



BUCKLING ANALYSIS OF VARIABLE THICKNESS CRACKED NANOPLATES CONSIDERTING THE FLEXOELECTRIC EFFECT

Doan Hong Duc¹, Do Van Thom², Pham Minh Phuc^{3*}

¹School of Transportation Engineering, Hanoi University of Science and Technology, No 1 Dai Co Viet Street, Hanoi, Vietnam

²Faculty of Mechanical Engineering, Le Quy Don Technical University, Hanoi City, Viet Nam

³University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 22/02/2022

Revised: 23/05/2022

Accepted: 08/06/2022

Published online: 15/06/2022

<https://doi.org/10.47869/tcsj.73.5.3>

* *Corresponding author*

Email: phamminhphuc@utc.edu.vn

Abstract. The buckling response calculation of cracked nanoplates has received a lot of attention recently, especially considering the variable thickness plate and flexoelectric effect. The finite element formulations are derived from Mindlin's first-order shear deformation theory, and the crack is simulated using phase-field parameters in accordance with phase-field theory. This is a very adaptable crack structural approach that has a number of benefits over other solutions. The computational theory's dependability is established by comparisons to published findings. On that premise, this study captures the effect of various material and geometrical parameters on the buckling response of a plate with varying thickness according to both linear and nonlinear principles. These are fascinating study findings, which clearly show the simultaneous influence of the flexoelectric effect, the variation law of plate thickness on the critical buckling load as well as the critical buckling mode shape of the structure. Numerical results show that, when cracks appear, the nanoplates become destabilized earlier, but conversely, when the flexoelectric coefficient increases, the plates have greater stiffness and can withstand stronger forces. This study creates a scientific basis to help designers and manufacturers of nanoplates give recommendations to users when cracks appear.

Keywords: Variable thickness, flexo, nanoplates, FEM.



TÍNH TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA TẤM NANO CHIỀU DÀY BIẾN ĐỔI CÓ VẾT NỨT VÀ CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA HIỆU ỨNG FLEXO

Đoàn Hồng Đức¹, Đỗ Văn Thơm², Phạm Minh Phúc^{3*}

¹Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, số 1 Đại Cồ Việt, Hà Nội, Việt Nam

²Học viện kỹ thuật quân sự, số 236 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội, Việt Nam

³Trường Đại học Giao thông Vận tải, số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 22/02/2022

Ngày nhận bài sửa: 23/05/2022

Ngày chấp nhận đăng: 08/06/2022

Ngày xuất bản Online: 15/06/2022

<https://doi.org/10.47869/tcsj.73.5.3>

* Tác giả liên hệ: phamminhphuc@utc.edu.vn

Tóm tắt. Việc tính toán ổn định của tấm nano có vết nứt đã nhận được rất nhiều sự quan tâm trong thời gian gần đây, đặc biệt là xét đến tấm có chiều dày biến đổi và hiệu ứng flexo. Công thức phân tử hữu hạn được thiết lập dựa vào lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Mindlin, vết nứt được mô phỏng dựa trên lý thuyết phase-field thông qua tham số phase-field, đây là cách tiếp cận kết cấu có vết nứt rất linh hoạt và có nhiều ưu điểm so với các phương pháp khác. Độ tin cậy của lý thuyết tính toán được kiểm chứng thông qua các so sánh với các kết quả đã công bố. Trên cơ sở đó, bài báo tiến hành khảo sát ảnh hưởng của một vài tham số vật liệu, hình học đến đáp ứng ổn định của tấm, trong đó chiều dày của tấm biến đổi theo cả quy luật tuyến tính và phi tuyến, đây là các kết quả nghiên cứu thú vị, thể hiện rõ sự ảnh hưởng đồng thời của hiệu ứng flexo, quy luật biến đổi của chiều dày tấm đến tải tới hạn mất ổn định của tấm nano cũng như các dạng mất ổn định của tấm nano. Kết quả số chỉ ra rằng, khi tấm nano xuất hiện vết nứt thì nó nhanh bị mất ổn định hơn, ngược lại khi tăng hệ số flexo thì tấm cứng hơn và chịu lực tốt hơn. Nghiên cứu này tạo cơ sở khoa học giúp các nhà thiết kế, chế tạo tấm nano đưa ra các khuyến cáo sử dụng khi tấm xuất hiện các vết nứt.

Từ khóa: Chiều dày biến đổi, flexo, tấm nano, phương pháp phân tử hữu hạn.

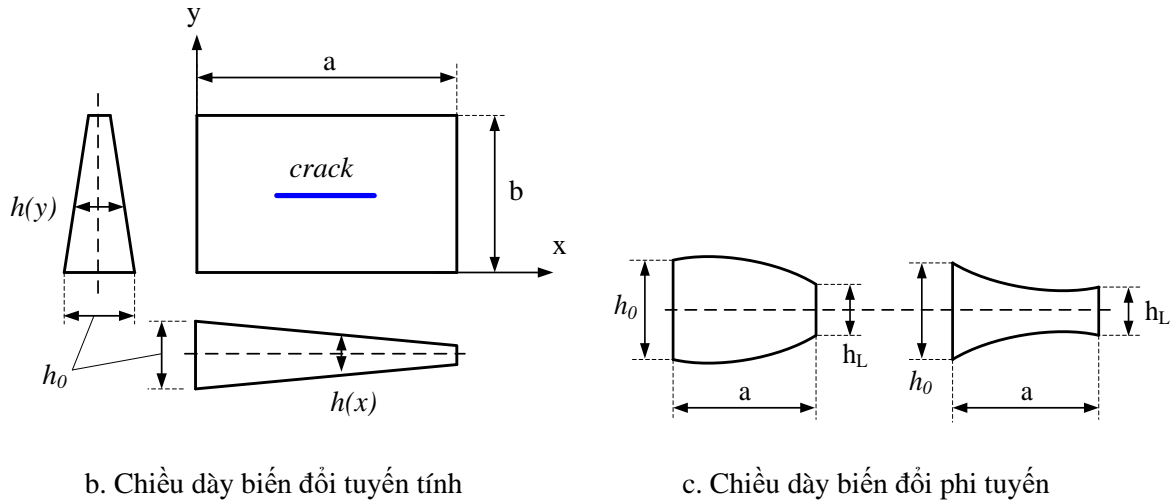
1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ngày nay, các kết cấu tấm kích thước nano ngày càng được sử dụng nhiều trong thực tế, và để nâng cao hiệu quả sử dụng của các kết cấu kích thước nano, người ta còn xem xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexo, đây là hiệu ứng kết hợp giữa hiện tượng áp điện với sự phân cực điện tích do ảnh hưởng của sự biến thiên của các thành phần biến dạng. Chính vì vậy, cũng đã có nhiều công trình khoa học nghiên cứu ứng xử cơ học của các kết cấu này. Zhang và nhóm nghiên cứu của mình [1] đã nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng flexo đến đáp ứng đàn hồi-điện và dao động tự do của tấm nano dựa trên lý thuyết biến dạng tấm cổ điển và phương pháp Ritz. Yang và các cộng sự [2] cũng sử dụng lý thuyết tấm cổ điển để đưa ra lời giải chính xác đối với bài toán đáp ứng cơ học của tấm nano có xét đến hiệu ứng flexo. Shingare và Kundalwal [3] đã nghiên cứu ứng xử của tấm nano có gia cường bởi graphene và xét đến hiệu ứng flexo, các tác giả cũng xuất phát từ lý thuyết tấm cổ điển để dẫn ra lời giải của nghiên cứu này. Amir và đồng nghiệp [4] sử dụng lời giải Navier để đưa ra nghiên cứu về tấm nhiều lớp dạng sandwich, trong đó có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexo. Ghobadi cùng nhóm cộng sự [5] đã trình bày nghiên cứu về ứng xử cơ học phi tuyến của tấm nano có cơ tính biến đổi và kể đến hiệu ứng flexo. Arani và nhóm cộng tác [6] đã sử dụng phương pháp cầu phương vi phân để đưa ra lời giải đối với bài toán đáp ứng cơ học của tấm nano dạng vành khăn có thêm hiệu ứng flexo. Yue [7] đã nghiên cứu hiệu ứng bề mặt của các điện cực của tấm nano có tính thêm hiệu ứng flexo. Wang và Xian-Fang [8] đã dựa trên lý thuyết tấm cổ điển và lời giải dạng giải tích để phân tích ảnh hưởng của cả hiệu ứng tĩnh và động flexo đến đáp ứng của tấm nano. Các công trình [9-16, 33-34] cũng thể hiện rõ các đáp ứng cơ học của tấm nano chịu nhiều loại tải trọng cơ, nhiệt, điện và có xem xét ảnh hưởng của hiệu ứng flexo.

Trong thực tế có thể xuất hiện các kết cấu có chiều dày biến đổi, sử dụng trong các thiết bị như cảm biến, máy phát điện nano.... Tuy nhiên việc chế tạo có thể xuất hiện các vết nứt, làm thay đổi đáp ứng cơ học của tấm, nên các kết quả nghiên cứu của bài báo có thể làm cơ sở so sánh, kiểm chứng với các phương pháp thực nghiệm để đánh giá tấm có xuất hiện vết nứt hay chưa, và khi xuất hiện vết nứt, thì với chiều dài như nào thì vẫn còn có thể sử dụng được nếu tấm chịu lực nén trong mặt phẳng của tấm. Và đây là cũng là nghiên cứu tiền đề để tiếp tục các nghiên cứu khác để dự đoán sự phát triển của vết nứt trong quá trình chịu tải. Để mô phỏng vết nứt, có nhiều phương pháp được sử dụng, như phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng, phương pháp đẳng tham số, phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp lý thuyết phase-field, phương pháp đẳng hình học,.... Trong đó phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp lý thuyết phase-field là phương pháp tiếp cận mới và có nhiều ưu điểm, như tính linh hoạt cao, có thể mô tả được vết nứt với hình dạng phức tạp. Việc sử dụng phương pháp này để giải các bài toán cơ học đã được trình bày trong các công trình [19-28], các công trình này cũng thể hiện rõ ưu điểm của lý thuyết phase-field và khả năng ứng dụng của lý thuyết này đối với các bài toán tấm, vỏ có vết nứt.

2. CÔNG THỨC PHẦN TỬ HỮU HẠN TÍNH TOÁN TẤM NANO CÓ CHIỀU DÀY BIẾN ĐỔI VÀ CÓ VẾT NỨT VÀ CÓ KỂ ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA HIỆU ỨNG FLEXO

Xét tấm nano có chiều dày biến đổi và có vết nứt như trên hình 1, tấm có chiều dài và chiều rộng là a và b , tấm có chiều dày biến đổi tuyến tính và phi tuyến, trong đó chiều dày tấm tại gốc tọa độ là h_0 .



Hình 1. Mô hình tấm có vết nứt và chiều dày biến đổi.

Bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Mindlin, các thành phần chuyển vị được viết ở dạng sau:

$$u_x = u_0 + z\beta_x; u_y = v_0 + z\beta_y; u_z = w_0 \quad (1)$$

trong đó u_0 , v_0 , và w_0 là các thành phần chuyển vị dọc theo các trục x , y , z trong mặt phẳng trung bình của tấm, và β_x , β_y là các góc xoay quanh các trục y và x .

Tấm được chia thành các phần tử hữu hạn 3 điểm nút, mỗi nút có 5 bậc tự do chuyển vị cơ và một thành phần là biến phase-field s . Các thành phần này được nội suy theo phương pháp phần tử hữu hạn như sau

$$u_0 = \sum_{i=1}^n N_i u_{0i}; v_0 = \sum_{i=1}^n N_i v_{0i}; \beta_x = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}; \beta_y = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}; s = \sum_{i=1}^n N_i^s s_i = N^s s \quad (2)$$

trong đó $n = 3$ là số nút của phần tử, N_i , N_i^s là các hàm nội suy tương ứng với các thành phần chuyển vị cơ và biến phase-field.

Trường biến dạng uốn của tấm

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x + z \partial \beta_x / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y + z \partial \beta_y / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x + z (\partial \beta_x / \partial y + \partial \beta_y / \partial x) \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{B}_0 \mathbf{d}_e + z \mathbf{B}_1 \mathbf{d}_e \quad (3)$$

trong đó $\mathbf{d}_e = \{u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y\}^T$ là véc tơ chuyển vị nút phần tử, và các ma trận vi phân hàm dạng

$$\mathbf{B}_0 = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_1 = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Trường biến dạng cắt của tấm:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_s \mathbf{d}_e; \quad \mathbf{B}_s = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Giả thiết điện trường chỉ tác dụng theo phương chiều dày của tấm, bỏ qua điện trường trong mặt phẳng xy. Do vậy, sự biến thiên của biến dạng lúc này có dạng:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{Bmatrix} \eta_{xxz} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \eta_{yyz} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_\eta \mathbf{d}_e; \quad \mathbf{B}_\eta = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Tấm nano có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexo, do vậy ứng suất và các thành phần chuyển vị điện tích có thể biểu diễn như sau [2]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k; \quad \chi_{ijm} = -f_{kijm} E_k; \quad P_i = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \kappa_{ij} E_k + f_{ijkl} \eta_{jkl} \quad (7)$$

trong đó σ_{ij} là tensor ứng suất, E_k là điện trường; χ_{ijm} là tensor mô men ứng suất hoặc tensor ứng suất bậc cao; P_i là véc tơ chuyển vị điện; c_{ijkl} , e_{kij} , f_{kijm} , and κ_{ij} là các thành phần liên quan đến vật liệu, áp điện, flexo và hằng số điện môi, được trình bày cụ thể như trong tài liệu [2]. Thành phần thứ ba trong biểu thức của P_i ($f_{ijkl} \eta_{jkl}$) thể hiện sự phân cực điện tích do ảnh hưởng của hiệu ứng flexo [2].

Biểu thức (7) được viết cụ thể như sau:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - e_{31} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} E_z = \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{E}_{3z}; \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{66} & 0 \\ 0 & c_{66} \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F}_\tau \boldsymbol{\gamma} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_{xxz} \\ \chi_{yyz} \end{Bmatrix} = -f_{14} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} E_z; \quad P_z = e_{31} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \kappa_{33} E_z + f_{14} (\eta_{xxz} + \eta_{yyz}) \quad (9)$$

trong đó $f_{14} = f_{3113}$, $f_{14} = f_{3223}$ [17] và

$$\mathbf{F}_\sigma = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}; \mathbf{E}_{3z} = e_{31} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} E_z; \mathbf{F}_\tau = \begin{bmatrix} c_{66} & 0 \\ 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (10)$$

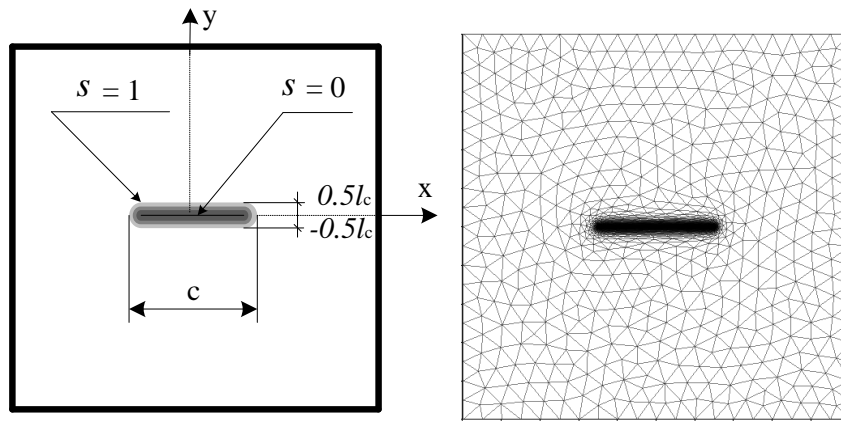
Theo định luật Gauss trong tĩnh điện, thành phần chuyển vị điện tích được tính thông qua quan hệ sau $\partial P_z / \partial z = 0$

Trong điều kiện mạch hở, biểu thức điện trường được biểu diễn như sau

$$E_z = -\frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \left\{ (\varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0y}) + z(\varepsilon_{1x} + \varepsilon_{1y}) \right\} - \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} (\eta_{xxz} + \eta_{yyz}) \quad (11)$$

Hoặc viết ở dạng cụ thể như sau $E_z = -\frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \left\{ \mathbf{B}_{0,xy} \mathbf{d}_e + z \mathbf{B}_{1,xy} \mathbf{d}_e \right\} - \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \mathbf{B}_{1,xy} \mathbf{d}_e$ (12)

trong đó $\mathbf{B}_{0,xy} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{1,xy} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$ (13)



Hình 2. Mô hình phần tử hữu hạn tấm có vết nứt.

Để mô phỏng vết nứt, bài báo sử dụng lý thuyết phase-field [18-27], trong đó sử dụng biến phase-field s biến đổi trơn liên tục từ 0 đến 1, khi $s = 1$ có nghĩa là vật liệu chưa bị phá hủy, và khi $s = 0$ có nghĩa là vật liệu bị phá hủy hoàn toàn. Khi $0 < s < 1$ thì vật liệu ở trạng thái mềm hóa, tức là nó đang trong quá trình biến đổi ở trạng thái phá hủy ở phạm vi rất nhỏ. Vì vậy, bằng việc sử dụng biến s , vết nứt được mô tả bởi vùng hẹp và liên tục, bề rộng vùng hẹp này được mô tả bởi tham số l_c , và năng lượng của kết cấu sẽ được nhân với biến s^2 để thể hiện sự suy giảm của năng lượng khi vết nứt xuất hiện.

Lúc này, năng lượng của tấm nano có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexo và chịu nén trong mặt phẳng trung bình của tấm có dạng như sau

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \frac{1}{2} \int_{V_e} s^2 \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\chi} + \nabla^T w \boldsymbol{\sigma}_0 \nabla w + \nabla^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\sigma}_0 \nabla \beta z^2 \right) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_e} s^2 \left(\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_0^T z \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^T z \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^T z^2 \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{F}_\tau \boldsymbol{\gamma} \right. \\ &\quad \left. + \nabla^T w \boldsymbol{\sigma}_0 \nabla w + \nabla^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\sigma}_0 \nabla \beta z^2 \right) dV \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_{V_e} s^2 \left(\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \frac{e_{31}^2}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \left\{ (\varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0y}) + z(\varepsilon_{1x} + \varepsilon_{1y}) \right\} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^T z \frac{e_{31}^2}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \left\{ (\varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0y}) + z(\varepsilon_{1x} + \varepsilon_{1y}) \right\} \right) dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_{V_e} s^2 \left(\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \frac{f_{14}e_{31}}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} (\varepsilon_{1x} + \varepsilon_{1y}) + \boldsymbol{\varepsilon}_1^T z \frac{f_{14}e_{31}}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} (\varepsilon_{1x} + \varepsilon_{1y}) \right) dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_{V_e} s^2 \left(\boldsymbol{\eta}^T \frac{f_{14}e_{31}}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\varepsilon_{0x} + \varepsilon_{0y}) + \boldsymbol{\eta}^T z \frac{f_{14}e_{31}}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\varepsilon_{1x} + \varepsilon_{1y}) \right) dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_{V_e} s^2 \left(\boldsymbol{\eta}^T \frac{f_{14}^2}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\varepsilon_{1x} + \varepsilon_{1y}) \right) dV + \int_{\Omega_e} G_C \left[\frac{(1-s)^2}{4l_c} + l_c |\nabla s|^2 \right] dz d\Omega
 \end{aligned}$$

trong đó $\boldsymbol{\sigma}_0 = [\sigma_0, \tau_0; \tau_0, \sigma_0]$ là lực nén tác dụng trong mặt phẳng trung bình của tấm, G_C là hệ số giải phóng năng lượng tới hạn, được chỉ ra theo lý thuyết Griffith, và $\nabla w = \mathbf{B}_w \mathbf{d}$; $\nabla \beta = \mathbf{B}_\beta \mathbf{d}$

với

$$\mathbf{B}_w = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i^w}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i^w}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_\beta = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Viết lại biểu thức (14) theo chuyển vị nút phần tử, ta thu được

$$\begin{aligned}
 \Pi_e & = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left\{ \int_{V_e} s^2 \left(\mathbf{B}_0^T \mathbf{F}_\sigma \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^T z \mathbf{F}_\sigma \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_0^T z^3 \mathbf{F}_\sigma \mathbf{D}_3 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \mathbf{B}_1^T z \mathbf{F}_\sigma \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1^T z^2 \mathbf{F}_\sigma \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_s^T \mathbf{F}_\tau \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_w^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{B}_w + \mathbf{B}_\beta^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{B}_\beta \right) dV \right\} \mathbf{d}_e \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left\{ \int_{V_e} s^2 \left(\mathbf{B}_0^T \frac{e_{31}^2}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{B}_{0,xy} + \mathbf{B}_0^T z \frac{e_{31}^2}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{B}_{1,xy} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \mathbf{B}_1^T z \frac{e_{31}^2}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{B}_{0,xy} + \mathbf{B}_1^T z^2 \frac{e_{31}^2}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{B}_{1,xy} \right) dV \right\} \mathbf{d}_e \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left\{ \int_{V_e} s^2 \left(\mathbf{B}_0^T \frac{f_{14}e_{31}}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{B}_{1,xy} + \mathbf{B}_1^T z \frac{f_{14}e_{31}}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{B}_{1,xy} \right) dV \right\} \mathbf{d}_e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left\{ \int_{V_e} s^2 \left(\begin{array}{l} \mathbf{B}_\eta^T \frac{f_{14} e_{31}}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathbf{B}_{0,xy} + \mathbf{B}_\eta^T z \frac{f_{14} e_{31}}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathbf{D}_{1,xy} \\ \mathbf{B}_\eta^T \frac{f_{14}^2}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathbf{B}_{1,xy} \end{array} \right) dV \right\} \mathbf{d}_e + \int_{\Omega_e} G_C \left[\frac{(1-s)^2}{4l_c} + l_c |\nabla s|^2 \right] dz d\Omega \\
 & = \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left\{ \int_{V_e} s^2 \Psi(\mathbf{d}) dV \right\} \mathbf{d}_e + \int_{V_e} G_C \left[\frac{(1-s)^2}{4l_c} + l_c |\nabla s|^2 \right] dz dV \right\} \quad (16)
 \end{aligned}$$

Để tìm phương trình cân bằng của phần tử, ta tiến hành lấy vi phân của hàm $\Pi_e(\mathbf{d}_e, s)$ như sau

$$\begin{cases} \delta \Pi_e(\mathbf{d}_e, s, \delta \mathbf{d}_e) = 0 \\ \delta \Pi_e(\mathbf{d}_e, s, \delta s) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Và viết ở dạng ma trận:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{s}_e^T \left\{ 2 \mathbf{N}_s^T \Psi(\mathbf{d}) \mathbf{N}_s dz \right\} \mathbf{s}_e d\Omega + \int_{\Omega_e} 2G_C \left[\frac{(\mathbf{N}_s \mathbf{s}_e - \mathbf{s}_e^T \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_s \mathbf{s}_e)}{4l_c} + \mathbf{s}_e^T l_c \mathbf{B}_{sp}^T \mathbf{B}_{sp} \right] d\Omega = 0 \quad (18a)$$

$$(\mathbf{K}^e + \lambda_{cr} \mathbf{K}_G^e) \mathbf{d}_e = 0 \quad (18b)$$

trong đó $\nabla s = \mathbf{B}_{sp} \mathbf{s}_e$

Sau khi tập hợp ma trận và khử biên, phương trình cân bằng của toàn bộ kết cấu có dạng:

$$\sum_e \left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{s}_{qe}^T \left\{ 2 \mathbf{N}_s^T \Psi_q(\mathbf{u}) \mathbf{N}_s dz \right\} \mathbf{s}_e d\Omega + \int_{\Omega_e} 2G_C \left[\frac{(\mathbf{N}_s \mathbf{s}_e - \mathbf{s}_{qe}^T \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_s \mathbf{s}_e)}{4l_c} + \mathbf{s}_e^T l_c \mathbf{B}_{sp}^T \mathbf{B}_{sp} \right] d\Omega \right\} = 0 \quad (19a)$$

$$\sum_e \left\{ (\mathbf{K}^e + \lambda_{cr} \mathbf{K}_G^e) \mathbf{d}_e \right\} = 0 \quad (19b)$$

Như vậy rõ ràng ma trận độ cứng của phần tử phụ thuộc vào hệ số f_{14} , do vậy hiệu ứng flexo (thông qua hệ số f_{14}) rõ ràng ảnh hưởng đến khả năng chịu tải của tấm, tức là ảnh hưởng tới khả năng ổn định của tấm. Giải phương trình (19a), ta sẽ thu được biến phase-field s , sau đó thay vào phương trình (19b) ta sẽ thu được tải tới hạn mất ổn định cũng như các dạng mất ổn định tương ứng của tấm nano. Và để tìm được giá trị của biến phase-field s , thì vết nứt cần được thiết lập trước để biết rõ bề rộng và chiều dài vết nứt. Lúc này, biểu thức năng lượng giải phóng qua vết nứt được viết như sau [19-21]

$$G(\mathbf{d}) = B(G_c / 4l_c) \cdot H_s(x) \quad (20)$$

trong đó, $H_s(x)$ nhận giá trị 1 khi $x \leq c$ và $-\frac{l_c}{2} \leq y \leq \frac{l_c}{2}$, còn $H(x) = 0$ trong trường hợp còn lại.

Tham số c là chiều dài vết nứt, B là hằng số, theo công trình [18] thì $B = 1000$. Trong trường hợp tổng quát G_c là hằng số vật liệu, xác định theo [19-21]. Còn bề rộng vết nứt l_c được chọn theo sự khuyến cáo như trong công trình [24], ở đây bài báo chọn giá trị $l_c = a/200$.

3. VÍ DỤ TÍNH TOÁN

3.1. Ví dụ kiểm chứng

Ví dụ 1: Phần này kiểm chứng tải tới hạn mất ổn định của tấm có vết nứt bằng cách so sánh với các kết quả thực nghiệm như trong công trình [29], tấm vuông cạnh 240 mm, chiều dày tấm 12 mm, hệ số Poisson 0,33. Tấm bị nén dọc theo hai cạnh đối diện bị ngàm, hai cạnh còn lại tự do. Kết quả tính toán và so sánh được chỉ ra như trong bảng 1. Người đọc có thể thấy rõ sự sai lệch lớn nhất với kết quả thực nghiệm là 0,559%, điều này chứng tỏ lý thuyết tính toán như bài báo đề xuất đảm bảo độ chính xác cần thiết.

Bảng 1. So sánh tải tới hạn mất ổn định của tấm có vết nứt, $\alpha = 0$.

Tỷ lệ chiều dài vết nứt (c/a)	Số lượng phần tử	Bài báo (N)	Thực nghiệm (N) [29]	% Sai lệch
0.3	3970 (9x9)	1539,57	1531	0,559
	3974 (10x10)	1539,52		0,556
	4042 (12x16)	1539,44		0,551
	4090 (14x14)	1539,26		0,539
	4108 (12x12)	1539,23		0,537

Ví dụ 2: Ví dụ này kiểm chứng tải tới hạn mất ổn định của tấm có chiều dày biến đổi theo phương trục x , và lực nén cũng tác dụng theo phương trục x . Tấm có chiều dài a , rộng b , chiều dày biến đổi theo quy luật $h = h_0(1 + \beta x/a)$ với $\beta = h_a/h_0 - 1$ và $h_0 = a/100$ tại $x = 0$, $h = h_a$ tại $x = a$. Tải tới hạn mất ổn định không thứ nguyên được định nghĩa $\lambda_{cr}^0 = N_0 b^2 / (\pi^2 D_M)$ (với $D_M = E h_M^3 / 12(1 - \nu^2)$ và $h_M = (h_0 + h_a) / 2$). Bảng 2 thể hiện sự so sánh kết quả tải tới hạn mất ổn định được tính bằng lý thuyết bài báo với kết quả đã công bố [30-32]. Dễ dàng thấy các kết quả rất gần nhau, chứng tỏ độ tin cậy của lý thuyết tính toán trong bài báo này là hợp lý.

Bảng 2. So sánh tải tới hạn mất ổn định của tấm có chiều dày biến đổi tuyến tính.

a/b	Lời giải	h_a/h_0				
		1,125	1,25	1,5	1,75	2
1,0	Semianalytical solution [30]	3,970	3,878	3,720	3,560	3,317
	Galerkin form [31]	3,966	3,882	3,638	3,364	3,100
	AEM [32]	3,994	3,902	3,631	3,322	3,019
	Bài báo	3,962	3,878	3,633	3,359	3,094

3.2. Khảo sát số

Tấm nano có vết nứt dài c , tâm vết nứt tại chính giữa tấm và song song với cạnh a của tấm. Tấm có chiều dày biến đổi với các tham số hình học như sau: chiều dài $a = 100$ nm, chiều rộng b có thể thay đổi; vật liệu tấm là PZT-5H có các tham số vật liệu [2]: $c_{11} = 102$ Gpa, $c_{12} = 31$ Gpa, $c_{33} = 35,50$ Gpa, $e_{31} = -17,05$ C/m², $k_{33} = 1,76 \cdot 10^{-8}$ C/(Vm). Tấm có chiều dày biến đổi theo bốn quy luật như sau: Tấm có chiều dày chỉ biến đổi tuyến tính theo trục x : $h = h_0(1 - \beta x/a)$ với $h_0 = a/100$, $h = h_0$ tại $x = 0$. Tấm có chiều dày biến đổi theo cả trục x và y : $h =$

$h_0(1-\beta x/a)(1-\beta y/b)$ với $h_0 = a/100$, $h = h_0$ tại $x=0, y=0$. Tấm có chiều dày biến đổi phi tuyến dạng I: $h = h_0(1-\beta(x/a)^2)$ với $h_0 = a/100$, $h = h_0$ tại $x=0$. Tấm có chiều dày biến đổi phi tuyến dạng II: $h = h_0(\beta(x/a)^2 - 2\beta(x/a) + 1)$ với $h_0 = a/100$, $h = h_0$ tại $x=0$. Tham số khảo sát là tải tới hạn mất ổn định không thứ nguyên được định nghĩa:

$$k_b = \frac{N_0 b^2}{\pi^2 D_M}; D_M = 0.1c_{11}h_0^3 \quad (21)$$

- Ảnh hưởng của hệ số f_{14}

Để thấy rõ ảnh hưởng của hệ số f_{14} đến đáp ứng ổn định tĩnh của tấm, giá trị của hệ số này biến đổi sao cho f_{14}^* nhận giá trị từ 0 đến 4 (giá trị $f_{14} = 0$ tương ứng với bỏ qua hiệu ứng flexo), tấm chịu liên kết tựa đơn tất cả các cạnh, chiều dài vết nứt $c = 0,2a$. Kết quả tính toán tải tới hạn mất ổn định của tấm được cho như trong bảng 3, kết quả chỉ ra rằng hệ số f_{14} càng lớn thì tải tới hạn càng tăng, có nghĩa là hệ số f_{14} làm tăng độ cứng của tấm, điều này có nghĩa rằng hiệu ứng flexo làm tăng khả năng chịu tải của tấm nano. Ngoài ra, dễ thấy rằng tấm chiều dày biến đổi phi tuyến dạng I có khả năng chịu tải trọng nén tốt nhất.

Bảng 3. Sự phụ thuộc của tải tới hạn mất ổn định k_b của tấm nano vào hệ số f_{14}^* , $c = 0,2a$.

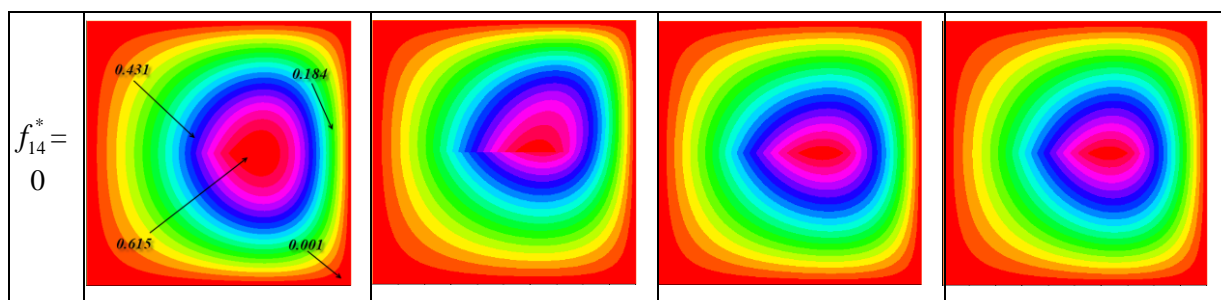
Quy luật biến đổi chiều dày tấm					
β	f_{14}^*	Chiều dày biến đổi tuyến tính theo trục x	Chiều dày biến đổi theo cả trục x và y	Chiều dày biến đổi phi tuyến dạng I	Chiều dày biến đổi phi tuyến dạng II
0,25	0	2,285	1,515	2,669	1,938
	1	11,061	7,567	13,326	9,060
	2	11,865	8,161	14,284	9,737
	3	12,651	8,824	15,146	10,453
	4	13,650	9,689	16,224	11,375
	5	14,897	10,776	17,563	12,531
0,5	0	1,213	0,468	1,718	0,809
	1	7,147	3,169	10,851	4,387
	2	7,718	3,519	11,653	4,801
	3	8,366	3,985	12,438	5,328
	4	9,211	4,611	13,435	6,027
	5	10,274	5,403	14,679	6,9119

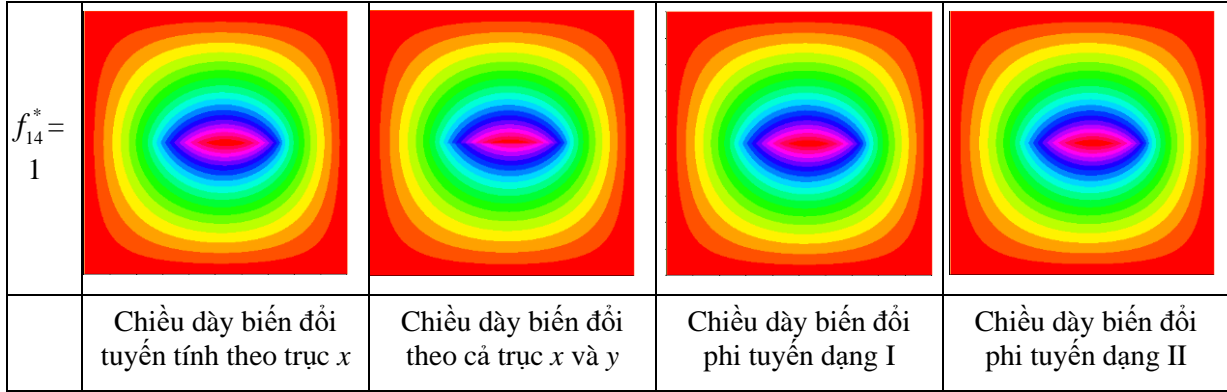
- Khảo sát ảnh hưởng của chiều dài vết nứt

Phần này sẽ xem xét ảnh hưởng của chiều dài vết nứt c đến đáp ứng ổn định tĩnh của tấm nano, tấm tựa đơn tất cả các cạnh, $f_{14}^* = 1$, giá trị của c tăng dần để tỷ số c/a tăng dần từ 0 đến 0,6, $c/a = 0$ có nghĩa là tấm không bị nứt. Kết quả tính toán tải tới hạn được chỉ ra như trong bảng 4, người đọc dễ dàng thấy rằng khi tăng chiều dài vết nứt, tấm trở lên mềm hơn, tấm chịu tải kém hơn, nên tải tới hạn có giá trị nhỏ hơn. Dạng mất ổn định của tấm nano trong trường hợp vết nứt có chiều dài $c/a = 0,5$ được vẽ như trên Hình 3, có thể thấy rằng mặc dù vết nứt xuất hiện, nhưng do ảnh hưởng của flexo nên dạng mất ổn định của tấm không thay đổi nhiều với các dạng biến đổi của chiều dày tấm, nhưng khi bỏ qua ảnh hưởng của flexo thì quy luật biến đổi của chiều dày ảnh hưởng lớn đến dạng mất ổn định của tấm nano.

Bảng 4. Sự phụ thuộc của tải tới hạn mất ổn định k_b của tấm nano phụ thuộc vào c , $f_{14}^* = 1$.

Quy luật biến đổi chiều dày tấm					
β	c/a	Chiều dày biến đổi tuyến tính theo trục x	Chiều dày biến đổi theo cả trục x và y	Chiều dày biến đổi phi tuyến dạng I	Chiều dày biến đổi phi tuyến dạng II
0,25	0	179,610	156,130	190,911	168,269
	0,2	11,061	7,567	13,326	9,060
	0,4	4,698	3,202	5,579	3,916
	0,5	3,639	2,482	4,278	3,069
	0,6	2,997	2,045	3,486	2,558
	0,5	0	147,411	107,922	169,387
0,2		7,147	3,169	10,851	4,387
0,4		3,012	1,340	4,429	1,940
0,5		2,323	1,041	3,342	1,542
0,6		1,900	0,857	2,672	1,301





Hình 3. Dạng mắt ổn định của tấm nano phụ thuộc hệ số f_{14}^* , $\beta = 0,5$, $c/a = 0,5$.

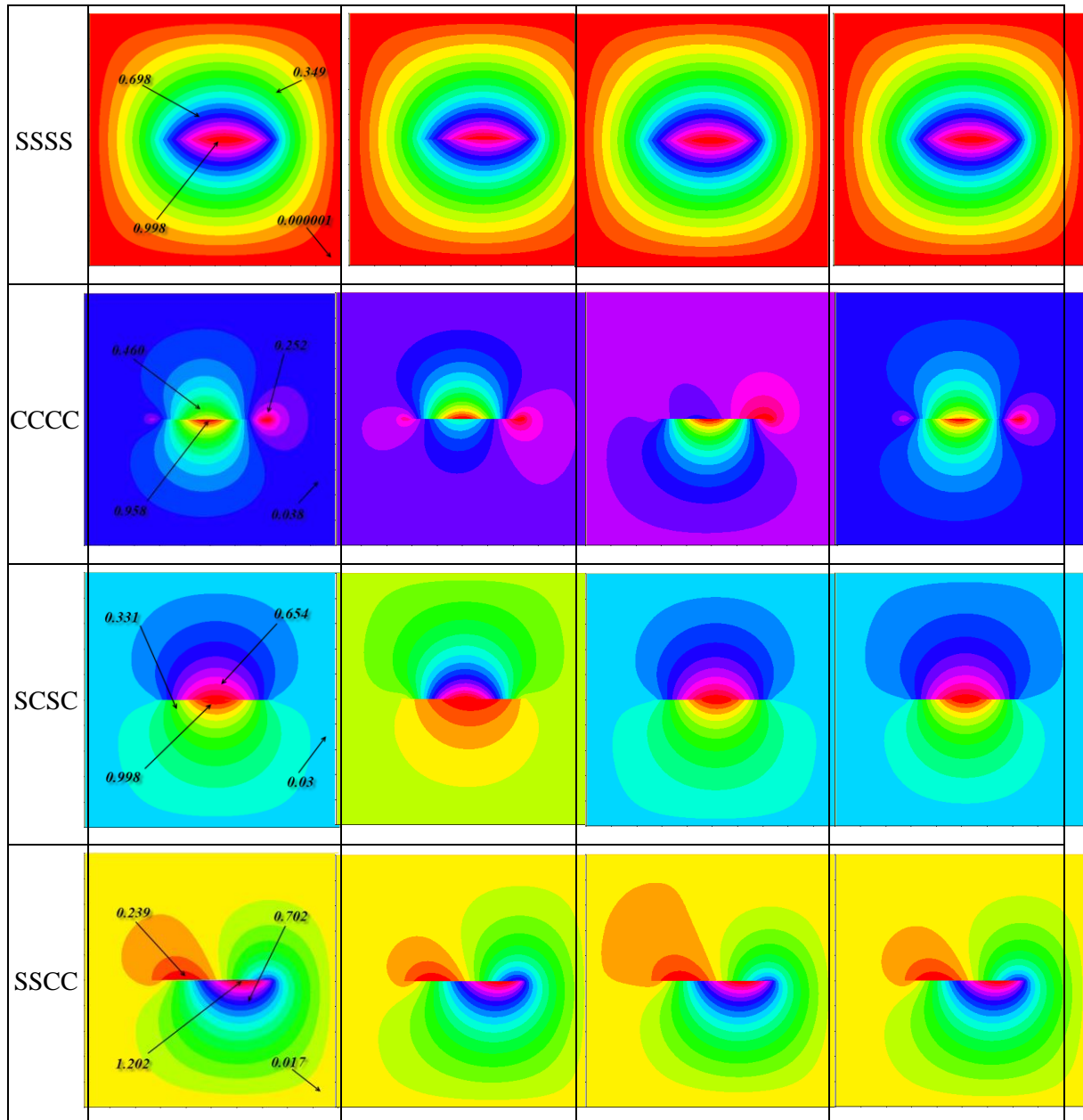
- Khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên

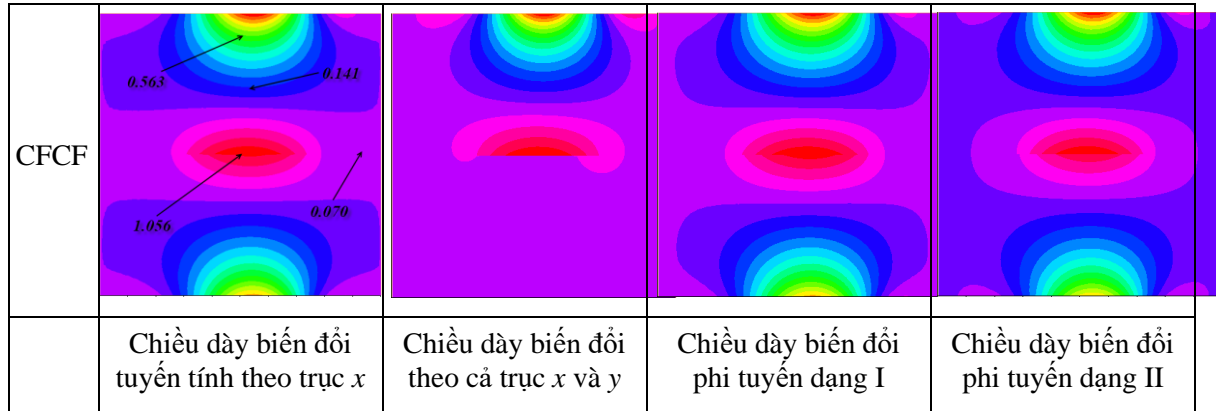
Để thấy rõ sự ảnh hưởng của điều kiện biên đến đáp ứng ổn định tĩnh của tấm, phần này tính toán tấm với năm điều kiện biên khác nhau: tấm tựa đơn bốn cạnh (SSSS), ngàm bốn cạnh (CCCC), hai cạnh đối diện tựa đơn và hai cạnh còn lại ngàm (CSCS), hai cạnh liên tiếp ngàm và hai cạnh còn lại tựa đơn (CCSS), hai cạnh đối diện ngàm và hai cạnh còn lại tự do (CFCF), các kết quả tính toán được thể hiện như trong Bảng 5. Các kết quả tính toán chỉ ra rằng tấm ngàm tất cả các cạnh sẽ có tải tới hạn mất ổn định lớn nhất, tấm chịu liên kết tựa đơn tất cả các cạnh sẽ có tải tới hạn mất ổn định bé nhất, điều này chứng tỏ điều kiện biên có ảnh hưởng đáng kể đến tải tới hạn mất ổn định của tấm. Dạng mắt ổn định của tấm được thể hiện như trong Hình 4, dễ dàng thấy rằng điều kiện biên ảnh hưởng rất lớn đến hình dạng mắt ổn định của tấm nano, tấm SSSS ít thay đổi dạng mắt ổn định khi quy luật biến đổi của chiều dày khác nhau, điều này chứng tỏ quy luật biến đổi chiều dày và điều kiện biên có ảnh hưởng rõ rệt đến dạng mắt ổn định tĩnh của tấm nano khi có kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexo.

Bảng 5. Sự phụ thuộc của tải tới hạn k_b của tấm nano phụ thuộc điều kiện biên, $f_{14}^* = 1$.

β	Điều kiện biên	Quy luật biến đổi chiều dày tấm			
		Chiều dày biến đổi tuyến tính theo trục x	Chiều dày biến đổi theo cả trục x và y	Chiều dày biến đổi phi tuyến dạng I	Chiều dày biến đổi phi tuyến dạng II
0,25	SSSS	3,639	2,482	4,278	3,069
	CCCC	40,640	29,958	45,2468	35,846
	SCSC	23,537	17,843	26,438	20,900
	SSCC	15,246	11,238	17,514	13,186
	CFCF	14,379	8,139	16,433	12,486
0,5	SSSS	2,323	1,041	3,342	1,542
	CCCC	28,710	14,307	38,850	20,284

SCSC	17,165	9,593	21,961	13,282
SSCC	10,018	5,196	13,746	7,029
CFCF	9,521	2,710	12,813	6,821





Hình 4. Dạng mất ổn định của tấm nano phụ thuộc vào điều kiện biên, $\beta = 0,5$, $c/a = 0,5$.

5. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày nghiên cứu về ổn định tĩnh của tấm nano có vết nứt và có tính đến ảnh hưởng của flexo. Các công thức phần tử hữu hạn được xây dựng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và lý thuyết phase-field, chiều dày tấm giả thiết biến đổi theo cả quy luật tuyến tính và phi tuyến. Các kết quả so sánh được thực hiện nhằm kiểm chứng độ tin cậy của lý thuyết tính toán. Trên cơ sở đó, bài báo tiến hành khảo sát ảnh hưởng của một số yếu tố như ảnh hưởng của flexo, chiều dài vết nứt và điều kiện biên đến đáp ứng ổn định tĩnh của tấm nano. Các kết quả tính toán chỉ ra rằng khi tăng hệ số f_{14} thì tấm nano trở lên cứng hơn, và tấm chịu lực tốt hơn. Chiều dài vết nứt càng tăng thì tấm càng trở lên mềm hơn, và khả năng chịu lực của tấm nano sẽ giảm xuống. Điều kiện biên có ảnh hưởng lớn đến cả giá trị tải tới hạn mất ổn định của tấm nano, và ảnh hưởng đến các dạng mất ổn định của tấm. Các kết quả tính toán này là tài liệu tham khảo có giá trị khi thiết kế, chế tạo và sử dụng tấm nano trong thực tế.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi quỹ NAFOSTED mã số 107.02-2020.18.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Z. Zhang, Z. Yan, L. Jiang L, Flexoelectric effect on the electroelastic responses and vibrational behaviors of a piezoelectric nanoplate, Journal of Applied Physics, 116 (2014) 014307. <https://doi.org/10.1063/1.4886315>
- [2] W. Yang, X. Liang, S. Shen, Electromechanical responses of piezoelectric nanoplates with flexoelectricity, Acta Mechanica, 226 (2015) 3097–3110. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1373-8>
- [3] K.B. Shingare, S.I. Kundalwal, Static and dynamic response of graphene nanocomposite plates with flexoelectric effect, Mechanics of Materials, 134 (2019) 69-84. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.04.006>
- [4] S. Amir, H.B.A. Zarei, M. Khorasani, Flexoelectric vibration analysis of nanocomposite sandwich plates, Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal, 48 (2020) 146-163. <https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1624175>
- [5] A. Ghobadi, Y.T. Beni, H. Golestanian, Nonlinear thermo-electromechanical vibration analysis of size-dependent functionally graded flexoelectric nano-plate exposed magnetic field, Archive of Applied Mechanics, 90 (2020) 2025–2070. <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01708-0>

- [6] A.G. Arani, A.H.S. Arani, E. Haghparast, Flexoelectric and surface effects on vibration frequencies of annular nanoplate, *Indian Journal of Physics*, 95 (2021) 2063-2083. <https://doi.org/10.1007/s12648-020-01854-9>
- [7] Y. Yue, Nonlinear Vibration of the Flexoelectric Nanoplate with Surface Elastic Electrodes Under Active Electric Loading, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 33 (2020) 864–878. <https://doi.org/10.1007/s10338-020-00169-w>
- [8] B. Wang, L. Xian-Fang, Flexoelectric effects on the natural frequencies for free vibration of piezoelectric nanoplates, *Journal of Applied Physics*, 129 (2021) 034102. <https://doi.org/10.1063/5.0032343>
- [9] A. Ghobadi, Y.T. Beni, K.K. Zurd, Porosity distribution effect on stress, electric field and nonlinear vibration of functionally graded nanostructures with direct and inverse flexoelectric phenomenon, *Composite Structures*, 259 (2021) 113220. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113220>
- [10] Z. Yan, L.Y. Jiang, Vibration and buckling analysis of a piezoelectric nanoplate considering surface effects and in-plane constraints, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468 (2012) 3458-3475. <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0214>
- [11] A. Reza, G. Raheb, Size-Dependent Nonlinear Vibrations of First-Order Shear Deformable Magneto-Electro-Thermo Elastic Nanoplates Based on the Nonlocal Elasticity Theory, *International Journal of Applied Mechanics*, 08 (2016) 1650053. <https://doi.org/10.1142/S1758825116500538>
- [12] X. Liang, W. Yang, S. Hu, S. Shen, Buckling and vibration of flexoelectric nanofilms subjected to mechanical loads, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 49 (2016) 115307. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/49/11/115307>
- [13] S. Amir, M. Khorasani, H.B. Zarei, Buckling analysis of nanocomposite sandwich plates with piezoelectric face sheets based on flexoelectricity and first-order shear deformation theory, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 22 (2018) 1-24. <https://doi.org/10.1177/1099636218795385>
- [14] F. Ebrahimi, M. Karimiasl, Nonlocal and surface effects on the buckling behavior of flexoelectric sandwich nanobeams, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 25 (2018) 943-952. <https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1329468>
- [15] S. Zeng, B.L. Wang, K. F. Wang, Nonlinear vibration of piezoelectric sandwich nanoplates with functionally graded porous core with consideration of flexoelectric effect, *Composite Structures*, 207 (2019) 340-351. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.09.040>
- [16] K.K. Zur, M. Arefi, J. Kim, J.N. Reddy, Free vibration and buckling analyses of magneto-electro-elastic FGM nanoplates based on nonlocal modified higher-order sinusoidal shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*, 182 (2020) 107601. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.107601>
- [17] L.L. Shu, X.Y. Wei, T. Pang, X. Yao, C.L. Wang, Symmetry of flexoelectric coefficients in crystalline medium. *Journal of Applied Physics*, 110 (2011) 104106. <https://doi.org/10.1063/1.3662196>
- [18] B. Zaouagui, S.A. Belalia, A. Boukhalfa, h-p finite element vibration analysis of side cracked rectangular nano-plates based on nonlocal elasticity theory, *The European Physical Journal Plus*, 134 (2019). <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12724-9>
- [19] K. Josef, A. Marreddy, L.D. Lorenzis, G. Hector, R. Alessandro, Phase-field description of brittle fracture in plates and shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312 (2016) 374-394. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.09.011>
- [20] B. Bourdin, G.A. Francfort, J.J. Marigo, The variational approach to fracture, *Journal of Elasticity*, 91 (2008) 5–148. <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9107-3>

- [21] J.B. Michael, V.V. Clemens, A.S. Michael, J.R.H. Thomas, M.L. Chad, A phase-field description of dynamic brittle fracture, *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 217-220 (2012) 77–95. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.01.008>
- [22] V.D. Thom, H.D. Duc, N.D. Duc, Q.B. Tinh, Phase-field thermal buckling analysis for cracked functionally graded composite plates considering neutral surface, *Composite Structures*, 182 (2017) 524-548. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.059>
- [23] H.D. Duc, Q.B. Tinh, Thom, Duc, A rate-dependent hybrid phase field model for dynamic crack propagation, *Journal of applied Physics*, 122 (2017) 1-4. <https://doi.org/10.1063/1.4990073>
- [24] H.D. Duc, V.D. Thom, P.M. Phuc, N.D. Duc, Validation simulation for free vibration and buckling of cracked Mindlin plates using phase-field method, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 0 (2018) 1-10. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1430262>
- [25] N.D. Duc, T.D. Truong, V.D. Thom, H.D. Duc, On the Buckling Behavior of Multi-cracked FGM Plates, *Proceeding of the International Conference on Advances in Computational Mechanics, Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2017, Springer, 29-45. https://doi.org/10.1007/978-981-10-7149-2_3
- [26] V.H. Nam, H.D. Duc, M.K. Nguyen, V.D. Thom, T.T. Hong, Phase-field buckling analysis of cracked stiffened functionally graded plates, *Composite Structures*, 217 (2019) 50-59. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.03.014>
- [27] P.M. Phuc, Analysis free vibration of the functionally grade material cracked plates with varying thickness using the Phase-field theory, *Transport and Communications Science Journal*, 70 (2019) 122-131. <https://doi.org/10.25073/tcsj.70.2.35>.
- [28] Pham Minh Phuc, Using phase field and third-order shear deformation theory to study the effect of cracks on free vibration of rectangular plates with varying thickness, *Transport and Communications Science Journal*, 71 (2020) 853-867. <https://doi.org/10.47869/tcsj.71.7.10>
- [29] R. Seifi, K.Y. Nafiseh, Experimental and numerical studies on buckling of cracked thin plates under full and partial compression edge loading, *Thin-Walled Structures*, 19 (2011) 1504-1516. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2011.07.010>
- [30] I.E. Harik, X. Liu, R. Ekamparam, Elastic stability of plates with varying rigidities, *Computers & Structures*, 38 (1991) 161-168. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(91\)90094-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(91)90094-3)
- [31] W.H. Wittrik, C.H. Ellen, Buckling of tapered rectangular plates in compression, *Aeronautical Quarterly*, 13 (1962) 308-326. <https://doi.org/10.1017/S0001925900002547>
- [32] M.S. Nerantzaki, J.T. Katsikadelis, Buckling of plates with variable thickness-an analog equation solution, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 18 (1996) 149-154. [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(96\)00045-8](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(96)00045-8)
- [33] L.M. Thai, D.T. Luat, V.B. Phung, P.V. Minh, D.V. Thom, Finite element modeling of mechanical behaviors of piezoelectric nanoplates with flexoelectric effects, *Archive of Applied Mechanics*, 92 (2022) 163–182. <https://doi.org/10.1007/s00419-021-02048-3>.
- [34] D.H. Doan, A.M. Zenkour, D.V. Thom, Finite element modeling of free vibration of cracked nanoplates with flexoelectric effects, *The European Physical Journal Plus*, 137 (2022) 447. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-02631-9>