



MODELING AND SIMULATION OF CRACK PROPAGATION IN ORTHOTROPIC MATERIALS BY THE PHASE FIELD METHOD

Vu Ba Thanh, Nguyen Xuan Lam *

University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 18/05/2022

Revised: 21/06/2022

Accepted: 01/07/2022

Published online: 15/08/2022

<https://doi.org/10.47869/tcsj.73.6.2>

* *Corresponding author*

Email: nxlam@utc.edu.vn

Abstract. Nowadays, the orthotropic material is commonly used to reinforce the bridge structures as well as the car body shells because the strength and stiffness is high, while the weight is small. In this paper, we use phase field method to simulate the damage and crack propagation direction of this material through two types of epoxy resin-based materials containing parallel fiber reinforcement of carbon (Carbon-epoxy) and/or glass (Glass-epoxy). This material has only three axes of symmetry and orthogonality, in which the material properties along the fiber axis are much stronger than the ones along the other two axes. The phase field method in this study is supplemented with some new points such as: (i) an orientation tensor has been used to represent the damage development of the fiber direction in the material. This orientation tensor is added to the phase field method to predict the initiation and propagation of the crack in the aforementioned materials; (ii) a form of strain tensor decomposition satisfying the orthogonal condition is applied into the simulation method to improve the accuracy of the material behaviour. Through several numerical examples, the obtained results have been compared with the relevant experimental and analytical ones to demonstrate the effectiveness of the proposed method in predicting the damage of the orthotropic material.

Keywords: phase field method, orthotropic materials, orientation tensor, damage, crack propagation, strain orthogonal decompositions.

© 2022 University of Transport and Communications



MÔ HÌNH HÓA VÀ MÔ PHỎNG SỰ LAN TRUYỀN VẾT NỨT TRONG VẬT LIỆU TRỰC HƯỚNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP TRƯỜNG PHA

Vũ Bá Thành, Nguyễn Xuân Lam*

Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 18/05/2022

Ngày nhận bài sửa: 21/06/2022

Ngày chấp nhận đăng: 01/07/2022

Ngày xuất bản Online: 15/08/2022

<https://doi.org/10.47869/tcsj.73.6.2>

* Tác giả liên hệ

Email: nxlam@utc.edu.vn

Tóm tắt. Hiện nay, vật liệu trực hướng được sử dụng phổ biến để gia cường kết cấu cầu và vỏ xe ô tô do độ bền theo phương chịu lực và độ cứng lớn, trong khi trọng lượng của chúng nhỏ. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng phương pháp trường pha để mô phỏng hư hỏng và hướng lan truyền vết nứt của loại vật liệu này thông qua hai loại vật liệu gốc nhựa epoxy chứa cốt sợi song song Carbon (Carbon-epoxy) và thủy tinh (Glass-epoxy). Loại vật liệu này chỉ có ba trục đối xứng trục giao với nhau, trong đó, đặc tính vật liệu dọc theo trục hướng sợi lớn hơn nhiều so với đặc tính theo hai trục còn lại. Phương pháp trường pha trong nghiên cứu này được bổ sung một số điểm mới như: (i) một ten-xơ định hướng dùng để đại diện cho sự phát triển hư hỏng của hướng sợi trong vật liệu. Ten-xơ định hướng này được đưa vào phương pháp trường pha để dự đoán sự khởi tạo và lan truyền vết nứt trong vật liệu nêu trên; (ii) một dạng của phân rã ten-xơ biến dạng thỏa mãn điều kiện trục giao được áp dụng vào phương pháp đề xuất để nâng cao sự chính xác của ứng xử vật liệu. Thông qua một vài ví dụ số, các kết quả đạt được so sánh với các kết quả thực nghiệm và phân tích lý thuyết trong các nghiên cứu liên quan để kiểm chứng tính hiệu quả của phương pháp về khả năng dự đoán hư hỏng của vật liệu trực hướng.

Từ khóa: phương pháp trường pha, vật liệu trực hướng, ten-xơ định hướng, hư hỏng, lan truyền vết nứt, phân rã trục giao ten-xơ biến dạng.

© 2022 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phương pháp trường pha (phase field method) là một phương pháp mô phỏng với việc sử dụng biến trường pha và hàm suy biến để mô tả sự suy giảm năng lượng và trạng thái hư hỏng trong vật thể dựa vào quá trình giải kết hợp biến trường pha và biến chuyển vị. Trong đó, biến trường pha là một đại lượng vô hướng có giá trị thay đổi từ 0 (trạng thái kết cấu ban đầu chưa bị hư hỏng) tới 1 (kết cấu xuất hiện vết nứt) và hàm suy biến của biến trường pha này là khả năng. Khi sử dụng phương pháp mô phỏng này, năng lượng trong vật thể gồm: (i) năng lượng để tạo ra hai bề mặt của vết nứt phụ thuộc vào biến trường pha và (ii) năng lượng biến dạng đàn hồi liên quan biến chuyển vị và hàm suy biến của biến trường pha. Trong thời gian gần đây, phương pháp trường pha trở thành một công cụ số hiệu quả và đáng tin cậy được dùng trong lĩnh vực cơ học phá hủy để mô phỏng sự phát triển vết nứt phức tạp trong kết cấu. Trong cơ học phá hủy, hư hỏng thường được hình thành theo ba dạng: Dạng I (mode I) là hư hỏng do mở rộng vết nứt thuần túy; dạng II (mode II) là hư hỏng do cắt, trượt và dạng III là hư hỏng do xé kết cấu.

Các nghiên cứu [1, 2] đã sử dụng phương pháp trường pha để dự đoán sự hư hỏng trong kết cấu đơn giản chứa vật liệu đồng nhất, đẳng hướng đã cho kết quả rất khả quan. Nghiên cứu [3] đã khảo sát ảnh hưởng của sự phân bố lỗ rỗng tới sự khởi tạo và phát triển vết nứt bằng phương pháp trường pha. Sau đó, nghiên cứu [4] sử dụng phương pháp trường pha để mô phỏng hư hỏng của kết cấu nhiều vật liệu thành phần trong sự tương tác giữa hư hỏng trong nội tại các vật liệu và hư hỏng mặt phân giới của các vật liệu này. Trong đó, hình dạng và tỷ lệ vật liệu thành phần đạt được bằng phương pháp chụp cắt lớp bằng tia X (X-ray microtomography hay XR-CT) [5, 6]. Phương pháp XR-CT dùng để xác định cấu trúc thực tế chứa nhiều vật liệu thành phần như bê tông (cốt liệu, vữa xi măng, lỗ rỗng) với hình ảnh độ phân giải cao để có thể xác định rõ hình dạng pha vật liệu dù rất nhỏ, trong khi đó các phương pháp chụp ảnh thông thường có thể không xác định được (và thường bỏ qua). Sau đó, nghiên cứu [7] phát triển phương pháp trường pha của [4] để mô phỏng kết cấu với hai vật liệu thành phần có tính chất đàn dẻo (elastoplastic). Tiếp đó, bài báo [8] đã thiết lập một hàm con bổ sung để nhận diện chính xác hình dạng và tỷ lệ thành phần vật liệu đạt được sau khi hình ảnh của kết cấu được xử lý bằng XR-CT. Hàm con bổ sung này rất quan trọng trong việc thiết lập số liệu đầu vào trong mô phỏng như tỷ lệ của các pha vật liệu, hình dạng phức tạp của mặt phân giới, số lượng phần tử được chia trong kết cấu.

Gần đây, nghiên cứu [9] đã sử dụng phương pháp trường pha để mô phỏng sự phát triển vết nứt trong một dầm chịu uốn chứa vật liệu bê tông cường độ cao có bổ sung chất kết dính nano-silica, kết quả mô phỏng đạt được đáp ứng tốt kết quả thực nghiệm. Nghiên cứu [10] đã sử dụng phương pháp trường pha với một họ hàm suy biến để xác định tải trọng tới hạn và ứng suất tới hạn gây nứt trong vật liệu đồng nhất, đẳng hướng mà không phụ thuộc vào kích thước lưới phần tử được chia trong kết cấu. Nghiên cứu này có thể làm giảm số lượng phần tử, do đó giảm được thời gian mô phỏng và đẩy nhanh tốc độ xử lý của công cụ tính toán. Sau đó, trong các nghiên cứu [11-13] đã áp dụng điều kiện phân rã trực giao ten-xơ biến dạng [14] và phương pháp trường pha để mô phỏng hư hỏng trong vật liệu có xét tới ảnh hưởng của mặt phân giới giữa các pha, vật liệu đẳng hướng và vật liệu đẳng hướng ngang. Việc sử dụng điều kiện trực giao này đã được chứng minh là nâng cao sự chính xác của ứng xử vật liệu bằng việc loại bỏ các điểm kỳ dị khi trạng thái kết cấu gần bị phá hoại hoàn toàn.

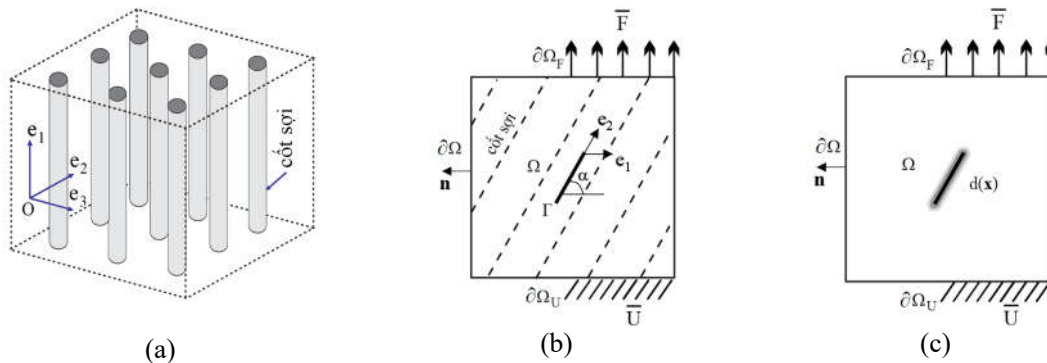
Vật liệu trực hướng có thể tìm thấy được ngoài thực tế như: tre, thớ gỗ, hoặc các kết cấu chứa các cốt sợi song song... Các vật liệu này được áp dụng nhiều trong lĩnh vực xây dựng và

thiết kế nội thất. Từ các ưu điểm được phân tích trong [11-13], do đó trong nghiên cứu này, phương pháp trường pha với việc sử dụng một ten-xơ định hướng và điều kiện phân rã trực giao thành phần ten-xơ biến dạng [14] để mô phỏng vết nứt trong kết cấu chứa vật liệu trực hướng như: (i) tách lớp trong một kết cấu chứa các lớp vật liệu cốt sợi song song Carbon-epoxy và (ii) kéo hai phương một tấm chứa vật liệu trực hướng cốt sợi Glass-epoxy để xác định góc lệch so với hướng của cốt sợi. Các kết quả đạt được so sánh với kết quả thực nghiệm kết hợp mô phỏng của [15] và kết quả phân tích lý thuyết [16].

Cấu trúc của bài báo bao gồm những phần như sau: Phần 2 mô tả phương pháp trường pha mô phỏng hư hỏng trong vật liệu trực hướng; Phần 3 giới thiệu và phân tích một vài ví dụ mô phỏng để chỉ ra khả năng áp dụng của phương pháp này với vật liệu nêu trên; Cuối cùng, các kết luận và kiến nghị được đưa ra trong phần 4.

2. PHƯƠNG PHÁP TRƯỜNG PHA CHO HƯ HỎNG VẬT LIỆU TRỰC HƯỚNG

Mô tả phương pháp trường pha dùng để mô phỏng hư hỏng vật liệu trực hướng, ta có thể quan sát hình dưới đây: Hình 1a giới thiệu một dạng kết cấu chứa vật liệu trực hướng với các cốt sợi song song. Từ Hình 1a, ta có thể quan sát thấy ba mặt phẳng đối xứng trực giao chứa các vec-tơ pháp tuyến đơn vị e_1 , e_2 và e_3 tương ứng. Hình 2b- 2c giới thiệu một miền Ω của một vật thể bị nứt, trong đó $\partial\Omega$ là biên ngoài của Ω . Hình 2b mô tả vật thể chứa các sợi song song, với hướng sợi và hướng vết nứt Γ tạo với phương ngang một góc α . Trạng thái phát triển của vết nứt được mô tả bằng một biến phase field $d(x)$ với $x \in \Omega$ như được mô tả trong Hình 1c, với \mathbf{n} là vec-tơ pháp tuyến của biên $\partial\Omega$.



Hình 1. Mô tả vật liệu trực hướng và áp dụng vào phương pháp trường pha : (a) một dạng vật liệu trực hướng chứa các sợi song song, (b) góc α của vết nứt môi và hướng sợi, (c) vết nứt thông qua biến trường pha $d(x)$.

2.1. Các phương trình năng lượng trong phương pháp trường pha

Trong phương pháp trường pha được dùng trong bài báo này để mô phỏng hư hỏng vết nứt trong vật liệu trực hướng, tổng năng lượng trong một vật thể bị nứt bao gồm hai thành phần như dưới đây:

$$E(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} W_u(\boldsymbol{\varepsilon}, d) d\Omega + \int_{\Omega} g_c \gamma(d, \nabla d, \boldsymbol{\omega}) d\Omega \quad (1)$$

ở đó, $\gamma(d, \nabla d) = \frac{d^2}{2l} + \frac{l}{2} \boldsymbol{\omega} : (\nabla d \otimes \nabla d)$ là hàm mật độ vết nứt, l là tham số chiều dài, g_c là năng lượng kháng nứt. Khác với các nghiên cứu trước [1, 2, 4, 9], trong bài báo này, ten-xơ định hướng $\boldsymbol{\omega}$ được dùng để đại diện cho sự phát triển của hư hỏng vật liệu của hướng ưu tiên được mô tả như sau:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I} - \eta(\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \quad (2)$$

trong đó, \mathbf{m} là vec-tơ pháp tuyến đơn vị của mặt phẳng ưu tiên với $\mathbf{m} = [\cos(\alpha); \sin(\alpha)]$ trong trường hợp hai chiều (2D) và $\mathbf{m} = [\cos(\alpha); 0; \sin(\alpha)]$ trong trường hợp không gian ba chiều (3D), \mathbf{I} là ma trận chéo đơn vị với $\mathbf{I} = [1 \ 0; 0 \ 1]$ trong trường hợp 2D và $\mathbf{I} = [1 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1]$ trong trường hợp 3D; η là hệ số dị hướng: $\eta > 0$ đại diện cho vật liệu dị hướng và $\eta = 0$ vật liệu trở thành đẳng hướng.

Để mô phỏng quá trình hư hỏng vật liệu này, ten-xơ biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$ được phân rã thành phần dương $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ đại diện cho phần chịu kéo và phần âm $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ đại diện cho phần chịu nén:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^- \quad (3)$$

Ta đặt $E(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} W(\mathbf{u}, d) d\Omega$ thì tổng năng lượng trong công thức (1) được viết thành:

$$W(\mathbf{u}, d) = W_u(\boldsymbol{\varepsilon}, d) + g_c \gamma(d, \nabla d, \boldsymbol{\omega}) \quad (4)$$

trong đó, hàm mật độ năng lượng biến dạng của vật thể bị nứt $W_u(\mathbf{u}, d)$ được xác định theo [1, 2] như biểu thức dưới đây:

$$W_u(\mathbf{u}, d) = \Psi^+(\boldsymbol{\varepsilon})\{g(d) + k\} + \Psi^-(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (5)$$

Công thức (5) sử dụng hàm suy biến khả vi $g(d) = (1-d)^2$ để mô phỏng sự suy giảm năng lượng của vật thể bị nứt, k là số thực vô cùng nhỏ để đảm bảo không xuất hiện điểm kỳ dị trong quá trình hư hỏng kết cấu.

Nghiên cứu này sử dụng một loại phân rã ten-xơ biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$ thỏa mãn điều kiện trực giao của [14]. Trong điều kiện này, hai thành phần $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ và $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ phải thỏa mãn $\boldsymbol{\varepsilon}^+ : (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^-) = 0$. Theo [14], ta đặt $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\pm} = \mathbf{C}^{1/2} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\pm}$ với $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^+ + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^-$ thì hai thành phần $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^+$ và $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^-$ phải trực giao với nhau, nghĩa là $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^+$ và $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^-$ phải thỏa mãn điều kiện $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^+ : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^- = 0$, với \mathbf{C} là ma trận độ cứng đàn hồi của vật liệu. Theo phân tích trên, ta có thể xác định $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\pm}$ để thỏa mãn [14] như sau:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\pm} = \sum_{i=1}^D \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \rangle_{\pm} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (6)$$

ở đó, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^i$ và \mathbf{n}_i với $i=1, \dots, D$ là các giá trị riêng và vec-tơ riêng của $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Do đó, hai thành phần năng lượng biến dạng $\Psi^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon})$ được xác định như dưới đây:

$$\Psi^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{\pm} : (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\pm}) = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\pm} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\pm} \quad (7)$$

Từ công thức (5) và (7), ứng suất Cauchy có thể được tính là đạo hàm của hàm mật độ năng lượng biến dạng W_u với ten-xơ biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$ như phân tích như sau:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W_u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ g(d) + k \right\} \left(\overline{\mathbf{P}}^+ : \mathbf{C}^{1/2} \right) : \left(\overline{\mathbf{P}}^+ : \mathbf{C}^{1/2} \right) + \left(\overline{\mathbf{P}}^- : \mathbf{C}^{1/2} \right) : \left(\overline{\mathbf{P}}^- : \mathbf{C}^{1/2} \right) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8)$$

trong đó, hai thành phần $\overline{\mathbf{P}}^\pm$ được xác định $\overline{\mathbf{P}}^\pm = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^\pm}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$.

Trong ứng xử vật liệu, ta có quan hệ giữa ten-xơ biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$ và ten-xơ ứng suất $\boldsymbol{\sigma}$ theo công thức $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}] : \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ hoặc $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{C}^{-1}] : \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{L}] : \{\boldsymbol{\sigma}\}$, với $\mathbf{L} = \mathbf{C}^{-1}$ là ma trận độ mềm đàn hồi. Trong vật liệu trục hướng ma trận \mathbf{L} được định nghĩa tương ứng với các trường hợp không gian hai chiều (2D) và ba chiều (3D) như dưới đây:

a) Với trường hợp 2D, quan hệ $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}] : \{\boldsymbol{\sigma}\}$ được chi tiết như sau :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{11} \\ \boldsymbol{\sigma}_{22} \\ \boldsymbol{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

b) Với trường hợp 3D, quan hệ $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}] : \{\boldsymbol{\sigma}\}$ được mô tả:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{33} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{23} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{13} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{11} \\ \boldsymbol{\sigma}_{22} \\ \boldsymbol{\sigma}_{33} \\ \boldsymbol{\sigma}_{23} \\ \boldsymbol{\sigma}_{13} \\ \boldsymbol{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

trong đó, E_1, E_2 và E_3 là mô đun đàn hồi theo các phương của vec-tơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ và \mathbf{e}_3 của ba mặt phẳng đối xứng tương ứng (xem Hình 1a). ν_{ij} là hệ số Poisson và G_{ij} là các mô đun kháng cắt.

Theo [17], ma trận chuyển hướng \mathbf{M} trong trường hợp 2D và 3D được định nghĩa phụ thuộc vào góc của hướng sợi α như sau:

a) Với trường hợp 2D:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

b) Với trường hợp 3D:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -cs & cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Trong các công thức (11) và (12), $c = \cos(\alpha)$, $s = \sin(\alpha)$. Do đó, ma trận độ cứng đàn hồi \mathbf{C} theo góc α được tính:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_\alpha = \mathbf{M}\mathbf{C}_0\mathbf{M}^T \quad (13)$$

ở đó, \mathbf{C}_0 là ma trận độ cứng đàn hồi với góc hướng sợi nằm ngang $\alpha = 0^\circ$, ma trận \mathbf{M}^T là ma trận chuyển vị của \mathbf{M} .

Theo nguyên lý tiêu hao năng lượng [1, 2] được áp dụng cho phương pháp trường pha trong nghiên cứu này theo biểu thức sau:

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{\partial W_u}{\partial d} - g_c \delta_d \gamma(d, \nabla d) = 0 \quad (14)$$

Với đạo hàm của hàm mật độ vết nứt $\gamma(d, \nabla d, \boldsymbol{\omega})$ theo biến trường pha d như dưới đây:

$$\delta \gamma(d, \nabla d, \boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{l} - l \{ \Delta d (1 + \eta) - \eta \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} : \nabla \nabla d \} \quad (15)$$

Từ công thức (5), (14) và (15), ta có thể viết lại thành công thức như dưới đây:

$$2(1-d)\mathcal{H} - \frac{g_c}{l} \delta \gamma(d, \nabla d, \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (16)$$

Với \mathcal{H} là hàm lịch sử biến dạng theo thời gian τ được xác định như sau:

$$\mathcal{H} = \max_{\tau \in [0, t]} \{ \Psi^+(\mathbf{x}, \tau) \} \quad (17)$$

2.2. Giải bài toán trường pha và bài toán chuyển vị

Từ công thức (16) và (17), ta có hệ phương trình với các điều kiện biên tương ứng để xác định sự phát triển của biến trường pha d như dưới đây:

$$\begin{cases} 2(1-d)\mathcal{H} - \frac{\mathcal{G}_c}{l} \delta\gamma(d, \nabla d, \boldsymbol{\omega}) = 0 & \text{trong } \Omega \\ d(\mathbf{x}) = 1 & \text{tại } \Gamma \\ \nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{tại } \partial\Omega \end{cases} \quad (18)$$

Sử dụng nguyên lý biến phân để làm suy giảm tổng năng lượng E trong công thức (1) với biến chuyển vị \mathbf{u} , ta có dạng yếu của bài toán chuyển vị như sau:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W_u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} \bar{\mathbf{F}} \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (19)$$

trong đó, \mathbf{f} và $\bar{\mathbf{F}}$ là lực khối trong vật thể Ω và ngoại lực trên biên $\partial\Omega_f$.

Để xác định biến chuyển vị \mathbf{u} , ta giải hệ phương trình với các điều kiện biên (xem [18]):

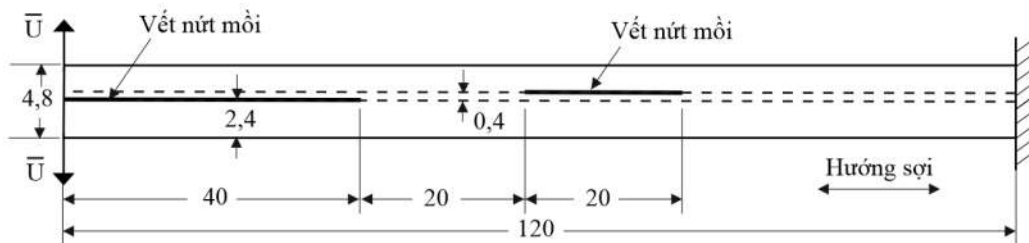
$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, d) = \mathbf{f} & \text{trong } \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} & \text{tại } \partial\Omega_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{F}} & \text{tại } \partial\Omega_f \end{cases} \quad (20)$$

ở đó, $\bar{\mathbf{u}}$ là giá trị chuyển vị tại biên $\partial\Omega_u$, ứng suất $\boldsymbol{\sigma}$ được tính theo công thức (8).

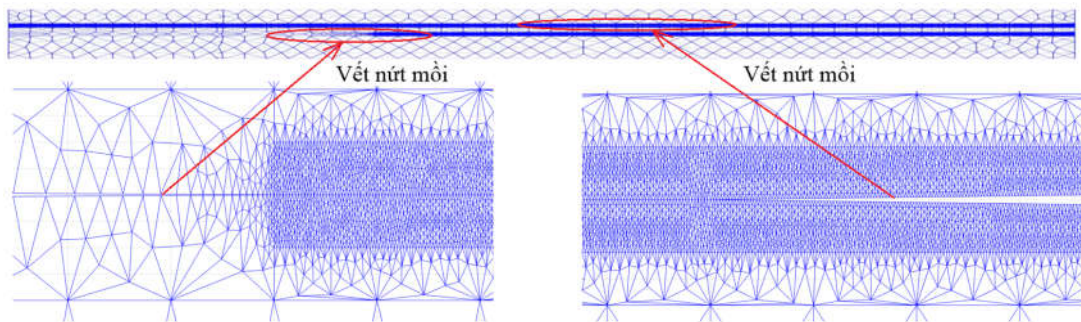
3. CÁC VÍ DỤ MÔ PHỎNG

3.1. Mô phỏng kéo tách một dầm công-xôn chứa vật liệu trục hướng

Một dầm công-xôn chứa vật liệu trục hướng Carbon-epoxy [15] có kích thước 120x4,8mm như Hình 2. Dầm này gồm 24 lớp sợi Carbon-epoxy xếp chồng lên nhau theo hướng $\alpha = 0^\circ$ với chiều dày mỗi lớp là 0,2mm. Dầm chứa hai vết nứt môi trùng hướng với lớp sợi, vết nứt môi thứ nhất ở đầu dầm dài 40mm và vết nứt môi thứ hai ở giữa dầm dài 20mm. Hai đầu gần nhất của hai vết nứt môi này cách nhau theo phương ngang là 20mm và cách nhau theo phương đứng là 0,4mm. Vết nứt môi thứ nhất cách đáy dầm là 2,4mm.



Hình 2. Kích thước và điều kiện biên của dầm công-xôn chứa vật liệu Carbon-epoxy.



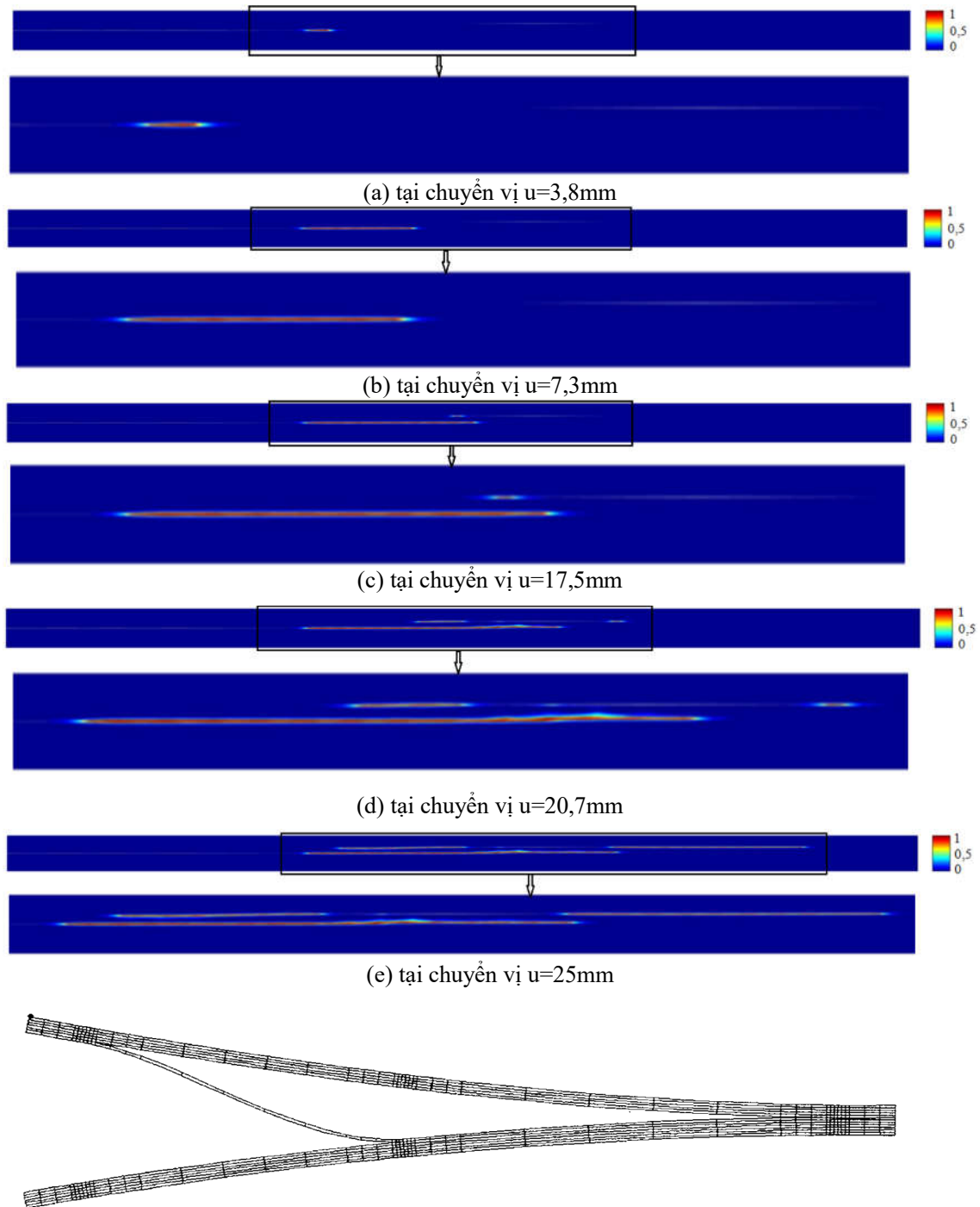
Hình 3. Chia lưới cho dầm bằng phần mềm GMSH 4.8.4 với hai khu vực có vết nứt môi.

Đặc tính vật liệu trục hướng Carbon-epoxy [15] được sử dụng trong nghiên cứu này như sau: mô đun đàn hồi theo hai phương e_1 và e_2 là $E_1=115\text{GPa}$, $E_2=8,5\text{GPa}$, mô đun kháng cắt $G_{12}=4,5\text{GPa}$, hệ số Poisson $\nu_{12}=0,29$, năng lượng kháng nứt $g_c=0,33\text{N/mm}$. Ví dụ này được mô phỏng trên bài toán 2D với ma trận độ mềm đàn hồi L được tính theo (9), sau đó ta tính được ma trận độ cứng đàn hồi theo công thức $C=L^{-1}$. Do góc $\alpha=0^\circ$ nên ma trận $C=C_0=L^{-1}$. Điều kiện biến dạng phẳng được áp dụng. Khảo sát sự hình thành và lan truyền vết nứt trong dầm bằng phương pháp trường pha với ten-xơ định hướng như công thức (2). Dầm được chia thành 96663 phần tử tam giác bằng phần mềm GMSH 4.8.4 [19] với hai loại kích thước lưới: tại khu vực vết nứt dự định đi qua, ta chia lưới với kích thước $h_{\min}=0,01\text{mm}$ và tại khu vực khác của kết cấu ta sử dụng lưới với $h=0,25\text{mm}$ như Hình 3.

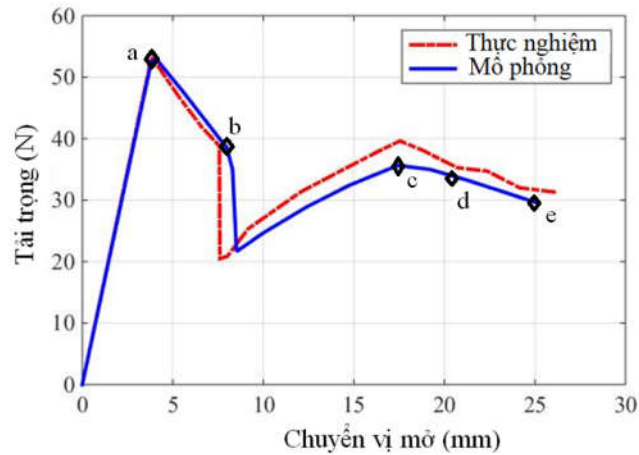
Điều kiện biên được chỉ ra trong Hình 2 với đầu dầm bên phải được liên kết ngàm. Đầu còn lại của dầm được áp chuyển vị đều với giá trị $0,05\text{mm}$ theo hai hướng ngược nhau tới khi kết cấu bị phá hủy hoàn toàn. Tham số chiều dài được đưa ra trong ví dụ này là $l=0,03\text{mm}$ để thỏa mãn điều kiện $l \geq 2h_{\min}$ của [1]. Hệ số dị hướng $\eta=20$ liên quan tới ω trong (2) để định hướng vết nứt.

Hình 4 thể hiện sự hình thành và lan truyền vết nứt trong dầm công-xôn với ba mầm nứt được hình thành ở các đầu vết nứt môi trong quá trình này. Hư hỏng đầu tiên xuất hiện ở đầu vết nứt môi thứ nhất như được đưa ra trong Hình 4a tương ứng chuyển vị $3,8\text{mm}$, sau đó vết nứt này tiếp tục lan truyền dọc theo phương ngang như Hình 4b. Khi vết nứt đầu tiên này đủ dài, xuất hiện mầm nứt thứ hai ở đầu bên trái của vết nứt môi phía trên tương ứng với chuyển vị $17,5\text{mm}$ như Hình 4c. Sau đó tại chuyển vị $20,7\text{mm}$, mầm nứt thứ ba xuất hiện ở đầu bên phải của vết nứt môi phía trên (xem Hình 4d). Các vết nứt này tiếp tục lan truyền tới khi các lớp vật liệu bị tách hoàn toàn với hai đường nứt riêng biệt như Hình 4e. Hình 4f chỉ ra hư hỏng của dầm công-xôn tương ứng phương pháp được sử dụng trong [15]. Đây là một dạng vết nứt đại diện cho hư hỏng của dạng I thuần túy của cơ học phá hủy bởi cơ chế chịu kéo tách lớp. So sánh kết quả đường nứt giữa Hình 4e của phương pháp trường pha và Hình 4f của [15], ta thấy rằng Hình 4e và Hình 4f có khác biệt nhỏ về chiều dài vết nứt giữa hai phương pháp. Điều này được giải thích bởi có thể có sự sai khác về các điều kiện biên và bước gia tải giữa hai phương pháp và đặc biệt là khoảng cách giữa các vết nứt môi khởi tạo hai đường nứt rất gần nhau, nhưng xu hướng hình thành và lan truyền các vết nứt là giống

nhau với việc tách các lớp vật liệu dọc theo phương ngang tới khi kết cấu bị phá hủy hoàn toàn, các vết nứt mới đều khởi tạo từ ba đầu của hai vết nứt mới.



Hình 4. So sánh sự lan truyền vết nứt giữa phương pháp mô phỏng hiện tại và phương pháp [15].



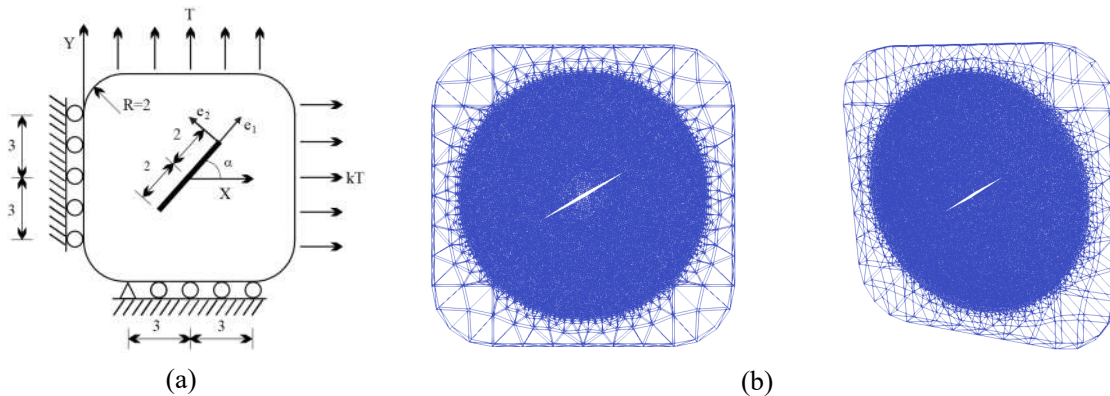
Hình 5. So sánh đường cong ứng xử tải trọng và chuyển vị giữa hai phương pháp.

Hình 5 so sánh đường cong tải trọng- chuyển vị của hai phương pháp trên, với đường liền màu xanh là đường cong ứng xử của phương pháp mô phỏng hiện tại và đường đứt màu đỏ là ứng xử của phương pháp thực nghiệm trong [15]. Các điểm đánh dấu màu đen tương ứng với trạng thái đường nứt được đưa ra từ Hình 4a tới Hình 4e. Ta thấy rằng vết nứt đầu tiên xuất hiện tương ứng với tải trọng lớn nhất. Sau đó giá trị tải trọng này giảm xuống khi vết nứt này lan truyền. Giá trị tải trọng tiếp tục tăng lên khi mầm nứt thứ hai xuất hiện ở đầu bên trái của vết nứt mỗi phía trên dẫn tới đỉnh giá trị tải trọng thứ hai (điểm c trong Hình 5). Lưu ý rằng đỉnh tải trọng tương ứng mầm nứt thứ hai này nhỏ hơn đỉnh tải trọng của mầm nứt đầu tiên (điểm a trong Hình 5).

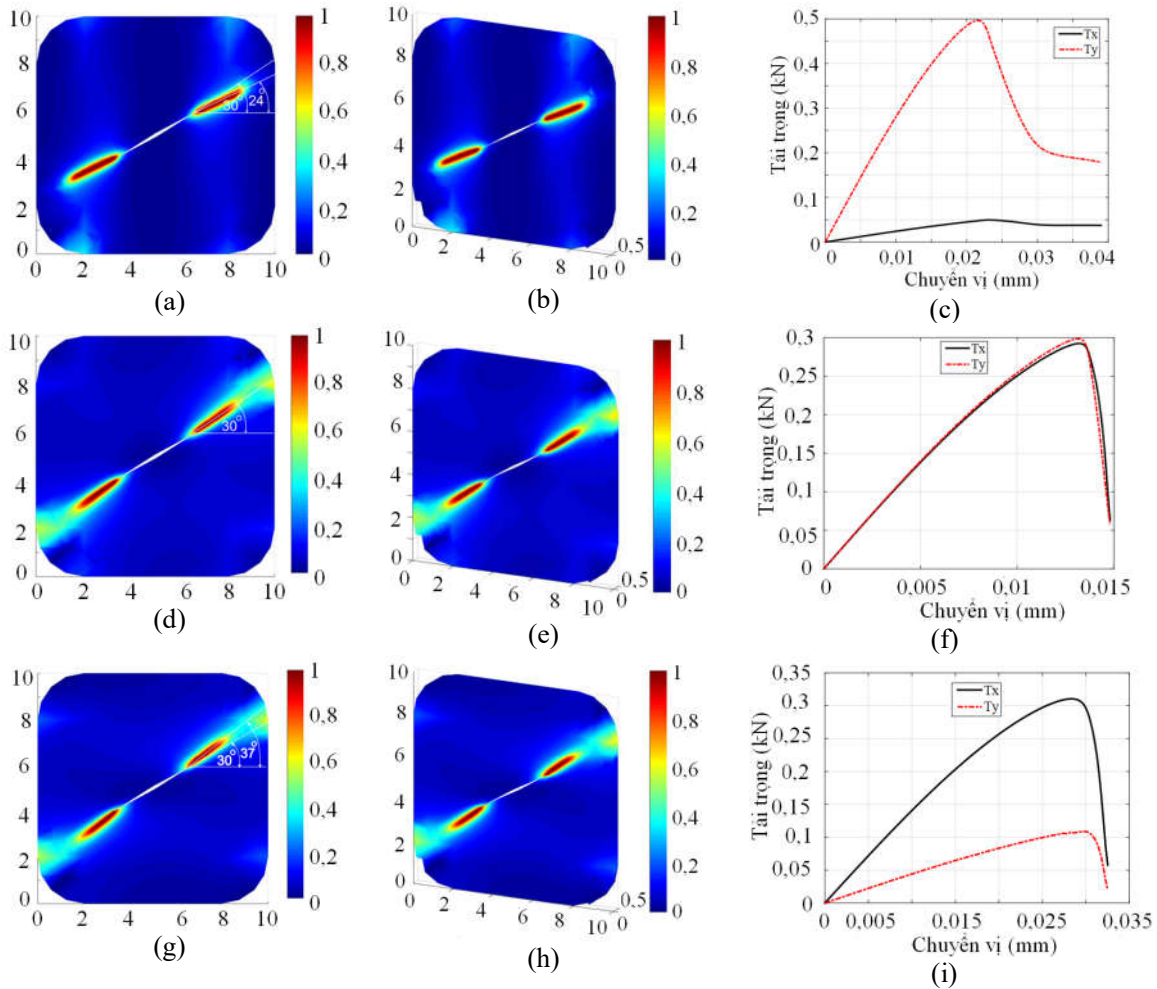
Từ kết quả so sánh trong Hình 4 và Hình 5, ta thấy phương pháp được đề xuất trong nghiên cứu này đáp ứng tốt kết quả của [15] trong bài toán tách lớp dầm công-xon chứa vật liệu trực hướng Carbon-epoxy.

3.2. Mô phỏng hư hỏng một tấm chứa vật liệu trực hướng chịu kéo hai phương

Trong ví dụ này, phương pháp trường pha được dùng để mô phỏng sự phát triển vết nứt trong một tấm chứa vật liệu trực hướng cốt sợi Glass-epoxy [16]. Kích thước và điều kiện biên của tấm được thể hiện trong Hình 6a. Tấm chứa vết nứt mỗi dài 4mm có hướng trùng với hướng sợi và tạo góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang x.



Hình 6. Tấm chứa vật liệu Glass-epoxy chịu kéo hai phương: (a) kích thước và điều kiện biên; (b) chia lưới cho tấm bằng phần mềm GMSH 4.8.4.



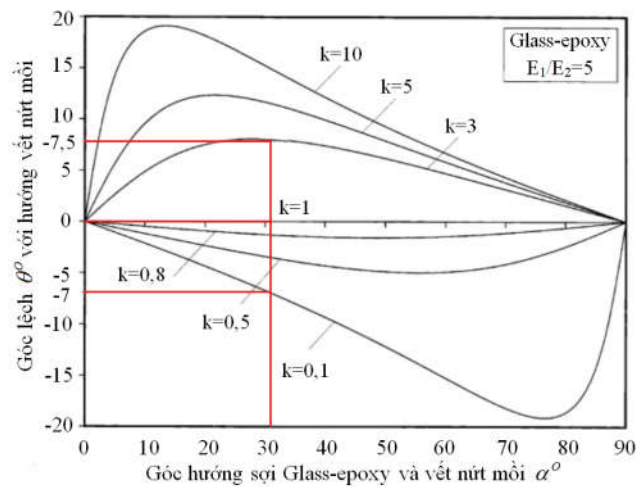
Hình 7. Mô phỏng bằng phương pháp trường pha xác định góc lệch θ° tuân theo hệ số $k=T_x/T_y$: (a) (b) (c) với $k=0,1$; (d) (e) (f) với $k=1$; (g) (h) (i) với $k=3$.

Tấm dày 0,5mm được bo tròn ở bốn góc với bán kính $R=2\text{mm}$ để tránh hiện tượng tập trung ứng suất khi kéo hai phương. Mặt dưới của tấm có một điểm bị khống chế chuyển vị theo phương x và y, các điểm còn lại không cho dịch chuyển theo phương y nhưng cho phép dịch chuyển tự do theo các phương còn lại. Mặt bên trái, các điểm bị khống chế chuyển vị theo phương x nhưng cho dịch chuyển theo hai phương kia. Mặt trên của tấm, các điểm được gia tải với bước chuyển vị đều Δu_y , chuyển vị theo hai phương còn lại không bị khống chế. Mặt bên phải, tấm được áp bước chuyển vị Δu_x để tạo ra hiệu ứng tải trọng theo hai phương x và y sao cho $T_x=k.T_y$, trong khi các chuyển vị cho phép tự do trong quá trình mô phỏng như được chỉ ra trong Hình 6a. Trong bài báo này, chúng tôi dùng phương pháp trường pha để khảo sát góc lệch θ° so với phương vết nứt mỗi trong một vài trường hợp đại diện với tỷ số của tải trọng theo hai phương x và y tương ứng với $k=0,1; 1$ và 3 . Sau đó, kết quả thu được so sánh với phương pháp phân tích lý thuyết của [16].

Đặc tính của vật liệu Glass-epoxy [16, 20] như sau: mô đun đàn hồi theo ba phương e_1, e_2 và e_3 là $E_1=42,8\text{GPa}$, $E_2= E_3=9,9\text{GPa}$, mô đun kháng cắt $G_{12}= G_{13}= G_{23}=3,7\text{GPa}$. Hệ số Poisson $\nu_{12}= \nu_{13}=0,27$, $\nu_{23}=0,34$, $\nu_{31}= \nu_{21}=(E_2/E_1).\nu_{12}$, năng lượng kháng nứt $g_c=0.2\text{N/mm}$. Trong ví dụ này bài toán không gian ba chiều (3D) được áp dụng với ma trận độ mềm đàn hồi L được tính theo (10). Sau đó, ta tính được ma trận độ cứng đàn hồi với hướng sợi nằm ngang theo công thức $C_0=L^{-1}$. Do góc hướng sợi trong ví dụ này là $\alpha= 30^\circ$ nên ma trận C được tính công thức (13) phụ thuộc vào ma trận chuyển hướng M .

Dầm được chia thành 333842 phần tử tứ diện bằng phần mềm GMSH 4.8.4 [19] với hai loại kích thước lưới: tại khu vực tròn bên trong mà khả năng vết nứt có thể lan truyền, ta chia lưới với $h_{\min}=0,05\text{mm}$, trong khi tại các khu vực khác của kết cấu ta sử dụng lưới với $h=0,75\text{mm}$ như Hình 6b. Tham số chiều dài là $l=0,1\text{mm}$. Hệ số dị hướng được đặt là $\eta=20$ liên quan tới ten-xơ định hướng ω trong (2).

Trong phương pháp trường pha, đường nứt được khởi tạo từ hai đầu của vết nứt mỗi trong tất cả các trường hợp như được biểu thị trong Hình 7. Góc lệch θ° tương ứng với các giá trị của tỷ số $k=0,1, k=1$ và $k=3$ là $-6^\circ, 0^\circ$ và 7° so với hướng sợi và hướng vết nứt mỗi. Trong các Hình 7c, 7f và 7i là đường cong quan hệ tải trọng-chuyển vị với hiệu ứng tải theo hai phương áp điều kiện kéo tằm T_x và T_y đảm bảo quan hệ $T_x=k.T_y$ (với $k=0,1, k=1$ và $k=3$ tương ứng). Trong ví dụ này, với việc kéo hai chiều kết cấu, vết nứt được hình thành do sự kết hợp của cơ chế hư hỏng dạng I và dạng II của cơ học phá hủy.



Hình 8. Góc lệch θ° tương ứng với góc của hướng sợi α° và hệ số $k=T_x/T_y$ trong phương pháp phân tích lý thuyết của [16].

Hình 8 chỉ ra góc lệch θ° tương ứng với các giá trị góc của hướng sợi α° và các hệ số k theo phương pháp lý thuyết [16]. Đường màu đỏ dùng để xác định giá trị góc θ° tương ứng với một vài giá trị k và góc $\alpha=30^\circ$. Ta thấy rằng khi với $k=0,1, k=1$ và $k=3$ thì góc lệch θ° tương ứng là $-7^\circ, 0^\circ$ và $7,5^\circ$ so với hướng sợi.

Bảng 1. So sánh góc lệch θ° giữa phương pháp trường pha với phương pháp của [16]

Góc α°	K	Phương pháp phân tích lý thuyết của [13] θ°	Phương pháp trường pha hiện tại θ°	Sai số (%)
30°	0,1	-7°	-6°	14,3
	1	0°	0°	0
	3	7,5°	7°	6,67

Bảng 1 dùng để so sánh và đánh giá sai số của góc lệch θ° giữa phương pháp mô phỏng hiện tại với phương pháp phân tích lý thuyết của [16]. Các sai số giữa hai phương pháp là khá nhỏ tương ứng với các giá trị k khác nhau. Từ Hình 7, Hình 8 và Bảng 1, ta thấy kết quả của phương pháp mô phỏng thỏa mãn với kết quả phân tích của [16].

4. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Trong bài báo này, phương pháp trường pha với ten-xơ định hướng và một dạng của phân rã ten-xơ biến dạng thỏa mãn điều kiện trực giao của [14] được sử dụng. Phương pháp này được dùng để mô phỏng sự khởi tạo và hướng của đường nứt trong kết cấu chứa vật liệu trực hướng mạnh như Carbon-epoxy và Glass-epoxy.

Trong ví dụ tách lớp vật liệu trực hướng được sử dụng bằng phương pháp mô phỏng hiện tại có khả năng thay thế được cho phương pháp trường pha có tính đến hư hỏng mặt phân giới được phát triển bởi [4] trước đó. Điều này có thể làm đơn giản hóa quá trình mô phỏng bởi phương pháp hiện tại chỉ sử dụng một biến trường pha duy nhất thay vì hai loại biến trường pha trong [4]. Trong ví dụ thứ hai với việc kéo hai phương một tấm chứa vật liệu trực hướng, điều kiện này là phức tạp vì phụ thuộc vào tỷ số tải trọng theo hai phương nhưng xu hướng phát triển vết nứt cũng đáp ứng tốt với kết quả tham chiếu với một vài giá trị đại diện của k và góc $\alpha=30^\circ$.

Kết quả đạt được bằng phương pháp trường pha đề xuất với hai ví dụ trong cả bài toán 2D và không gian 3D được so sánh với kết quả của phương pháp thực nghiệm và phương pháp phân tích lý thuyết đều cho sự đáp ứng tốt về cơ chế nứt và ứng xử vật liệu. Điều này chứng tỏ phương pháp trường pha là một công cụ mô phỏng tốt và tin cậy để mô tả một hệ thống các vết nứt phức tạp cũng như xu hướng phát triển vết nứt trong kết cấu chứa vật liệu trực hướng mạnh trong điều kiện hư hỏng dạng I thuần túy tương ứng với ví dụ 1 và kết hợp giữa hư hỏng dạng I và hư hỏng dạng II tương ứng với ví dụ 2. Trong các nghiên cứu tiếp theo, chúng tôi có thể nghiên cứu thêm các trường hợp còn lại với các góc α khác, cơ chế nứt dạng III và các vật liệu trực hướng khác như Graphite-epoxy.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông vận tải (ĐH GTVT) trong đề tài mã số T2022-CT-003.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. C. Miehe, M. Hofacker, F. Welschinger, A phase field model for rate-independent crack propagation: robust algorithmic implementation based on operator splits, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 199 (2010) 2765-2778. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.04.011>
- [2]. T.T. Nguyen, J. Yvonnet, Q.Z. Zhu, M. Bornert, C. Chateau, A phase field method to simulate crack nucleation and propagation in strongly heterogeneous materials from direct imaging of their microstructure, *Eng. Fract. Mech.*, 139 (2015) 18-39. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.03.045>
- [3]. Nguyễn Thị Hải Như, Trần Anh Bình, Khảo sát ảnh hưởng của sự phân bố lỗ rỗng tới sự khởi tạo và phát triển vết nứt bằng phương pháp trường pha, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ Xây dựng*, 5 (2017) 100-107.
- [4]. T.T. Nguyen, J. Yvonnet, Q.Z. Zhu, M. Bornert, C. Chateau, A phase-field method for computational modeling of interfacial damage interacting with crack propagation in realistic microstructures obtained by microtomography, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 312 (2016) 567-95. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.10.007>
- [5]. W. Ren, Z. Yang, R. Sharma, C.H. Zhang, P.J. Withers, Two-dimensional X-ray CT image based mesoscale fracture modelling of concrete, *Eng. Fract. Mech.*, 133 (2015) 24-39. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.016>
- [6]. E. N. Landis, D. T. Keane, X-ray microtomography, *Materials Characterization*, 61 (2010) 1305-1316. <https://doi.org/10.1016/j.matchar.2010.09.012>
- [7]. P. Li, J. Yvonnet, C. Combescure, An extension of the phase field method to model interactions between interfacial damage and brittle fracture in elastoplastic composites, *Int. J. Mech. Sci.*, 179 (2020) 105633. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105633>
- [8]. Vũ Bá Thành, Trần Anh Tuấn, Nguyễn Đình Hải, Mô phỏng sự lan truyền vết nứt trong kết cấu nhiều pha vật liệu bằng phương pháp phase field có xét tới hư hỏng mặt phân giới, *Tạp chí khoa học Giao thông vận tải*, 72 (2021) 911-925. <https://doi.org/10.47869/tcsj.72.8.5>
- [9]. Vũ Bá Thành, Ngô Văn Thức, Bùi Tiến Thành, Trần Thế Truyền, Đỗ Anh Tú, Mô phỏng sự hình thành và lan truyền vết nứt trong dầm bê tông cường độ cao có chất kết dính bổ sung nano-silica bằng phương pháp phase field, *Tạp chí khoa học Giao thông vận tải*, 72 (2021) 672-686. <https://doi.org/10.47869/tcsj.72.6.1>
- [10]. Vu Ba Thanh, H. Le Quang, Q.-C. He, Investigating crack nucleation and propagation by the phase field method with a new family of degradation functions, 5th International Conference on Structural Integrity and Durability, Dubrovnik, Croatia, 2021.
- [11]. B. T. Vu, X. L. Nguyen, A. T. Do, Strain orthogonal decomposition implemented within the phase field method with interfacial damage to model fracture in multi-phase heterogeneous materials, *Transport and communications science Journal*, Thư chấp nhận đăng gửi ngày 16 tháng 6 năm 2022.
- [12]. Vũ Bá Thành, Ngô Văn Thức, Phương pháp phase field với phân rã trực giao ten-xơ biến dạng mô phỏng hư hỏng kết cấu chứa vật liệu đẳng hướng, *Kỷ yếu hội thảo khoa học quốc tế phát triển xây dựng bền vững trong điều kiện biến đổi khí hậu khu vực đồng bằng sông Cửu Long*, Vĩnh Long tháng 11 năm 2021, 67-74, ISBN: 978-604-82-5956-3.
- [13]. Vũ Bá Thành, Trần Anh Tuấn, Nguyễn Đình Hải, Nguyễn Xuân Lam, Phương pháp phase field với sử dụng phân rã trực giao thành phân ten-xơ biến dạng để dự đoán sự phát triển vết nứt trong vật liệu giòn, *Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn lần thứ 15*, Thái Nguyên tháng 9 năm 2021, 866-874, ISBN: 978-604-9987-74-8.
- [14]. Q.C. He, Q. Shao, Closed-form coordinate-free decompositions of the two-dimensional strain and stress for modeling tension-compression dissymmetry, *J. Appl. Mech.*, 86 (2019) 031007. <https://doi.org/10.1115/1.4042217>

- [15]. P. Robinson, T. Besant, D. Hitchings, Delamination Growth Prediction Using a Finite Element Approach, *Eur. Struct. Integrity Soc*, 27 (2000) 135-147. [https://doi.org/10.1016/S1566-1369\(00\)80014-X](https://doi.org/10.1016/S1566-1369(00)80014-X)
- [16]. L. Nobile, C. Carloni, Fracture analysis for orthotropic cracked plates, *Composite Structures*, 68 (2005) 285-293. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.03.020>
- [17]. B. Li, C. Peco, D. Millan, I. Arias, M. Arroyo, Phase-field modeling and simulation of fracture in brittle materials with strongly anisotropic surface energy, *Int. J. Numer. Methods Eng*, 102 (2015) 711-727. <https://doi.org/10.1002/nme.4726>
- [18]. T.T. Nguyen, J. Yvonnet, M. Bornert, C. Chateau, K. Sab, R. Romani, R. Le Roy, On the choice of parameters in the phase field method for simulating crack initiation with experimental validation, *Int. J. Fracture*, 197 (2016) 213-226. <https://doi.org/10.1007/s10704-016-0082-1>
- [19]. Phần mềm GMSH 4.8.4. <https://gmsh.info>
- [20]. M. Arcisz, G.C. Sih, Effect of orthotropy on crack propagation, *Theor. Appl. Fract. Mech*, 1 (1984) 225-238. [https://doi.org/10.1016/0167-8442\(84\)90003-X](https://doi.org/10.1016/0167-8442(84)90003-X)