Transport and Communications Science Journal

SOME APPLICATIONS OF ANALYTIC PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS

Nguyen Sy Anh Tuan

University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article
Received: 27/03/2022
Revised: 04/05/2022
Accepted: 08/06/2022
Published online: 15/06/2022
https://doi.org/10.47869/tcsj.73.5.5

* *Corresponding author*
Email: anhtuanns@utc.edu.vn; Tel: +84 903231051

Abstract. The theory of analytic pseudo-differential operators is an extension of differential operators, which is a powerful tool to study the application of Fourier analysis to partial differential equations. This paper studies some profound applications of the analytic pseudo-differential operator that has been of interest to some mathematicians. The space of entire functions of exponential type is less than R and the algebra of pseudo-differential analytic operators on this space are included in Part 2 of the paper. The criterion for identifying a function in the space of exponent entire functions of type less than R is stated and proven in Proposition 2.1. In Part 3 of the paper, an application of the analytic pseudo-differential operator is presented, denoted as the exponent generator function of the extended Bernoulli series of numbers, is presented to study the solution of differential equations, where the shift operator and, the constant is the polynomial of the difference (5) introduced in Part 3. The convolution operator is an analytic pseudo-differential operator cleverly used in the inverse Laplace transform problem in the separable Hilbert spaces included at the end of the paper.

Keywords: Pseudo-differential operator, differential equation, inverse Laplace transform.

Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải

MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA TOÁN TỬ GIẢ VI PHÂN GIẢI TÍCH

Nguyễn Sỹ Anh Tuấn

Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học
Ngày nhận bài: 27/03/2022
Ngày nhận bài sửa: 04/05/2022
Ngày chấp nhận đăng: 08/06/2022
Ngày xuất bản Online: 15/06/2022
https://doi.org/10.47869/tcsj.73.5.5

** Tác giả liên hệ*
Email: anhtuanns@utc.edu.vn; Tel: +84 903231051

Tóm tắt. Lý thuyết toán tử giả vi phân giải tích là một phần mở rộng của toán tử vi phân, là một công cụ mạnh để nghiên cứu ứng dụng của Giải tích Fourier vào phương trình đạo hàm riêng. Bài báo này nghiên cứu một vài ứng dụng sâu sắc của toán tử giả vi phân giải tích đã và đang được một số nhà toán học quan tâm. Không gian các hàm nguyên exponent type bé hơn R và đại số các toán tử giả vi phân giải tích trên không gian này được đưa vào ở Phần 2 của bài báo. Tiêu chuẩn để nhận biết một hàm thuộc không gian các hàm nguyên exponent type bé hơn R được phát biểu và chứng minh ở Mệnh đề 2.1. Ở Phần 3 của bài báo trình bày một ứng dụng của toán tử giả vi phân giải tích với ký hiệu là hàm sinh exponent của dãy số Bernoulli mở rộng để nghiên cứu nghiệm của phương trình sai phân (5) được đưa vào ở Phần 3. Toán tử tích chập là một toán tử giả vi phân giải tích được sử dụng một cách khéo léo vào bài toán biến đổi Laplace ngược trên không gian Hilbert tách được được đưa vào ở phần cuối của bài báo.

Từ khóa: Toán tử giả vi phân, phương trình sai phân, biến đổi Laplace ngược.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Việc nghiên cứu toán tử giả vi phân bắt đầu từ những năm 1960 với các công trình của Kohn, Nirenberg, Hömander và Bokobza. Vào những năm 1980, Dubinskii (xem [1]) đã nghiên cứu toán tử giả vi phân giải tích với ký hiệu là hàm giải tích trên miền tuỳ ý $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và ứng dụng vào toán – lý. Cơ sở của các ứng dụng này là đại số các toán tử giả vi phân giải tích tác động bất biến và liên tục.

Trong bài báo này, tác giả ứng dụng toán tử giả vi phân với ký hiệu là hàm giải tích trong miền $\Omega \subset \mathbb{C}$ để nghiên cứu hai bài toán ở Mục 3 và Mục 4. Các kết quả, các chứng minh và các ví dụ của tác giả là hoàn toàn mới.

Một số kiến thức hỗ trợ:

- Công thức tổng Euler-Maclaurin

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+kh) = \frac{1}{h}\int_0^{nh} f(x+t)dt - \frac{1}{2}\left[f(x+nh)-f(x)\right] + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}}{(2r)!}h^{2r-1}\left[f^{(2r-1)}(x+nh)-f^{(2r-1)}(x)\right]$$

trong đó $B_{2r}(r=1,2,...)$ là các số Bernoulli, được xác định bởi $\dfrac{z}{e^z-1} = 1-\dfrac{z}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}\dfrac{B_{2r}}{(2r)!}z^{2r}$.

- Giả sử X và Y là các không gian Hilbert và $A: X \to X$ và $B: Y \to Y$ là các toán tử tuyến tính bị chặn. Khi đó chúng ta nói rằng B là tương đương unitary với A nếu tồn tại toán tử $U: X \to Y$ sao cho $B = UAU^{-1}$.

- Biến đổi Laplace $L^2(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\mathscr{L}} L^2(\mathbb{R}^+)$ là toán tử bị chặn, hơn nữa ta có $\|\mathscr{L}\|_{L^2 \to L^2} = \sqrt{\pi}$.

2. KHÔNG GIAN $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ VÀ ĐẠI SỐ CÁC TOÁN TỬ GIẢ VI PHÂN GIẢI TÍCH

Chúng ta xét các hàm nguyên $u(z), z \in \mathbb{C}$.

2.1. Không gian $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$

Giả sử $R>0$ và $S_R = \left\{\xi \in \mathbb{C}_\xi : |\xi| < R\right\}$ là miền tròn mở bán kính R .

Định nghĩa (xem [6]) ***:*** Ta đặt

$Exp_R(\mathbb{C}_Z) = \left\{u(z) : |u(z)| \le M.e^{r.|z|}, z \in \mathbb{C}_Z\right\}$, trong đó $M>0$ là một hằng số và $0<r<R$.

Như vậy $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ là không gian con của không gian các hàm nguyên exponent type $r<R$.

Ví dụ 2.1:

+ Đa thức bất kỳ $P(z) \in Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ với $R>0$ tuỳ ý.

+ Hàm $e^{a.z}$ là hàm nguyên exponent có type $|a| \Rightarrow e^{az} \in Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ với $\forall R > |a|$ (xem [7]).

+ Hàm $\sin \pi z$ là hàm nguyên exponent có type $\pi \Rightarrow \sin \pi z \in Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ với $\forall R > \pi$.

+ Hàm f thuộc không gian Paley-Wiener (xem [5]) (nghĩa là f là hàm bình phương khả tích trên $\mathbb{R}$ và $\operatorname{supp}\widehat{f} \subseteq [-L,L]$, với $L>0$ và $\widehat{f}$ là biến đổi Fourier của f) là hàm nguyên exponent type $2\pi L$, do đó $f \in Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ với $\forall R > L$.

Mệnh đề 2.1: Hàm nguyên $u(z)$ thuộc $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ khi và chỉ khi tồn tại $M > 0, 0 < r < R$ sao cho $\left|D^\alpha u(z)\right| \le M.e^{r|z|}.r^\alpha, \forall z \in \mathbb{C}_z, \forall \alpha$ là số nguyên không âm và $D^\alpha u(z)$ là đạo hàm cấp α của hàm $u(z)$.

Điều kiện đủ là hiển nhiên.

Ta chứng minh điều kiện cần.

Thật vậy, giả sử $u(z) \in Exp_R(\mathbb{C}_Z)$. Áp dụng công thức tích phân Cauchy ta có

$$D^\alpha u(z) = \frac{\alpha!}{2\pi i} \cdot \oint_{|\xi - z| = a} \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

Ta có $\left|u(z)\right| \le M.e^{r|z|} \le M.e^{r|z|}.e^{ra}$ với $M > 0$, do đó $\left|D^\alpha u(z)\right| \le M.e^{r|z|}.e^{ra} \cdot \frac{\alpha!}{a^\alpha} \le M.e^{r|z|}.\alpha! \min_{a>0} \frac{e^{ra}}{a^\alpha}$.

Vì $\min_{a>0} \frac{e^{ra}}{a^\alpha}$ đạt tại $a = \frac{\alpha}{r}$ và áp dụng công thức Stirling [11] $\alpha!\left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha \sim \sqrt{2\pi\alpha}$ khi $\alpha \to \infty$ nên tồn tại $\overline{M} > 0; r < \overline{r} < R$ sao cho $\left|D^\alpha u(z)\right| \le \overline{M}.e^{\overline{r}|z|}.\left(\overline{r}\right)^\alpha, \forall z \in \mathbb{C}_z \Rightarrow$ Điều kiện cần được chứng minh xong.

Sự hội tụ trong không gian $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$

Ta nói dãy $\{u_\alpha(z)\}$ hội tụ đến hàm $u(z)$ khi $\alpha \to \infty$ trong không gian $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ nếu thoả mãn hai điều kiện sau:

+ Dãy $\{u_\alpha(z)\}$ hội tụ đến $u(z)$ đều địa phương trong $\mathbb{C}_Z$.

+ Tồn tại hằng số $M > 0$ và $0 < r < R$ sao cho $\left|u_\alpha(z)\right| \le M.e^{r|z|}, z \in \mathbb{C}_z, \forall \alpha = 1, 2, ...$

Hiển nhiên với sự hội tụ này $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ là không gian tô pô tuyến tính đầy đủ.

2.2. Toán tử giả vi phân với ký hiệu là hàm giải tích trong S_R

Giả sử $A(\xi)$ là hàm giải tích bất kỳ trong miền tròn mở S_R. Ta so sánh hàm $A(\xi)$ với toán tử $A(D)$, bằng cách thay hình thức biến ξ bởi toán tử đạo hàm $D = \frac{d}{dz}$ (xem [9]).

Hàm $A(\xi)$ được gọi là ký hiệu của toán tử $A(D)$.

Ta đã biết hàm $A(\xi)$ giải tích trong miền tròn mở S_R nên khai triển được thành chuỗi Taylor dạng

$A(\xi) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha.\xi^\alpha, \xi \in S_R$ trong đó $a_\alpha = \frac{D^\alpha A(0)}{\alpha!}$ (xem [13]).

Định nghĩa: Tác động của toán tử $A(D)$ được xác định bởi công thức

$$A(D)u(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha.D^\alpha u(z), u(z) \in Exp_R(\mathbb{C}_Z). \quad (1)$$

Mệnh đề 2.2:

Nếu hàm $u(z)$ thuộc $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ thì hàm $A(D)u(z)$ được xác định và cũng thuộc không gian $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$, hơn nữa ánh xạ $A(D): Exp_R(\mathbb{C}_Z) \to Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ là liên tục.

Mệnh đề 2.3:

Tập hợp $\mathscr{A}(S_R)$ tất cả các toán tử giả vi phân giải tích $A(D)$ có ký hiệu là hàm $A(\xi)$ giải tích trong miền tròn mở S_R là một đại số các toán tử đẳng cấu với đại số $O(S_R)$ các hàm giải tích $A(\xi)$ trong S_R. Khi đó

$A(D) \to A(\xi)$,

$\alpha A(D) + \beta B(D) \leftrightarrow \alpha A(\xi) + \beta B(\xi)$,

$A(D)B(D) \leftrightarrow A(\xi)B(\xi)$.

Đặc biệt nếu $A(\xi)$ và $A^{-1}(\xi)$ cùng thuộc $O(S_R)$ thì $A^{-1}(D)$ là toán tử nghịch đảo của $A(D)$ (xem [14]).

Ví dụ 2.2: Như đã biết các số Bernoulli [4] là các hệ số B_k của hàm sinh exponent

$$A(\xi) = \frac{\xi}{e^{\xi} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \cdot \xi^k . \tag{2}$$

Ta có $A(\xi)$ giải tích trong miền tròn mở $S_R = \left\{\xi : |\xi| < 2\pi\right\}$, là ký hiệu của toán tử giả vi phân giải tích $A(D)$ tác động trong không gian $Exp_{2\pi}(\mathbb{C}_Z)$ được xác định bởi công thức

$$A(D)u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \cdot D^k u(z), u(z) \in Exp_{2\pi}(\mathbb{C}_Z).$$

Ví dụ 2.3: Xét toán tử vi - sai phân

$$Au(z) = \sum_{\beta=0}^{m} b_\beta D^\beta u(z + a_\beta). \tag{3}$$

Dễ dàng thấy rằng $Au(z)$ là toán tử giả vi phân giải tích với ký hiệu là $A(\xi) = \sum_{\beta=0}^{m} b_\beta \xi^\beta . e^{\xi . a_\beta}$.

Ví dụ 2.4: Xét toán tử dịch chuyển (xem [14]) $Au(z) = u(z+a)$, trong đó $a \in \mathbb{C}$ là véc tơ dịch chuyển, $z \in \mathbb{C}_z$.

Ta có khai triển Taylor $Au(z) = u(z+a) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{D^\alpha u(z)}{\alpha!} \cdot a^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha u(z)$.

Do đó toán tử dịch chuyển là toán tử giả vi phân giải tích với ký hiệu là hàm $A(\xi) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a^\alpha}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha = e^{\xi . a}$.

Ví dụ 2.5: Giả sử $\mu(d\omega)$ là độ đo compact trong $\mathbb{C}$. Xét toán tử tích chập

$$Au(z) = \int_{\mathbb{C}} u(z - \omega)\mu(d\omega), \tag{4}$$

trong đó $u(z)$ là hàm nguyên exponent trên $\mathbb{C}$.

Theo công thức Taylor ta có

$Au(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha . D^\alpha u(z)$, trong đó $a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \cdot \int_{\mathbb{C}} (-\omega)^\alpha \mu(d\omega)$.

Như vậy, toán tử tích chập là toán tử giả vi phân giải tích với ký hiệu là $A(\xi) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha \cdot \xi^\alpha$.

3. TOÁN TỬ GIẢ VI PHÂN GIẢI TÍCH VÀ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

Ký hiệu toán tử dịch chuyển là $\Delta f(z) = f(z+1)$ và toán tử đạo hàm là $Df(z) = f'(z)$.

Khi đó ta có $\Delta = e^D$. Thật vậy khai triển Taylor hàm $f(z+1)$ ta có

$$\Delta f(z) = f(z+1) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!} \cdot 1 + \frac{f''(z)}{2!} \cdot 1^2 + ... = \left(1 + \frac{D}{1!} \cdot 1 + \frac{D^2}{2!} \cdot 1^2 + ...\right) f(z) = e^D f(z).$$

Xét phương trình sai phân (xem [12])

$$P(\Delta) f(z) = \varphi(z) \tag{5}$$

trong đó $\Delta f(z) = f(z+1)$ là toán tử dịch chuyển và $P(\Delta) = \sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha \Delta^\alpha$ là đa thức của toán tử sai phân với hệ số là hằng số.

Bổ đề 3.1: Giả sử $\varphi(z) \in Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ và $z = 1$ là nghiệm bội m của đa thức đặc trưng $P(z) = \sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha . z^\alpha$. Khi đó nếu $f(z) \in Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ là nghiệm của phương trình vi phân

$$D^m f(z) = A(D) \varphi(z) \tag{6}$$

trong đó $A(D) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(m)}{k!} \cdot D^k$ và $B_k(m)$ là các số Bernoulli mở rộng thì $f(z)$ là nghiệm của phương trình sai phân

$$P(\Delta) f(z) = \varphi(z) \tag{7}$$

Chứng minh: Ta biết rằng hàm $u(z) \in Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ nếu và chỉ nếu tồn tại $M > 0, 0 < r < R$ sao cho $\left|D^\alpha u(z)\right| \le M e^{r|z|} r^\alpha, \forall z \in \mathbb{C}_Z, \forall \alpha$. Do đó các nguyên hàm của hàm $u(z)$ cũng thuộc $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$.

Bây giờ giả sử hàm $f(z)$ là nghiệm của phương trình $D^m f(z) = A(D) \varphi(z)$.

Ta có đa thức toán tử sai phân $P(\Delta) = \sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha \Delta^\alpha$ tác động như toán tử giả vi phân giải tích trong $Exp(\mathbb{C}_Z)$ và thoả mãn $P(\Delta) = P(e^D)$, nghĩa là $P(\Delta)\varphi(z) = P(e^D)\varphi(z)$, $\varphi(z) \in Exp(\mathbb{C}_Z)$.

Đặt $A(\xi) = \frac{\xi^m}{P(e^\xi)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(m)}{k!} \cdot \xi^k$, trong đó $B_k(m)$ là các số Bernoulli mở rộng, m chỉ số bội của nghiệm $\xi = 0$. Khi đó hàm $A(\xi)$ giải tích trong miền tròn mở $S_R = \left\{\xi \in \mathbb{C}_\xi : |\xi| < R\right\}$ (R là khoảng cách bé nhất từ điểm $\xi = 0$ đến các không điểm của $P(e^\xi)$).

Do đó $A(D)$ là toán tử giả vi phân giải tích xác định trên không gian $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$.

Từ đó suy ra $P(e^D).A(D) = D^m$.

Theo giả thiết có $D^m f(z) = A(D)\varphi(z) \Rightarrow P(e^D).A(D)f(z) = A(D)\varphi(z)$.

Nhân hai vế phương trình với toán tử $A^{-1}(D)$ ta suy ra $P(e^D).f(z) = \varphi(z)$. Như vậy nếu $\varphi(z)$ thuộc không gian $Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ thì $f(z)$ là nghiệm của phương trình sai phân $P(\Delta)f(z) = \varphi(z)$ (đpcm).

Ví dụ 3.1: Tìm nghiệm của phương trình sai phân $P(\Delta)f(z) = \varphi(z)$, trong trường hợp

$$\varphi(z) = e^{az}, 0 < a < R \tag{8}$$

Ta có $\varphi(z) \in Exp_R(\mathbb{C}_Z)$, giả sử m là số bội của nghiệm $z = 1$ của đa thức đặc trưng $P(z)$.

Áp dụng Bổ đề trên ta có

$$D^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(m)}{k!} \cdot D^k \varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(m)}{k!} \cdot D^k(e^{az}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(m)}{k!} \cdot a^k e^{az} = e^{az} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(m)}{k!} \cdot a^k =$$

$$= e^{az} \cdot \frac{a^m}{P(e^a)}.$$

Lấy tích phân hai vế của $D^m f(z) = e^{az} \cdot \dfrac{a^m}{P(e^a)}$ liên tiếp m lần $(m \geq 1)$ ta có nghiệm của phương trình là

$$f(z) = \frac{e^{az}}{P(e^a)} + c_1 z^{m-1} + ... + c_{m-1} z + c_m, \tag{9}$$

trong đó $c_1, ..., c_m$ là các hằng số tuỳ ý.

Ví dụ 3.2: Xét bài toán Cauchy đối với phương trình dịch chuyển (xem [10])

$$\frac{\partial u}{\partial \omega}(\omega, z) + u(\omega, z + a) = 0 \, (\omega \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}_Z), \tag{10}$$

$u(0, z) = \varphi(z)$, trong đó $\varphi(z) \in Exp_R(\mathbb{C}_Z)$.

Ta có $u(\omega, z + a) = e^{aD} u(\omega, z)$ nên suy ra $\dfrac{\partial u}{\partial \omega}(\omega, z) + e^{aD} u(\omega, z) = 0,\ u(0, z) = \varphi(z)$. Do đó $u(\omega, z) = e^{-\omega . e^{aD}} \varphi(z)$. Vậy nghiệm của bài toán là $u(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\left(-\omega e^{aD}\right)^n}{n!} \cdot \varphi(z)$ hoặc là

$$u(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^n}{n!} \cdot \left(e^{naD} \varphi(z)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^n}{n!} \cdot \varphi(z + na).$$

Trường hợp riêng, nghiệm cơ bản của bài toán Cauchy đã cho là

$$\varepsilon(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^n}{n!} \delta(z + na). \tag{11}$$

4. TOÁN TỬ GIẢ VI PHÂN GIẢI TÍCH VÀ BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

Trong phần này chúng ta xét phép biến đổi Laplace [3]: $L^2(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\mathscr{L}} L^2(\mathbb{R}^+)$ được xác định bởi

$$\mathscr{L}(f(x))(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx . \tag{12}$$

Biến đổi Laplace của các hàm thuộc $L^2(\mathbb{R}^+)$ liên quan mật thiết với các hàm thuộc không gian Hardy được định nghĩa là $H^2(\mathbb{C}^+) = \{\varphi(x+iy)$, giải tích với $x > 0$ và $\sup_{x>0} \int_R |\varphi(x+iy)|^2 dy < \infty\}$.

Mệnh đề 4.1: Biến đổi Laplace $L^2(\mathbb{R}^+) \xrightarrow[\infty]{\mathscr{L}} L^2(\mathbb{R}^+)$ là hàm thuộc không gian Hardy $H^2(\mathbb{C}^+)$.

Thật vậy, áp dụng công thức Fourier trong L^2 (xem [2]) ta có

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathscr{L} f(x+iy)|^2 dy = \int_0^\infty \left|2\pi e^{-2\pi xt} f(2\pi t)\right|^2 dt .$$

Đặt $2\pi t = v$ ta có $\int_{\mathbb{R}} |\mathscr{L} f(x+iy)|^2 dy = 2\pi \int_0^\infty \left|e^{-xv} f(v)\right|^2 dv \le 2\pi \int_0^\infty |f(v)|^2 dv = 2\pi \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ (đpcm).

Mệnh đề 4.2: Nếu f là hàm giải tích trên nửa mặt phẳng $\mathbb{C}^+ = \{z = x+iy, x > 0\}$ và thoả mãn $\sup_{x>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dy < \infty$ thì f là biến đổi Laplace của hàm $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^+)$, hơn nữa biến đổi Laplace $L^2(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\mathscr{L}} H^2(\mathbb{C}^+)$ là toán tử unitary (xem [15]).

Ta đưa vào toán tử $\mathbf{U}$ xác định bởi $\mathbf{U}f(v) = e^{v/2}.f(e^v)$. Dễ dàng thấy rằng $\mathbf{U}$ là toán tử unitary từ $L^2(\mathbb{R}^+)$ vào $L^2(\mathbb{R})$. Xét toán tử tích phân Carleman trên $L^2(\mathbb{R}^+)$ xác định bởi

$$Sf(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y} dy .$$

Ta có $S = \mathscr{L}^2$ là toán tử bị chặn, tự liên hợp với $\|S\| = \|\mathscr{L}^2\| = \pi$ (xem [16]). Bây giờ ta xác định toán tử T tác động trên $L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{T} & L^2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{U}^{-1}\big\downarrow & & \big\uparrow \mathbf{U} \\ L^2(\mathbb{R}^+) & \xrightarrow{\mathscr{L}^2} & L^2(\mathbb{R}^+), \end{array} \qquad , T = \mathbf{U}\mathscr{L}^2\mathbf{U}^{-1} \tag{13}$$

T là toán tử tích phân Carleman được xác định bởi tích chập

$$Tf(x) = K(x) * f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y) f(y) dy , \tag{14}$$

trong đó $K(x) = \dfrac{1}{2\cosh \dfrac{x}{2}}$.

Thấy rằng T là toán tử bị chặn, tự liên hợp với $\|T\| = \pi$.

Bổ đề 4.1: Giả sử $\phi \in H^2(\mathbb{C}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$ và $\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x)$ có thác triển giải tích trên dải $\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \le \pi\}$. Khi đó

$$\mathscr{L}^{-1}\phi(x) = \mathbf{U}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x+i\pi) + \mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x-i\pi)}{2\pi}. \tag{15}$$

Chứng minh:

Trước hết ta chứng minh

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{\cosh x} dx = \frac{-\pi}{\cosh \frac{\pi\xi}{2}}. \tag{16}$$

Thật vậy, vì $\cosh x$ là hàm chẵn nên giả thiết $\xi > 0$. Tập hợp các cực điểm của hàm $\frac{1}{\cosh x}$ là nghiệm của phương trình $\cos(ix) = 0$, là tập: $\left\{\frac{\pi i}{2}, \frac{3\pi i}{2}, \frac{5\pi i}{2}, \ldots\right\}$.

Áp dụng tính chất của thặng dư ta có

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{\cosh x} dx = 2\pi i \left(\frac{e^{i\xi} \cdot \frac{\pi i}{2}}{\sinh \frac{\pi i}{2}} + \frac{e^{i\xi} \cdot \frac{3\pi i}{2}}{\sinh \frac{3\pi i}{2}} + \frac{e^{i\xi} \cdot \frac{5\pi i}{2}}{\sinh \frac{5\pi i}{2}} + \ldots \right) = 2\pi i \left(ie^{-\frac{\pi\xi}{2}} - ie^{-\frac{3\pi\xi}{2}} + ie^{-\frac{5\pi\xi}{2}} - \ldots \right) = \frac{-\pi}{\cosh \frac{\pi\xi}{2}}$$

Thay hình thức ξ bởi 2ξ và x bởi $-\frac{x}{2}$ vào công thức (16) ta có

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{2\cosh \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{\cosh \pi\xi}. \tag{17}$$

Giả sử $f \in L^2(\mathbb{R})$ với $\widehat{f}$ có giá compact. Lấy biến đổi Fourier của tích chập (xem [8]).

$$Tf(x) = K(x) * f(x) = \frac{1}{2\cosh \frac{x}{2}} * f(x)$$

và sử dụng (17) ta có

$$\widehat{Tf}(\xi) = \frac{\pi}{\cosh \pi\xi} \cdot \widehat{f}(\xi) \Rightarrow \widehat{T^{-1}f}(\xi) = \frac{\cosh \pi\xi}{\pi} \cdot \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi}\left(\widehat{\cosh(\pi(-iD))f}\right)(\xi),$$

trong đó $D = \frac{d}{dx}$ là toán tử đạo hàm.

Lấy biến đổi Fourier ngược ta có

$$T^{-1}f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi D).f(x). \tag{18}$$

Từ công thức (13) suy ra

$$\mathscr{L}^{-2} = \mathbf{U}^{-1}.T^{-1}.\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi D).\mathbf{U} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1} = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbf{U}^{-1}.\cos(\pi D).\mathbf{U}\mathscr{L}. \quad (19)$$

Theo giả thiết $\phi \in H^2(\mathbb{C}^+) \bigcap L^2(\mathbb{R}^+)$ nên tồn tại $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^+)$ sao cho $\phi = \mathscr{L}\varphi \Rightarrow \mathbf{U}\mathscr{L}\phi = \mathbf{U}\mathscr{L}^2\varphi$.

Từ (13) và (18) dễ thấy rằng $\mathbf{U}\mathscr{L}\phi$ thuộc miền xác định của $\frac{1}{\pi}\cos(\pi D)$, nghĩa là khi $\phi \in H^2(\mathbb{C}^+) \bigcap L^2(\mathbb{R}^+)$ ta có $\frac{1}{\pi}\cos(\pi D)\mathbf{U}\mathscr{L}\phi \in L^2(\mathbb{R})$.

Công thức (19) là công thức liên hệ trực tiếp giữa phép biến đổi Laplace ngược với toán tử giả vi phân giải tích.

Ký hiệu toán tử tịnh tiến là $E_h g(x) = g(x+h)$ và toán tử đạo hàm là $Dg(x) = g'(x)$. Khi đó áp dụng công thức Taylor ta có

$$E_h g(x) = g(x+h) = g(x) + \frac{g'(x)}{1!} \cdot h + \frac{g''(x)}{2!} \cdot h^2 + ... = \left(1 + \frac{Dh}{1!} + \frac{D^2h^2}{2!} + ...\right) g(x) = e^{hD} g(x).$$

Do đó suy ra

$$\cos(\pi D) g(x) = \frac{e^{i\pi D} + e^{-i\pi D}}{2} \cdot g(z) = \frac{E_{i\pi} + E_{-i\pi}}{2} \cdot g(x).$$

Do đó $\cos(\pi D) g(x) = \frac{g(x+i\pi) + g(x-i\pi)}{2}$, với điều kiện hàm g được xác định trên $\mathbb{R}$ và có thác triển giải tích trên dải $\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| \le \pi\}$.

Theo giả thiết $\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x)$ cũng có thác triển giải tích trên dải $\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| \le \pi\}$ nên

$$\cos(\pi D)\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x) = \frac{\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x+i\pi) + \mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x-i\pi)}{2}. \quad (20)$$

Từ (19) và (20) ta có

$$\mathscr{L}^{-1}\phi(x) = \mathbf{U}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x+i\pi) + \mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x-i\pi)}{2\pi} \text{ (đpcm)}. \quad (21)$$

Ví dụ 4.1: Xét hàm trong không gian $L^2(\mathbb{R}^+)$ xác định bởi

$$\varphi(t) = H(t-2021) - H(t-2022), \quad (22)$$

trong đó $H(t) = \begin{cases} 1, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ là hàm bước đơn vị Heaviside.

Áp dụng tính chất tích phân của biến đổi Laplace ta có

$$\mathscr{L}\phi = \mathscr{L}(\mathscr{L}\varphi) = \mathscr{L}\left(\frac{e^{-2021s} - e^{-2022s}}{s}\right) = \int_x^\infty \mathscr{L}\left(e^{-2021s} - e^{-2022s}\right) dx = \int_x^\infty \left(\frac{1}{x+2021} - \frac{1}{x+2022}\right) dx.$$

Suy ra $\mathscr{L}\phi(x) = \ln(x+2022) - \ln(x+2021)$.

Do đó $\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x) = e^{\frac{x}{2}}\left[\ln(e^x + 2022) - \ln(e^x + 2021)\right]$.

Theo nguyên lý phản xạ Schwartz (xem [16]) trên dải $\sigma = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \operatorname{Im} z \right| \le \pi \right\}$ ta có

$\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x - i\pi) = \mathbf{U}\mathscr{L}\phi\overline{(x + i\pi)} = \overline{\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x + i\pi)}$.

Bởi vậy từ công thức (21) suy ra $\cos(\pi D)\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x + i\pi)\right]$.

Từ đó ta có

$$\frac{1}{\pi}\cos(\pi D)\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{ Ie^{\frac{x}{2}}\left[\ln(2022 - e^x) - \ln(2021 - e^x)\right]\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}e^{\frac{x}{2}}\left[\arg(2022 - e^x) - \arg(2021 - e^x)\right].$$

Suy ra

$$\mathbf{U}^{-1}\frac{1}{\pi}\cos(\pi D)\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(t) = \frac{1}{\pi}\left[\arg(2021 - t) - \arg(2022 - t)\right].$$

Sử dụng $\arg\xi = \begin{cases} 0 & ,\xi > 0 \\ \pi & ,\xi < 0 \end{cases}$ ta có

$$\mathbf{U}^{-1}\frac{1}{\pi}\cos(\pi D)\mathbf{U}\mathscr{L}\phi(t) = H(t - 2021) - H(t - 2022) = \varphi(t).$$

5. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày về toán tử giả vi phân giải tích với ký hiệu là hàm giải tích trên miền Runge trong $\mathbb{C}$ và ứng dụng để đưa ra công thức nghiệm tường minh cho phương trình sai phân $P(\Delta)f(z) = \varphi(z),\ \varphi(z) \in Exp_R(\mathbb{C}_Z)$ và công thức biến đổi Laplace ngược trong không gian Hilbert tách được $L^2(\mathbb{R}^+)$.

LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin trân trọng gửi đến Trường Đại học Giao thông vận tải lời cảm ơn chân thành đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả thực hiện nghiên cứu bài báo này. Đặc biệt tác giả bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc của mình đến Tiến sỹ Nguyễn Sĩ Minh và cố Giáo sư Tiến sỹ Trần Đức Vân nguyên là cán bộ Viện Toán học Việt Nam đã hướng dẫn tác giả nghiên cứu về lý thuyết toán tử giả vi phân với ký hiệu là hàm giải tích trên miền Runge trong $\mathbb{C}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Y. A. Dubinskii, The algebra of pseudo differential operators with analytic symbols and applications to mathematical physics (Russian), Uspekhi Mat. Nauk, 37 (1982) 97-137.

[2]. P. Duren, E. A. Gallardo-Gutierrez, A. Montes-Rodriguez, A. Paley-Wiener theorems for Bergman spaces with application to invariant subspaces, Bull. Lond. Math. Soc., 39 (2007) 459-466. https://doi.org/10.1112/blms/bdm026

[3]. B. Jacob, J. R. Partington, S. Pott, On Laplace-Carleson embedding theorems, J. Funct. Anal, 264 (2013) 783-814. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2012.11.016

[4]. Juha Kinnunen, Partial Differential Equations, 2019.

[5]. J. Mashreghi, Representation Theorems in Hardy Spaces, Cambridge University Press, ISBN 9780521517683, 2019.

[6]. Nguyen Si Minh, Tran Duc Van, Nguyen Sy Anh Tuan, The space of exponential functions associated with a class of differential operator and application, Pro. Of Inter. Conference on Applied analyses and Mechanies of Continuous Media, Ho Chi Minh City (1995) 268-281.

[7]. Nguyễn Sỹ Anh Tuấn, Phép biến đổi Fourier – Cauchy cho các hàm thuộc lớp Holder, Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải, 68 (2019) 17-25.

[8]. Nguyễn Sỹ Anh Tuấn, Phương pháp biến đổi Fourier nhiều chiều trong phương trình đạo hàm riêng, Kỷ yếu Hội thảo về Giảng dạy và Nghiên cứu Khoa học cơ bản, (2020) 41-48.

[9]. Nguyen Sy Anh Tuan, A Remark on Analytic Pseudodifferential Operators with Singularities, Vietnam Journal of Mathematics, 26 (1998) 91-94. http://www.math.ac.vn/publications/vjm/vjm_26/No.1/91-94_Tuan.PDF

[10]. Nguyen Sy Anh Tuan, The Fourier transform to distributions and Solutions of Partial Differential Equations, Transport and Communications Science Journal, 72 (2021) 647-660. https://doi.org/10.47869/tcsj.72.5.11

[11]. P. Agarwal, R.P. Agarwal, M. Ruzhansky, Special Functions and Analysis of Differential Equations, RC Press (2020).

[12]. S. P. Polyakov, Indefitine summation of rational functions with factorization of denominators, Programming and Computer Software, 37 (2011) 322-325. https://doi.org/10.1134/S0361768811060077

[13]. E. M. Stein, R. Shakarchi, Fourier Analysis: An Introduction (Princeton Lectures in Analysis I), Princeton: Princeton University Press, ISBN 0-691-11384-X. (2003)

[14]. Tran Duc Van, On the pseudodifferential operators with real analytic symbol and their applications, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., 36 (1989) 803-825. https://doi.org/10.15083/00039417

[15]. Yaffe, Laurence. G, Chapter 6: Symmetries, Physics 226: Particles and Symmetries. Retrieved 1 January, 2021.

[16]. Y-Q. Song, L Vanka Taramanan, L. Burcaw, Determining the resolution of the Laplace inversion spectrum, Jour. of Chem. Phys, 122 (2005) 104104. https://doi.org/10.1063/1.1858436