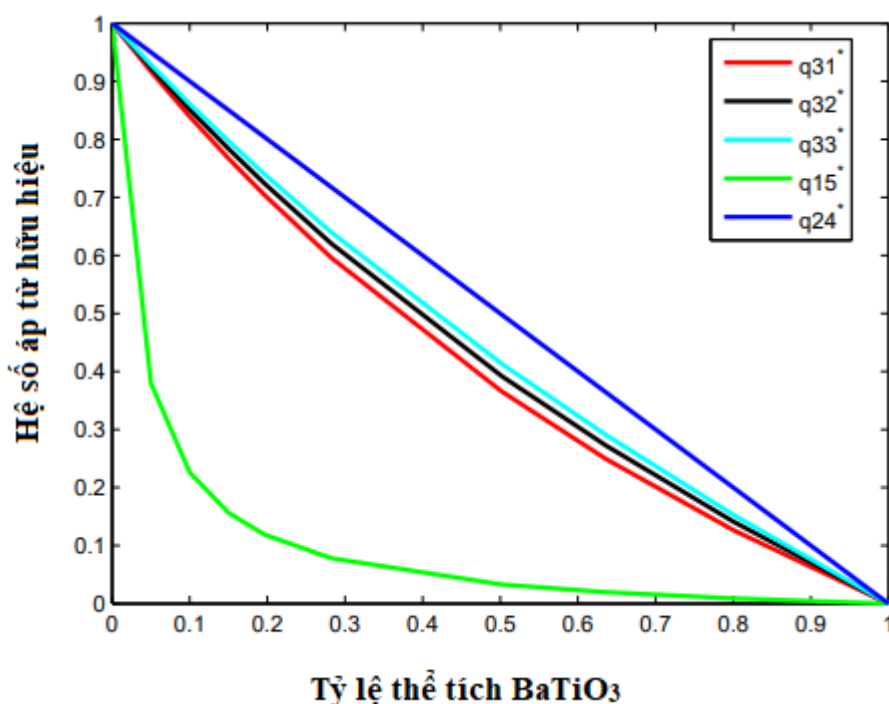
Các công thức tính toán các hệ số hữu hiệu của vật liệu composit dạng xếp lớp trong đã xây dựng tương tự như kết quả của Bravo vcs [3]. Từ các công thức, chúng tôi tính toán các hệ số hữu hiệu của vật liệu composit cấu tạo từ BaTiO_3 (pha áp điện) và CoFe_2O_4 (pha áp từ). Dưới đây là đường cong của một vài hệ số hữu hiệu ứng với thành phần thể tích của BaTiO_3 . Các kết quả tương tự như kết quả của Bravo vcs [3]



Hình 12. Tính toán hệ số độ cứng hữu hiệu.



Hình 13. Tính toán hệ số áp điện hữu hiệu.



Hình 14. Tính toán hệ số áp từ hữu hiệu.

5. KẾT LUẬN

Bài báo đã nghiên cứu ứng xử vật liệu ở dạng vĩ mô của vật liệu composite 2 pha: áp điện và áp từ. Bằng cách sử dụng phương pháp đồng nhất, nguyên lý trung bình và phương pháp giải tích, nhóm nghiên cứu đã xác định được các biểu thức tính toán các hệ số hữu dụng (bao gồm: hệ số độ cứng, hệ số áp điện, hệ số áp từ) của vật liệu ở môi trường đồng nhất tương đương đối với dạng lớp và dạng sợi. Ứng xử của vật liệu và các biểu thức của các tenxơ hệ số hữu dụng ở môi trường đồng nhất tương đương đã được trình bày. Mặc dù hệ số điện từ α không tồn tại riêng biệt ở từng vật liệu áp điện hay áp từ, nhưng trong môi trường thuần nhất đã xuất hiện. Ngoài ra, cần lưu ý rằng các đặc tính cơ học của vật liệu cũng bị ảnh hưởng bởi đặc tính điện và từ tính và ngược lại.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Viện hàn lâm khoa học công nghệ Việt Nam, đề tài mã số VAST01.08/21-22

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. J. Y. Li, M. L. Dunn, Micromechanics of magneto-electroelastic composite materials: average fields and effective behavior, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 9 (1998) 404 – 416. <https://doi.org/10.1177/1045389X9800900>
- [2]. T. Mori, K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta metallurgica*, Elsevier, 21 (1973) 571-574. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(73\)90064-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3)
- [3]. J. B. Castillero et al., Homogenization of magneto – electro –elastic multilaminated materials, *The Quarterly journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 61 (2008) 311-332.

- [4]. J. B. Castellero et al., Homogenization and effective properties of periodic hermomagneto-electroelastic composite, *Journal of mechanics of materials and structures*, 4 (2009) 819-836.
- [5]. J.V. Suchtelen, Product properties: a new application of composite materials, *Philips Res. Rep.*, 27 (1972) 28-37.
- [6]. M. Fiebig, Revival of the magnetoelectric effect, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 38 (2005) R123. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/38/8/R01>
- [7]. D. K. Maiti, Bending and Buckling Analyses of Composite Laminates with and without Presence of Damage and its Passive Control with Optimized Piezoelectric Patch Location, *Proc Indian Natn Sci Acad.*, 82 (2016) 329-340.
- [8]. D.K. Maiti, V.M.Sreehari, Post-buckling control of damaged composite plates using piezoelectric patches, *International Conference on Smart Materials, Structures and Systems*, (2017) 1-5.
- [9]. D. Varelis, D. A. Saravanos, Coupled buckling and postbuckling analysis of active laminated piezoelectric composite plates, *International Journal of Solids and Structures*, 41 (2004) 1519-1538. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.09.034>
- [10]. H.-S. Shen, Postbuckling of shear deformable laminated plates with piezoelectric actuators under complex loading conditions, *International Journal of Solids and Structures*, 38 (2001) 7703-7721. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00120-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00120-2)
- [11]. D.H. Bich, D.V.Dung, V.H.Nam, Nonlinear dynamical analysis of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical panels, *Composite Structures*, 94 (2012) 2465-2473.
- [12]. D.H. Bich, D.V.Dung, V.H.Nam, Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened imperfect functionally graded doubly curved thin shallow shells, *Composite Structures*, 96 (2013) 384-395. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.10.009>
- [13]. D.V. Dung, V.H. Nam, Nonlinear dynamic buckling of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical shells subjected to axial compression, *The 2nd International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA2)*, pp. 226-235, 2012
- [14]. Nguyen Dinh Duc, Pham Hong Cong, Nonlinear thermal stability of eccentrically stiffened functionally graded truncated conical shells surrounded on elastic foundations, *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 50 (2015) 120-131. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.11.006>
- [15]. Nguyen Dinh Duc, Phạm Toàn Thang, Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened ceramic-metal-ceramic S-FGM thin circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations under uniform radial load, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 22 (2015) 1031-1038
- [16]. Phan Dao Hoang Hiep, Thai Hoang Chien, Nguyen Xuan Hung, Analysis of laminated composite plates with integrated piezoelectric layers using the edge-based smoothed finite element method (ES-FEM), *Proceedings of the International Conference Solid*, 2010.
- [17]. E. Dieulesaint, D. Royer, *Ondes élastiques dans les solides : application au traitement du signal*, Masson, 13, 1974.
- [18]. C. W. Nan, Magnetoelectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases, *Physical Review B, APS*, 50 (1994) 6082. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.50.6082>
- [19]. V. Preault, *Méthodes d'homogénéisation pour la modélisation électromagnétique de matériaux composites*, Université Paris Sud, 2013.
- [20]. R. Abdelmoula, J. Marigo, The effective behavior of a fiber bridged crack, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 (2000) 2419-2444. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(00\)00003-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(00)00003-X)
- [21]. J. Bravo-Castillero et al., Asymptotique homogenization of laminated piezocomposite materials, *International Journal of Solids and Structures*, 35 (1998) 527-541. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00028-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00028-0)

- [22]. A. Zaoui, Plasticité: Approches en champ moyen, Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 2: Comportements non linéaires et problèmes ouverts, Hermes science, (2001) 17-44.
- [23]. G. W. Milton, The theory of composites, The Theory of Composites, by Graeme W. Milton, pp. 748, 2002.
- [24]. P. Suquet, Analyse limite et homogénéisation, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics, 296 (1983) 1355-1358.
- [25]. Y. Benveniste, G. Milton, New exact results for the effective electric, elastic, piezoelectric and other properties of composite ellipsoid assemblages, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 51 (2003) 1773-1813. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00074-7](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00074-7)