



A METHOD FOR IMPROVING ENROLLMENT FORECASTING BASED ON FUZZY TIME SERIES

Nguyen Van Khanh, Nguyen Dinh Binh, Nguyen Bao Trung, Pham Dinh Phong*

University of Transport and Communications, No. 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 15/06/2021

Revised: 29/08/2021

Accepted: 03/09/2021

Published online: 15/10/2021

<https://doi.org/10.47869/tcsj.72.8.10>

* *Corresponding author*

Email: phongpd@utc.edu.vn

Abstract. There are many studies on forecasting models based on fuzzy time series proposed in recent decades. There are many factors affecting the forecasted results that have been studied by many authors such as the techniques of dividing the universe of discourse into sub-intervals, forecasting rules and defuzzification techniques. However, the research results are still limited and do not satisfy users. In this paper, we propose a method to improve the efficiency of the fuzzy time series forecasting model on the basis of combining the swarm optimization algorithm for optimizing the interval length of the universe of discourse and a new efficient defuzzification technique. The proposed forecasting model is applied to forecast the number of students enrolled at the University of Alabama from 1971 to 1992. The experimental results show that the proposed forecasting model is more efficient than the existing models for both first-order and higher-order fuzzy time series forecasting models.

Keywords: forecasting, fuzzy time series, defuzzification, fuzzy logical relationships.



MỘT PHƯƠNG PHÁP NÂNG CAO HIỆU QUẢ DỰ BÁO DỮ LIỆU TUYỂN SINH DỰA TRÊN CHUỖI THỜI GIAN MỜ

Nguyễn Văn Khánh, Nguyễn Đình Bình, Nguyễn Bảo Trung, Phạm Đình Phong*

Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 15/06/2021

Ngày nhận bài sửa: 29/08/2021

Ngày chấp nhận đăng: 03/09/2021

Ngày xuất bản Online: 15/10/2021

<https://doi.org/10.47869/tcsj.72.8.10>

* Tác giả liên hệ

Email: phongpd@utc.edu.vn

Tóm tắt. Trong vài thập kỷ gần đây, nhiều nghiên cứu về mô hình dự báo dựa trên chuỗi thời gian mờ đã được đề xuất. Có nhiều nhân tố ảnh hưởng đến kết quả dự báo đã được nhiều tác giả tập trung nghiên cứu như kỹ thuật chia khoảng tập nền, các luật dự báo và kỹ thuật giải mờ. Tuy nhiên, các kết quả nghiên cứu vẫn còn nhiều hạn chế và chưa làm hài lòng người sử dụng. Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một phương pháp nâng cao hiệu quả của mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ trên cơ sở kết hợp tối ưu các khoảng chia tập nền bằng thuật toán tối ưu bầy đàn và kỹ thuật giải mờ mới hiệu quả. Mô hình dự báo được đề xuất được ứng dụng để dự báo số sinh viên nhập học của Trường Đại học Alabama từ năm 1971 đến năm 1992. Kết quả thực nghiệm cho thấy, mô hình dự báo được đề xuất hiệu quả hơn các mô hình dự báo hiện có đối với cả chuỗi thời gian mờ bậc nhất và chuỗi thời gian mờ bậc cao.

Từ khóa: dự báo, chuỗi thời gian mờ, giải mờ, quan hệ logic mờ.

© 2021 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. GIỚI THIỆU

Dự báo được những sự việc, hiện tượng xảy ra trong tương lai luôn là mong muốn và mơ ước của con người. Nó giúp chúng ta hoạch định và ra quyết định tốt hơn, nâng cao hiệu quả công việc, tiết kiệm công sức, thời gian và chi phí. Do đó, đã có rất nhiều công trình nghiên cứu trong và ngoài nước được đề xuất nhằm nâng cao độ chính xác của kết quả dự báo đối với

các bài toán dự báo trong thực tiễn.

Mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ đã và đang thu hút cộng đồng các nhà khoa học nghiên cứu trong những năm gần đây nhằm khắc phục những nhược điểm của các mô hình dự báo truyền thống (ARMA, ARIMA, MA [1], ...) đối với các mẫu dữ liệu có độ biến thiên lớn, dữ liệu được ghi nhận dưới dạng nhãn ngôn ngữ (như “low”, “medium”, “high”, “very high”, ...) và số mẫu quan sát ít (thường dưới 50 mẫu).

Mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ được Song và Chissom [2] đề xuất năm 1993 và được áp dụng để dự báo số lượng sinh viên nhập học của trường Đại học Alabama [3, 4]. Tuy nhiên, mô hình dự báo của Song và Chissom sử dụng các phép tính kết hợp max-min phức tạp trong xử lý các quan hệ logic mờ và sẽ tốn nhiều thời gian tính toán khi số lượng các quan hệ logic mờ lớn. Nhận thấy nhược điểm này, Chen [5] đã đề xuất phương pháp hiệu quả hơn trong dự báo số lượng sinh viên nhập học bằng việc sử dụng các phép tính số học đơn giản thay vì các phép tính kết hợp max-min phức tạp trong xử lý các quan hệ logic mờ. Mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ bậc cao cũng được Chen đề xuất nhằm nâng cao độ chính xác của kết quả dự báo [6]. Để giải quyết tình trạng lặp lại của các quan hệ logic mờ và phản ánh được tầm quan trọng của thứ tự xuất hiện của chúng, Yu đã gán cho chúng các trọng số theo thứ tự xuất hiện trong nhóm quan hệ logic mờ [7]. Các nghiên cứu trên là cơ sở cho một lĩnh vực nghiên cứu mới với các đề xuất cải tiến cả về phương pháp luận và nghiên cứu ứng dụng.

Về nghiên cứu cải tiến phương pháp luận, các công trình nghiên cứu tập trung vào cải tiến mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ của Chen dựa trên ba yếu tố ảnh hưởng đến độ chính xác của kết quả dự báo. Thứ nhất, việc mờ hóa miền giá trị của chuỗi thời gian sử dụng các tập mờ và ứng với mỗi tập mờ là một khoảng chia tập nền. Thứ hai, việc thiết lập các nhóm quan hệ logic mờ phục vụ cho lập luận mờ. Thứ ba, kỹ thuật giải mờ để tính toán các giá trị dự báo rõ. Với yếu tố thứ nhất, các tác giả áp dụng các thuật toán tối ưu để tối ưu độ dài của các khoảng chia tập nền như thuật toán di truyền [8-11], thuật toán tối ưu bầy đàn [12-17], phân cụm [18, 19], ... Với yếu tố thứ hai, các mô hình chuỗi thời gian mờ bậc cao [6, 9, 11], mô hình chuỗi thời gian mờ đa nhân tố (thường là hai nhân tố) [18] được đề xuất. Với yếu tố thứ ba, một số cải tiến trong kỹ thuật giải mờ được đề xuất. Ví dụ, Chen đã đề xuất kỹ thuật giải mờ với giá trị rõ của giá trị dự báo là trung bình cộng của các điểm giữa của các khoảng chia tương ứng với các tập mờ bên vế phải của nhóm quan hệ logic mờ [5]. Yu gán thêm trọng số theo thứ tự xuất hiện của các tập mờ bên vế phải của các nhóm quan hệ mờ [7], ...

Về nghiên cứu ứng dụng, mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ được ứng dụng giải quyết nhiều bài toán dự báo trong thực tế như bài toán dự báo số sinh viên nhập học (the enrollment forecasting) [3-6, 8, 9, 12, 13, 15-17], dự báo nhiệt độ (temperature forecasting) [10, 11, 18], dự báo chỉ số chứng khoán (stock index forecasting) [7, 10, 11, 14, 18], dự báo nhu cầu du lịch (tourism demand forecasting) [20], dự báo tai nạn xe hơi (car road accident forecasting) [12, 21], ...

Trên cơ sở các phân tích trên, chúng tôi nghiên cứu đề xuất phương pháp nâng cao hiệu quả của mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ trên cơ sở kết hợp tối ưu các khoảng chia tập nền bằng thuật toán tối ưu bầy đàn và kỹ thuật giải mờ mới hiệu quả. Mô hình dự báo được đề xuất được áp dụng vào bài toán dự báo số sinh viên nhập học của Trường Đại học Alabama từ năm 1971 đến năm 1992. Kết quả thực nghiệm đối với bài toán trên cho thấy, mô hình dự báo được đề xuất hiệu quả hơn các mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ hiện có đối với cả chuỗi thời gian mờ bậc nhất và chuỗi thời gian mờ bậc cao.

Ngoài Mục Giới thiệu, phần còn lại của bài báo bao gồm các mục sau: Mục 2 trình bày

một số khái niệm liên quan đến chuỗi thời gian mờ và một số mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ. Mục 3 trình bày mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ được đề xuất và các thực nghiệm so sánh đánh giá. Một số kết luận được trình bày trong Mục 4.

2. MÔ HÌNH DỰ BÁO CHUỖI THỜI GIAN MỜ

2.1. Một số khái niệm cơ bản

Mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ được Song và Chissom giới thiệu năm 1993 [2-4], trong đó các tác giả đã giới thiệu các khái niệm *chuỗi thời gian mờ*, *quan hệ logic mờ*. Trong [5], Chen đã cải tiến mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ của Song và Chissom và giới thiệu khái niệm *nhóm quan hệ logic mờ*. Các khái niệm đó được nhắc lại như dưới đây:

Định nghĩa 1. *Chuỗi thời gian mờ* [2-3]: Cho $Y(t)$ ($t = \dots, 0, 1, 2, \dots$) là một tập con của R^I với t là biến thời gian. $Y(t)$ là tập nền với các tập mờ $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ được xác định trên đó. Nếu $F(t)$ là một chuỗi các tập mờ $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) thì $F(t)$ được gọi là một chuỗi thời gian mờ trên $Y(t)$.

Định nghĩa 2. *Quan hệ logic mờ* [2-3]: Tại các thời điểm t và $t - 1$, nếu tồn tại một quan hệ mờ $R(t - 1, t)$ giữa $F(t - 1)$ và $F(t)$ sao cho $F(t) = F(t - 1) * R(t - 1, t)$, trong đó $*$ là một toán tử thì có thể nói rằng $F(t)$ được suy ra từ $F(t - 1)$. Mỗi quan hệ giữa $F(t)$ và $F(t - 1)$ được định nghĩa bằng ký hiệu: $F(t - 1) \rightarrow F(t)$. Nếu $F(t - 1) = A_i$ và $F(t) = A_j$, quan hệ logic mờ giữa $F(t)$ và $F(t - 1)$ được ký hiệu là $A_i \rightarrow A_j$, trong đó A_i là vế trái (trạng thái hiện thời) và A_j là vế phải (trạng thái kế tiếp) của quan hệ mờ.

Định nghĩa 3. *Quan hệ logic mờ bậc λ* [6]: Cho $F(t)$ là một chuỗi thời gian mờ. Nếu $F(t)$ được suy ra từ $F(t - 1), F(t - 2), \dots, F(t - \lambda)$ và $\lambda > 0$ thì quan hệ logic mờ này được biểu diễn bởi biểu thức $F(t - \lambda), \dots, F(t - 2), F(t - 1) \rightarrow F(t)$ và được gọi là chuỗi thời gian mờ bậc λ (λ -order fuzzy time series).

Như vậy, khi $\lambda = 1$ thì được gọi là chuỗi thời gian mờ bậc nhất và khi $\lambda > 1$ thì được gọi là chuỗi thời gian mờ bậc cao.

Định nghĩa 4. *Nhóm quan hệ logic mờ* [5]: Các quan hệ logic mờ có cùng vế trái có thể được nhóm lại với nhau và chúng được gọi là các nhóm quan hệ logic mờ. Giả sử có các quan hệ logic mờ: $A_i \rightarrow A_{j_1}, A_i \rightarrow A_{j_2}, \dots, A_i \rightarrow A_{j_n}$, chúng có thể được đưa vào một nhóm được ký hiệu là: $A_i \rightarrow A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_n}$. Các quan hệ logic mờ bậc cao cũng được nhóm tương tự. Chẳng hạn, ta có các quan hệ logic mờ bậc cao có cùng vế trái:

$$A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im} \rightarrow A_{k1}$$

...

$$A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im} \rightarrow A_{kn}$$

thì các quan hệ logic mờ bậc cao này được nhóm thành một nhóm quan hệ logic mờ như sau: $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im} \rightarrow A_{k1}, \dots, A_{kp}$.

Chen loại bỏ các tập mờ trùng lặp bên vế phải của nhóm quan hệ logic mờ [5]. Ngược lại, Yu giữ lại các tập mờ lặp lại bên vế phải của nhóm quan hệ logic mờ [7]. Ví dụ, với các quan hệ logic mờ: $A_i \rightarrow A_k, A_i \rightarrow A_j, A_i \rightarrow A_k$ thì nhóm quan hệ logic mờ trong mô hình của Chen là $A_i \rightarrow A_k, A_j$ và trong mô hình của Yu là $A_i \rightarrow A_k, A_j, A_k$.

2.2. Mô hình dự báo của Song và Chissom

Mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ lần đầu tiên được Song và Chissom đưa ra vào năm 1993 [2-4] và được ứng dụng để dự báo số sinh viên nhập học tại Trường Đại học Alabama với dữ liệu lịch sử quan sát 22 năm từ năm 1971 đến 1992.

Chuỗi thời gian lần đầu tiên được xem xét dưới góc độ biến ngôn ngữ và bài toán dự báo đã có được một cách nhìn hoàn toàn mới trên quan điểm lý thuyết tập mờ. Mô hình dự báo đầu tiên là mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ dừng [2, 3] và được thực hiện qua các bước:

Bước 1. Xác định tập nền U dựa trên tập dữ liệu lịch sử.

Bước 2. Chia tập nền U thành các khoảng con bằng nhau.

Bước 3. Xây dựng các tập mờ trên tập nền.

Bước 4. Mờ hóa chuỗi dữ liệu lịch sử.

Bước 5. Xây dựng các quan hệ mờ.

Bước 6. Dự báo bằng phương trình $A_i = A_{i-1} * R$, trong đó $*$ là toán tử max-min.

Bước 7. Giải mờ các kết quả dự báo.

Trong bước 5, quan hệ mờ R được xác định bằng biểu thức $R_i = A_s^T \times A_q$, với mọi quan hệ logic mờ $A_s \rightarrow A_q$, $R = \bigcup_{i=1}^k R_i$, trong đó \times là toán tử min, T là phép chuyển vị và \bigcup là phép hợp.

2.3. Mô hình dự báo của Chen

Nhận thấy nhược điểm của việc sử dụng các toán tử max-min phức tạp trong các quan hệ mờ trong mô hình dự báo của Song và Chissom [2-4], Chen đã cải tiến bằng việc sử dụng các nhóm quan hệ logic mờ và các toán tử số học đơn giản. Mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ của Chen được mô tả ngắn gọn như sau [5]:

Bước 1. Phân hoạch tập nền chuỗi thời gian U thành các khoảng bằng nhau u_1, u_2, \dots, u_p .

Bước 2. Định nghĩa các tập mờ trên U .

Bước 3. Mờ hóa tập nền U .

Bước 4. Thiết lập các quan hệ logic mờ và các nhóm quan hệ logic mờ.

Bước 5. Dự báo và giải mờ dữ liệu đầu ra thành các giá trị rõ. Trong bước này, các luật dự báo và giải mờ được định nghĩa như sau:

Luật 1. Nếu có nhóm quan hệ logic mờ $A_i \rightarrow A_j$ và giá trị lớn nhất của hàm thuộc của A_j rơi vào u_j và điểm giữa của u_j là m_j , giá trị dự báo tại thời gian j là m_j .

Luật 2. Nếu có nhóm quan hệ logic mờ $A_i \rightarrow A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jk}$ thì ta có giá trị dự báo mờ là $A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jk}$. Nếu $m_{j1}, m_{j2}, \dots, m_{jk}$ tương ứng là điểm giữa của các khoảng $u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{jk}$, giá trị dự báo rõ tại thời điểm dự báo, giả sử là thời điểm t , được tính toán theo công thức sau:

$$CFV_t = \frac{m_{j1} + m_{j2} + \dots + m_{jk}}{k} \quad (1)$$

Luật 3. Nếu $A_i \rightarrow \emptyset$, giá trị dự báo mờ là A_i và giá trị dự báo rõ m_i chính điểm giữa của khoảng u_i .

2.4. Mô hình dự báo của Yu

Trong mô hình dự báo chuỗi thời gian của Yu [7], các tập mờ có thể được lặp lại ở vế phải của nhóm quan hệ logic mờ. Do đó, để giải quyết vấn đề lặp lại của các tập mờ và phản ảnh tầm quan trọng của chúng, các tập mờ ở vế phải của các nhóm quan hệ logic mờ được gán các trọng số theo thứ tự xuất hiện. Trong dự báo và giải mờ, luật thứ hai trong Bước 5 trong mô hình dự báo của Chen có sự thay đổi như sau: nếu có nhóm quan hệ logic mờ $A_i \rightarrow A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jk}$ và $m_{j1}, m_{j2}, \dots, m_{jk}$ tương ứng là điểm giữa của các khoảng $u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{jk}$ thì giá trị dự báo rõ của thời điểm dự báo, giả sử là thời điểm t , được tính toán theo công thức sau:

$$CFV_t = \frac{1 \times m_{j1} + 2 \times m_{j2} + \dots + k \times m_{jk}}{1 + 2 + \dots + k}. \quad (2)$$

3. MÔ HÌNH DỰ BÁO CHUỖI THỜI GIAN MỜ ĐƯỢC ĐỀ XUẤT

3.1. Mô hình dự báo được đề xuất

Tiểu mục này trình bày mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ được đề xuất trong bài báo này. Mô hình này là một cải tiến của mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ của Yu [7] với điểm khác là mô hình dự báo mới kết hợp tối ưu các khoảng chia tập nền bằng thuật toán tối ưu bày đàn và kỹ thuật giải mờ mới hiệu quả (công thức (3)) nhằm nâng cao độ chính xác của kết quả dự báo.

Bước 1: Xác định tập nền U bằng cách lấy giá trị lớn nhất d_{max} và nhỏ nhất d_{min} của chuỗi thời gian và $U = [d_{min} - d_1, d_{max} + d_2]$, trong đó d_1, d_2 là các số dương được sử dụng để điều chỉnh cận trên và cận dưới của U sao cho U có thể bao phủ được các giá trị phát sinh trong quá trình dự báo. Cụ thể, với dữ liệu sinh viên nhập học của Đại học Alabama được quan sát từ năm 1971 đến năm 1992, thì $D_{min} = 13000$ và $D_{max} = 20000$ và do đó $U = [13000, 200000]$. Phân hoạch U thành m khoảng con u_1, u_2, \dots, u_m và tối ưu độ dài của các khoảng con bằng thuật toán tối ưu bày đàn PSO [22, 23].

Bước 2: Xây dựng các tập mờ A_i tương ứng với các khoảng con u_i .

Bước 3: Mờ hóa các giá trị lịch sử của chuỗi thời gian.

Trong bước này, tất cả dữ liệu lịch sử được mờ hóa thành dữ liệu mờ. Giả sử, dữ liệu lịch sử sinh viên nhập học của Đại học Alabama được chia thành 7 khoảng bằng nhau như trong các nghiên cứu của Song và Chissom [2, 3] và Chen [5]. Các khoảng từ 1 đến 7 được gán các nhãn ngôn ngữ tương ứng là A_1, A_2, \dots, A_7 . Dữ liệu được mờ hóa được thể hiện trong Bảng 1.

Bảng 1. Dữ liệu sinh viên nhập học của Đại học Alabama được mờ hóa với 7 khoảng chia.

Năm	Dữ liệu nhập học	Dữ liệu mờ	Năm	Dữ liệu nhập học	Dữ liệu mờ
1971	13055	A_1	1982	15433	A_3
1972	13563	A_1	1983	15497	A_3
1973	13867	A_1	1984	15145	A_3
1974	14696	A_2	1985	15163	A_3

1975	15460	A_3	1986	15984	A_3
1976	15311	A_3	1987	16859	A_4
1977	15603	A_3	1988	18150	A_6
1978	15861	A_3	1989	18970	A_6
1979	16807	A_4	1990	19328	A_7
1980	16919	A_4	1991	19337	A_7
1981	16388	A_4	1992	18876	A_6

Bước 4: Xây dựng các quan hệ logic mờ bậc λ ($\lambda = 1, \dots, 9$) và các nhóm quan hệ logic mờ.

Bảng 2. Các quan hệ logic mờ bậc nhất và bậc 3 trong trường hợp 7 khoảng bằng nhau.

Năm	Dữ liệu nhập học	Dữ liệu mờ	F(t)	Quan hệ logic mờ bậc nhất	Quan hệ logic mờ bậc 3
1971	13055	A_1			
1972	13563	A_1	$F(1971) \rightarrow F(1972)$	$A_1 \rightarrow A_1$	
1973	13867	A_1	$F(1972) \rightarrow F(1973)$	$A_1 \rightarrow A_1$	
1974	14696	A_2	$F(1973) \rightarrow F(1974)$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_1, A_1, A_1 \rightarrow A_2$
1975	15460	A_3	$F(1974) \rightarrow F(1975)$	$A_2 \rightarrow A_3$	$A_1, A_1, A_2 \rightarrow A_3$
1976	15311	A_3	$F(1975) \rightarrow F(1976)$	$A_3 \rightarrow A_3$	$A_1, A_2, A_3 \rightarrow A_3$
1977	15603	A_3	$F(1976) \rightarrow F(1977)$	$A_3 \rightarrow A_3$	$A_2, A_3, A_3 \rightarrow A_3$
1978	15861	A_3	$F(1977) \rightarrow F(1978)$	$A_3 \rightarrow A_3$	$A_3, A_3, A_3 \rightarrow A_3$
1979	16807	A_4	$F(1978) \rightarrow F(1979)$	$A_3 \rightarrow A_4$	$A_3, A_3, A_3 \rightarrow A_4$
1980	16919	A_4	$F(1979) \rightarrow F(1980)$	$A_4 \rightarrow A_4$	$A_3, A_3, A_4 \rightarrow A_4$
1981	16388	A_4	$F(1980) \rightarrow F(1981)$	$A_4 \rightarrow A_4$	$A_3, A_4, A_4 \rightarrow A_4$
1982	15433	A_3	$F(1981) \rightarrow F(1982)$	$A_4 \rightarrow A_3$	$A_4, A_4, A_4 \rightarrow A_3$
1983	15497	A_3	$F(1982) \rightarrow F(1983)$	$A_3 \rightarrow A_3$	$A_4, A_4, A_3 \rightarrow A_3$
1984	15145	A_3	$F(1983) \rightarrow F(1984)$	$A_3 \rightarrow A_3$	$A_4, A_3, A_3 \rightarrow A_3$
1985	15163	A_3	$F(1984) \rightarrow F(1985)$	$A_3 \rightarrow A_3$	$A_3, A_3, A_3 \rightarrow A_3$
1986	15984	A_3	$F(1985) \rightarrow F(1986)$	$A_3 \rightarrow A_3$	$A_3, A_3, A_3 \rightarrow A_3$
1987	16859	A_4	$F(1986) \rightarrow F(1987)$	$A_3 \rightarrow A_4$	$A_3, A_3, A_3 \rightarrow A_4$
1988	18150	A_6	$F(1987) \rightarrow F(1988)$	$A_4 \rightarrow A_6$	$A_3, A_3, A_4 \rightarrow A_6$
1989	18970	A_6	$F(1988) \rightarrow F(1989)$	$A_6 \rightarrow A_6$	$A_3, A_4, A_6 \rightarrow A_6$
1990	19328	A_7	$F(1989) \rightarrow F(1990)$	$A_6 \rightarrow A_7$	$A_4, A_6, A_6 \rightarrow A_7$

1991	19337	A_7	$F(1990) \rightarrow F(1991)$	$A_7 \rightarrow A_7$	$A_6, A_6, A_7 \rightarrow A_7$
1992	18876	A_6	$F(1991) \rightarrow F(1992)$	$A_7 \rightarrow A_6$	$A_6, A_7, A_7 \rightarrow A_6$

Với dữ liệu về số sinh viên nhập học của Đại học Alabama trong Bảng 1 và số khoảng chia là 7 khoảng bằng nhau thì các quan hệ logic mờ bậc nhất và bậc 3 như trong Bảng 2.

Sau khi các quan hệ logic mờ được sinh và sau đó các nhóm quan hệ logic mờ được sinh bằng cách nhóm các quan hệ logic mờ có cùng vế trái theo quy tắc như Định nghĩa 4. Vế phải của tất cả các nhóm quan hệ logic mờ được sinh dựa trên dữ liệu số sinh viên nhập học của Đại học Alabama trong trường hợp tập nền được chia thành 7 khoảng bằng nhau được thể hiện trong Bảng 3. Có thể thấy rằng, các tập mờ bên vế phải của nhóm quan hệ logic mờ được phép lặp lại như trong mô hình dự báo của Yu [7].

Bảng 3. Nhóm quan hệ logic mờ bậc nhất của dữ liệu tuyển sinh của trường Đại học Alabama trong trường hợp 7 khoảng bằng nhau.

Năm	Dữ liệu nhập học	Dữ liệu mờ	Nhóm quan hệ logic mờ
1971	13055	A_1	
1972	13563	A_1	A_1, A_1, A_2
1973	13867	A_1	A_1, A_1, A_2
1974	14696	A_2	A_1, A_1, A_2
1975	15460	A_3	A_3
1976	15311	A_3	$A_3, A_3, A_3, A_4, A_3, A_3, A_3, A_3, A_4$
1977	15603	A_3	$A_3, A_3, A_3, A_4, A_3, A_3, A_3, A_3, A_4$
1978	15861	A_3	$A_3, A_3, A_3, A_4, A_3, A_3, A_3, A_3, A_4$
1979	16807	A_4	$A_3, A_3, A_3, A_4, A_3, A_3, A_3, A_3, A_4$
1980	16919	A_4	A_4, A_4, A_3, A_6
1981	16388	A_4	A_4, A_4, A_3, A_6
1982	15433	A_3	A_4, A_4, A_3, A_6
1983	15497	A_3	$A_3, A_3, A_3, A_4, A_3, A_3, A_3, A_3, A_4$
1984	15145	A_3	$A_3, A_3, A_3, A_4, A_3, A_3, A_3, A_3, A_4$
1985	15163	A_3	$A_3, A_3, A_3, A_4, A_3, A_3, A_3, A_3, A_4$
1986	15984	A_3	$A_3, A_3, A_3, A_4, A_3, A_3, A_3, A_3, A_4$
1987	16859	A_4	$A_3, A_3, A_3, A_4, A_3, A_3, A_3, A_3, A_4$
1988	18150	A_6	A_4, A_4, A_3, A_6
1989	18970	A_6	A_6, A_7
1990	19328	A_7	A_6, A_7

1991	19337	A_7	A_7, A_6
1992	18876	A_6	A_7, A_6

Bước 5: Xây dựng các luật dự báo chuỗi thời gian mờ và giải mờ để thu được các giá trị rõ như sau:

Luật 1: Nếu xuất hiện nhóm quan hệ logic mờ có dạng $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{i\lambda} \rightarrow A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jk}$ ($\lambda, k \geq 1$) thì giá trị dự báo mờ là $A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jk}$. Mỗi khoảng u_{jl} ($1 \leq l \leq k$) được chia thành p khoảng con bằng nhau và $subm_{jl}$ là điểm giữa của một trong p khoảng con đó mà dữ liệu thực của năm có độ thuộc vào tập mờ A_{jl} là lớn nhất rơi vào khoảng con đó. Trong thực nghiệm, chúng tôi chọn $p = 4$ giống như trong [16]. Giá trị dự báo rõ của năm dự báo, giả sử là năm t , được tính toán theo công thức dưới đây:

$$CFV_t = \frac{1 \times subm_{j1} + 2 \times subm_{j2} + \dots + k \times subm_{jk}}{1 + 2 + \dots + k}, \quad (3)$$

Ví dụ, trong Bảng 3, giá trị tại dòng 3 và cột 4 là vế phải của nhóm quan hệ logic mờ bậc nhất có ba tập mờ A_1, A_1, A_2 tương ứng với $F(1972), F(1973), F(1974)$. Giá trị thuộc lớn nhất của A_1 xuất hiện tại khoảng $u_1 = [13000, 14000)$. Giả sử u_1 được chia thành 4 khoảng bằng nhau, ta có: $u_{1,1} = [13000, 13250), u_{1,2} = [13250, 13500), u_{1,3} = [13500, 13750), u_{1,4} = [13750, 14000)$. Dữ liệu năm 1972 là 13563, nằm trong khoảng con $u_{1,3} = [13500, 13750)$ và điểm giữa của khoảng con $u_{1,3}$ là $(13500 + 13750) / 2 = 13625$. Dữ liệu của năm 1973 là 13867, nằm trong khoảng con $u_{1,4} = [13750, 14000)$ và điểm giữa của khoảng con $u_{1,4}$ là 13875. Giá trị thuộc lớn nhất của A_2 xuất hiện tại khoảng $u_2 = [14000, 15000)$, do đó, ta có: $u_{2,1} = [14000, 14250), u_{2,2} = [14250, 14500), u_{2,3} = [14500, 14750), u_{2,4} = [14750, 15000)$. Dữ liệu của năm 1974 là 14696, nằm trong khoảng con $u_{2,3} = [14500, 14750)$ và điểm giữa của khoảng con $u_{2,3}$ là 14625. Giá trị dự báo rõ của năm 1973 là: $(1 \times 13625 + 2 \times 13875 + 3 \times 14625) / (1 + 2 + 3) = 14208.33$.

Luật 2: Nếu xuất hiện nhóm quan hệ logic mờ có dạng $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{i\lambda} \rightarrow \emptyset$ thì áp dụng giản đồ bầu cử thông thái của Kuo [13] để tính giá trị dự báo rõ. Giản đồ này cho phép chúng ta nhập trọng số cho giá trị ngôn ngữ quá khứ nhất:

$$CFV_t = \frac{m_{i1} \times w + m_{i2} + \dots + m_{i\lambda}}{w + (\lambda - 1)} \quad (4)$$

trong đó, w là trọng số bầu cử được khai báo trước bởi người dùng, λ là bậc của quan hệ mờ, m_{il} ($1 \leq l \leq \lambda$) là điểm giữa của các khoảng $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{i\lambda}$ tương ứng.

Tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình (mean square error) MSE được sử dụng để đánh giá độ chính xác của các mô hình dự báo và được định nghĩa như sau :

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (F_i - A_i)^2, \quad (5)$$

trong đó, n là số dữ liệu được dự báo, F_i và A_i là tương ứng là dữ liệu dự báo và dữ liệu lịch được sử dụng để huấn luyện tại năm i . Mô hình dự báo nào có giá trị MSE càng nhỏ thì càng tốt hơn.

3.2. Thuật toán tối ưu bầy đàn tối ưu độ dài các khoảng chia

Nghiên cứu của Huang trong [24] đã chỉ ra rằng độ dài các khoảng chia tập nền ảnh hưởng lớn đến độ chính xác của kết quả dự báo. Có thể xác định các khoảng chia bằng các điểm đầu và các điểm cuối của mỗi khoảng. Do đó, cần phải xác định các điểm chia để chúng tạo thành các khoảng tối thiểu hóa hàm sai số dự báo. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng thuật toán tối ưu bầy đàn PSO [22, 23] để tối ưu độ dài của các khoảng chia và hàm MSE (mean square error) được chọn là hàm mục tiêu.

Giả sử số khoảng chia tập nền là n . Khi đó, tập nền $U = [d_0, d_n]$ được chia thành n khoảng với các điểm chia là $d_1, d_2, \dots, d_{n-2}, d_{n-1}$. Các khoảng của tập nền U là: $u_1 = [d_0, d_1]$, $u_2 = [d_1, d_2]$, \dots , $u_n = [d_{n-1}, d_n]$. Mỗi phần tử (particle) trong thuật toán PSO được biểu diễn bởi một véc-tơ $n - 1$ thành phần $X_i = [d_1, d_2, \dots, d_{n-2}, d_{n-1}]$, ứng với các điểm chia. Thuật toán tối ưu sẽ tìm phần tử X_i có giá trị MSE được tính toán là nhỏ nhất.

Thuật toán PSO tối ưu độ dài các khoảng chia tập nền U được mô tả theo các bước như sau:

Bước 1. Khởi tạo thế hệ ban đầu gồm m phần tử, mỗi phần tử được biểu diễn bởi một véc-tơ $X_i^0 = \{d_1, d_2, \dots, d_{n-2}, d_{n-1}\}$ (dùng để xác định các khoảng $K_i^0 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$) và tốc độ V_i^0 của toàn bộ phần tử. Biến lặp $t = 1$.

Bước 2.

while ($t < \text{số thế hệ}$) **do**

Bước 2.1. for each phần tử i **do**

Thực hiện thủ tục dự báo như Mục 3.1.

Tính giá trị MSE theo công thức (5) cho phần tử i .

Cập nhật vị trí tốt nhất P_i^t của phần tử i và vị trí tốt nhất P_g^t của toàn bộ quần thể.

End for

Bước 2.2. for each phần tử i **do**

Tính vận tốc V_i^t theo công thức:

$$V_i^{t+1} = \omega V_i^t + c1 \times r1 \times (P_i^t - X_i^t) + c2 \times r2 \times (P_g^t - X_i^t) \quad (6)$$

trong đó, ω là hệ số quán tính (Inertia), $c1$ là hệ số tự nhận thức và $c2$ là hệ số nhận thức xã hội, $r1$ và $r2$ là hai số ngẫu nhiên phân bố đều trong khoảng $[0, 1]$.

Cập nhật vị trí $X_i^t = \{d_1, d_2, \dots, d_{n-2}, d_{n-1}\}$ cho các các phần tử theo công thức:

$$X_i^{t+1} = X_i^t + V_i^{t+1}, \quad (7)$$

Sắp xếp lại các thành phần của X_i^{t+1} .

End for

Bước 2.3. Lưu lại véc-tơ X_i chứa các khoảng chia có giá trị *MSE* nhỏ nhất trong tất cả các phần tử.

Tăng biến lặp $t = t + 1$

End while

3.3. Kết quả thực nghiệm và thảo luận

Tiêu mục này trình bày các kết quả thực nghiệm của mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ được đề xuất được ứng dụng để giải bài toán dự báo số sinh viên nhập học của Đại học Alabama và đánh giá tính hiệu quả so với các mô hình dự báo đã được đề xuất.

Trong bước đầu tiên của mô hình được đề xuất có sử dụng thuật toán tối ưu bầy đàn PSO [22, 23] để tối ưu độ dài các khoảng chia tập nền của dữ liệu lịch sử thông qua việc tối thiểu hóa hàm mục tiêu *MSE* (công thức (5)). Chúng tôi đánh giá tính đa dạng của quần thể trong PSO là rất quan trọng. Vì vậy, trong các thực nghiệm, số phần tử (particle) mỗi thế hệ là 300, số thế hệ là 1000, hệ số quán tính (Inertia) là 0.4, hệ số tự nhận thức $c1$ và hệ số nhận thức xã hội $c2$ đều được chọn là 2.

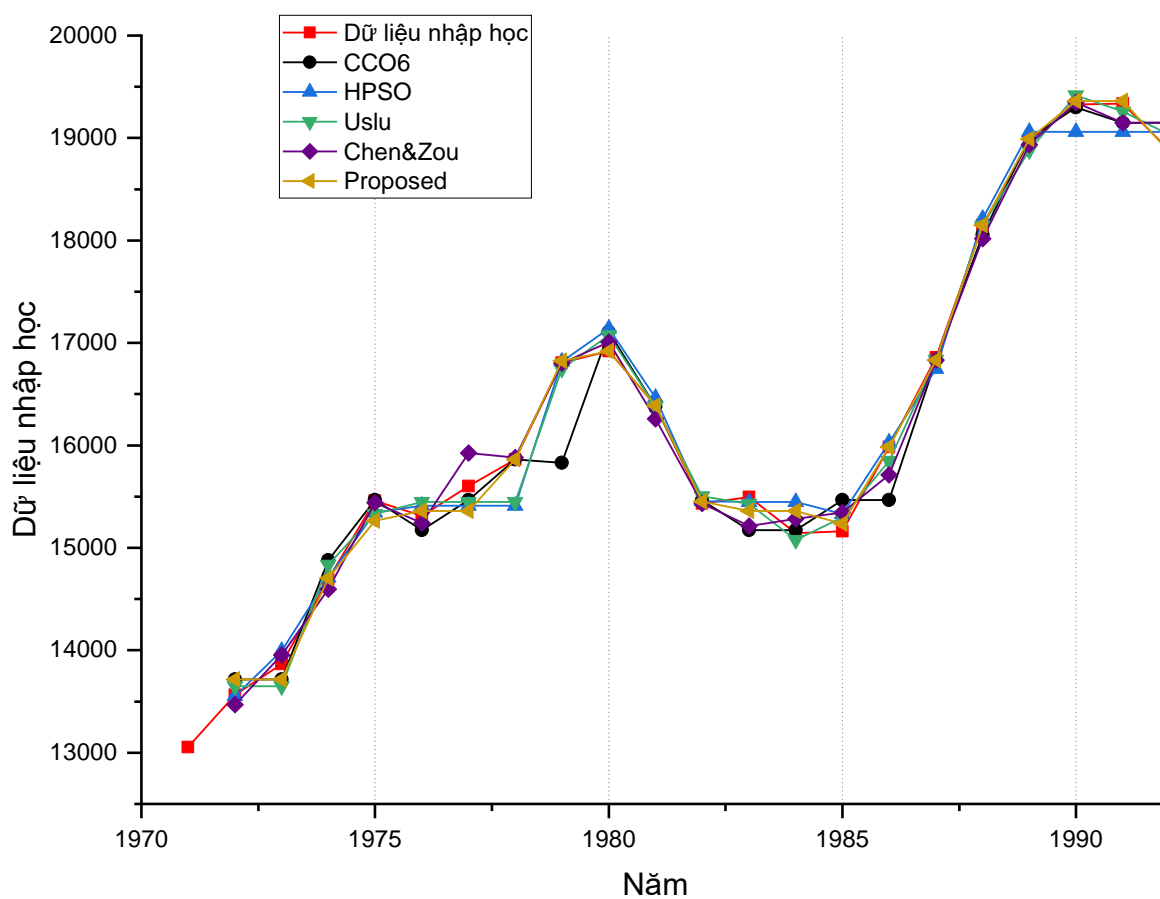
Các thực nghiệm được cài đặt bằng ngôn ngữ C# và được chạy trên máy Intel Core i5-8250U, 1.60GHz CPU, 8GB RAM và hệ điều hành Microsoft Windows 10 64-bit. Mỗi kết quả dự báo của mô hình là giá trị *MSE* thấp nhất được chọn trong số 10 giá trị *MSE* thu được sau 10 lần chạy.

Trước tiên, nhằm đánh giá tính hiệu quả của mô hình bậc nhất, các kết quả thực nghiệm của mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ bậc nhất với 14 khoảng chia được so sánh với kết quả thực nghiệm của các mô hình dự báo bậc nhất với cùng số khoảng chia đã được đề xuất như mô hình **CCO6** của Chen và Chung [8] sử dụng thuật toán di truyền, **HPSO** [13] sử dụng thuật toán PSO, **Uslu** [25] sử dụng cách tiếp cận chuỗi thời gian mờ dựa trên trọng số được xác định bởi số lần lặp các quan hệ logic mờ và **Chen&Zou** [12] sử dụng thuật toán tối ưu bầy đàn và giải mờ dựa trên tỷ lệ của khoảng chia. Giá trị *MSE* được sử dụng để so sánh đánh giá tính hiệu quả của các mô hình dự báo.

Bảng 4. Kết quả dự báo của các mô hình khác nhau.

Năm	Số lượng SV	CCO6	HPSO	Uslu	Chen&Zou	Proposed
1971	13055					
1972	13563	13714	13555	13650	13469	13715
1973	13867	13714	13994	13650	13952	13715
1974	14696	14880	14711	14836	14596	14703
1975	15460	15467	15344	15332	15439	15263
1976	15311	15172	15411	15447	15241	15361
1977	15603	15467	15411	15447	15925	15361
1978	15861	15861	15411	15447	15880	15861
1979	16807	15831	16816	16746	16801	16824

1980	16919	17106	17140	17075	17009	16920
1981	16388	16380	16464	16380	16260	16388
1982	15433	15464	15457	15504	15435	15450
1983	15497	15172	15447	15431	15212	15361
1984	15145	15172	15447	15077	15282	15361
1985	15163	15467	15332	15297	15344	15236
1986	15984	15467	16027	15848	15714	15983
1987	16859	16831	16746	16835	16833	16833
1988	18150	18055	18211	18145	18016	18150
1989	18970	18998	19059	18880	18937	18992
1990	19328	19300	19059	19418	19345	19362
1991	19337	19149	19059	19260	19147	19362
1992	18876	19149	19059	19031	19152	18857
MSE		35324	22965	422500	23710	10735

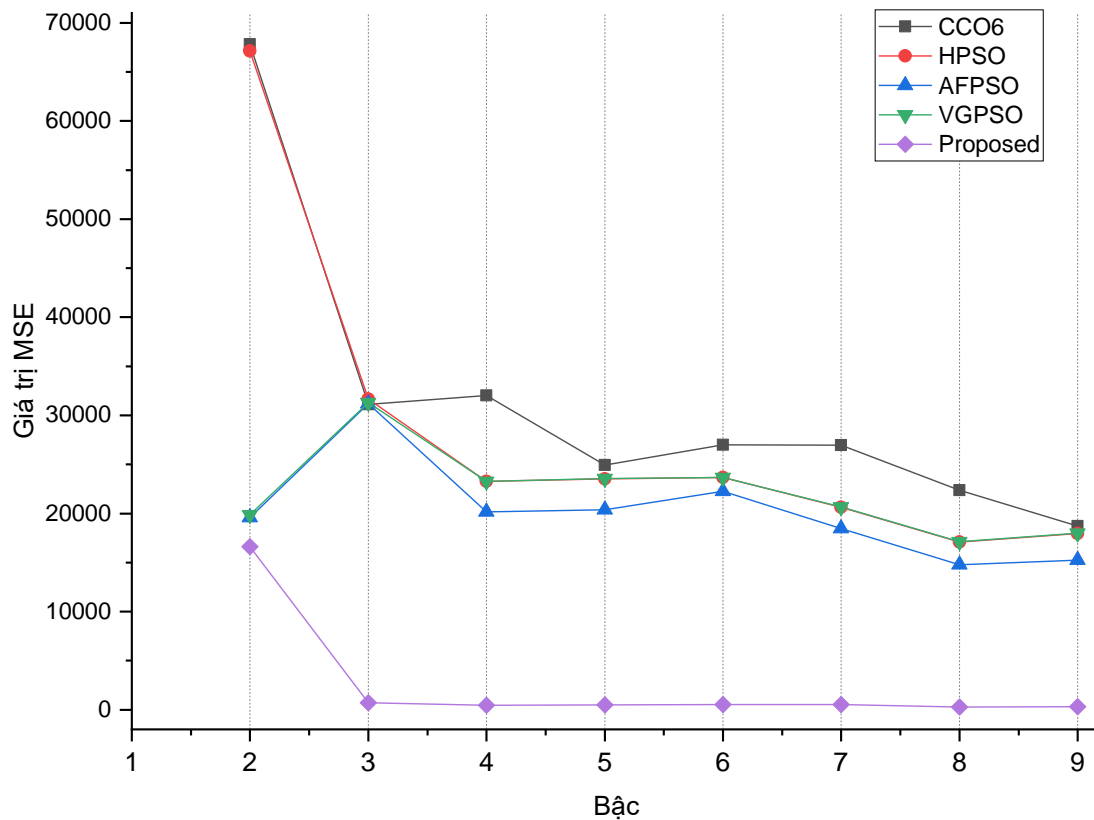


Hình 1. So sánh giá trị kết quả dự báo của các mô hình bậc nhất với số khoảng chia là 14.

Kết quả thực nghiệm được thể hiện trong Bảng 4 và được trực quan hóa trong Hình 1. Phân tích kết quả thực nghiệm trong Bảng 4 ta thấy rằng mô hình dự báo được đề xuất **Proposed** có giá trị *MSE* là 10735, thấp hơn rất nhiều so với các mô hình dự báo được đối sánh **CCO6**, **HPSO**, **Uslu** và **Chen&Zou**. Điều này chứng tỏ tính hiệu quả của mô hình dự báo được đề xuất khi áp dụng mô hình bậc nhất.

Bảng 5. So sánh hiệu quả các mô hình dự báo theo các bậc khác nhau.

Bậc	CCO6	HPSO	AFPSO	VGPSO	Proposed
2	67834	67123	19594	19868	16614
3	31123	31644	31189	31307	716
4	32009	23271	20155	23288	450
5	24948	23534	20366	23552	512
6	26980	23671	22276	23684	524
7	26969	20651	18482	20669	545
8	22387	17106	14778	17116	279
9	18734	17971	15251	17987	307



Hình 2. So sánh giá trị *MSE* đối với các mô hình dự báo bậc cao.

Để đánh giá các mô hình bậc cao, các thực nghiệm được tiến hành với các bậc từ 2 đến 9 với số khoảng chia tập nền là 7 như trong các phương pháp được đối sánh. Kết quả thực

nghiệm và so sánh của các mô hình dự báo bậc cao được đề xuất và các mô hình đối sánh **CCO6**, **HPSO**, **AFPSO** [15], **VGPSO** [17] trong giai đoạn huấn luyện được thể hiện trong Bảng 5 và được trực quan hóa trong Hình 2.

Có thể quan sát thấy rằng, giá trị *MSE* của mô hình dự báo được đề xuất thấp hơn so với các mô hình đối sánh rất nhiều ở tất cả các bậc. Ngoài ra, chúng ta có thể thấy sự biến thiên theo bậc của các mô hình dự báo. Chẳng hạn, với các mô hình bậc cao được đề xuất (**Proposed**), mô hình bậc 2 không tốt bằng mô hình bậc 3, mô hình bậc 5 lại không tốt bằng mô hình bậc 4, tương tự mô hình bậc 8 lại tốt hơn so với mô hình bậc 9. Điều này chứng tỏ rằng, trong mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ bậc cao không phải cứ mô hình bậc cao hơn nào cũng tốt hơn mô hình bậc thấp hơn.

4. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ được đề xuất trên cơ sở kết hợp thuật toán tối ưu bầy đàn và kỹ thuật giải mờ mới và áp dụng giải bài toán dự báo số lượng sinh viên nhập học của Đại học Alabama được quan sát từ năm 1971 đến năm 1992. Các kết quả thực nghiệm cho thấy mô hình dự báo được đề xuất cho kết quả dự báo tốt hơn hẳn so với các mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ được đối sánh đối với cả các mô hình bậc nhất và bậc cao. Điều này chứng tỏ tính hiệu quả của mô hình dự báo được đề xuất và có thể được mở rộng áp dụng vào một số bài toán dự báo ở Việt Nam như dự báo sản lượng gạo hàng năm, số người chết do tai nạn giao thông hàng năm, dự báo dân số quốc gia, ... Đây cũng là một trong các hướng nghiên cứu ứng dụng tiếp theo của chúng tôi. Về nghiên cứu phương pháp luận, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu cải tiến mô hình chuỗi thời gian mờ phụ thuộc thời gian, mô hình chuỗi thời gian mờ bậc cao, mô hình chuỗi thời gian mờ đa nhân tố.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. G. E. P. Box, G. Jenkins, Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco, CA, 1970.
- [2]. Q. Song, B.S. Chissom, Fuzzy Time Series and its Model, Fuzzy set and systems, 54 (1993) 269-277. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(93\)90372-0](https://doi.org/10.1016/0165-0114(93)90372-0)
- [3]. Q. Song, B.S. Chissom, Forecasting Enrollments with Fuzzy Time Series – Part I, Fuzzy set and systems, 54 (1993) 1-9. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(93\)90355-L](https://doi.org/10.1016/0165-0114(93)90355-L)
- [4]. Q. Song, B.S. Chissom, Forecasting Enrollments with Fuzzy Time Series – Part II, Fuzzy set and systems, 62 (1994) 1-8. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(94\)90067-1](https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90067-1)
- [5]. S. M. Chen, Forecasting Enrollments based on Fuzzy Time Series, Fuzzy set and systems, 81, (1996) 311-319. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(95\)00220-0](https://doi.org/10.1016/0165-0114(95)00220-0)
- [6]. S. M. Chen, Forecasting Enrollments based on high-order Fuzzy Time Series, Int. Journal: Cybernetic and Systems, 3 (2002) 1-16. <https://doi.org/10.1080/019697202753306479>
- [7]. H. K. Yu, Weighted fuzzy time series models for TAIEX forecasting, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 349 (2005) 609–624. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.11.006>
- [8]. S. M. Chen, N. Y. Chung, Forecasting enrolments of students by using fuzzy time series and genetic algorithms, International journal of information and management sciences, 17 (2006) 1–18.
- [9]. S. M. Chen, N. Y. Chung, Forecasting enrollments using high-order fuzzy time series and genetic algorithms, International of Intelligent Systems, 21 (2006b) 485-501. <https://doi.org/10.1002/int.20145>

- [10].L. W. Lee, L. H. Wang, S. M. Chen, Temperature prediction and TAIEX forecasting based on fuzzy logical relationships and genetic algorithms, *Expert Systems with Applications*, 33 (2007) 539-550. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2006.05.015>
- [11].L. W. Lee, L. H. Wang, S. M. Chen, Temperature prediction and TAIEX forecasting based on high-order fuzzy logical relationships and genetic simulated annealing techniques, *Expert Systems with Applications*, 34 (2008) 328–336. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2006.09.007>
- [12].S. M. Chen, X. Y. Zou, G. C. Gunawan, Fuzzy time series forecasting based on proportions of intervals and particle swarm optimization techniques, *Information Sciences*, 500 (2019) 127–139. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.05.047>
- [13].I-H. Kuo, S.-J. Horng, T-W. Kao, T-L. Lin, C-L. Lee, Y. Pan, An improved method for forecasting enrolments based on fuzzy time series and particle swarm optimization, *Expert systems with applications*, 36 (2009) 6108–6117. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2008.07.043>
- [14].I-H. Kuo, S-J. Horng, Y-H. Chen, R-S. Run, T-W. Kao, R-J. Chen, J-L. Lai, T-L. Lin, “Forecasting TAIEX based on fuzzy time series and particle swarm optimization”, *Expert Systems with Applications*, 37 (2010) 1494–1502. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.06.102>
- [15].Y. L. Huang, S. J. Horng, M. He, P. Fan, T. W. Kao, M. K. Khan, A hybrid forecasting model for enrollments based on aggregated fuzzy time series and particle swarm optimization, *Expert Systems with Applications*, 38 (2011) 8014 – 8023. <https://doi.org/10.1007/s10489-016-0857-0>
- [16].N. V. Tinh, N. C. Dieu, A New Hybrid Fuzzy Time Series Forecasting Model Combined the Time -Variant Fuzzy Logical Relationship Groups with Particle Swam Optimization, *Computer Science and Engineering*, 7 (2017) 52-66.
- [17].Nguyễn Công Điều, Nghiêm Văn Tính, Dự báo chuỗi thời gian mờ dựa trên nhóm quan hệ mờ phụ thuộc thời gian và tối ưu bầy đàn, *Kỷ yếu Hội thảo quốc gia về nghiên cứu cơ bản và ứng dụng công nghệ thông tin Cần Thơ*, 2016, 125-133.
- [18].N. Y Wang, S. M. Chen, Temperature prediction and TAIEX forecasting based on automatic clustering techniques and two-factors high-order fuzzy time series, *Expert Systems with Applications*, 36 (2009) 2143-2154. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2007.12.013>
- [19].C. H. Cheng, G-W. Cheng, J-W. Wang, Multi-attribute fuzzy time series method based on fuzzy clustering, *Expert Systems with Applications*, 34 (2008) 1235–1242. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2006.12.013>
- [20].C. H. Wang, L. C. Hsu, Constructing and applying an improved fuzzy time series model: Taking the tourism industry for example, *Expert Systems with Applications*, 34 (2008) 2732-2738. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2007.05.042>
- [21].M. Bose, K. Mali, Designing fuzzy time series forecasting models: A survey, *International Journal of Approximate Reasoning*, 111 (2019) 78–99. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2019.05.002>
- [22].J. Kennedy, R. C. Eberhart, Particle Swarm Optimization, In *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, Piscataway, New Jersey. IEEE Service Center, 1995, 1942–1948.
- [23].R. C. Eberhart, J. Kennedy, A new optimizer using particle swarm theory, *Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*, Nagoya, Japan, 1995, 39-43. <https://doi.org/10.1109/MHS.1995.494215>
- [24].K. Huarng, Effective lengths of intervals to improve forecasting in fuzzy time series, *Fuzzy Sets and Systems*, 123 (2001b) 387-394. <https://doi.org/10.1007/s10700-006-0025-9>
- [25].V. R. Uslu, E. Bas, U. Yolcu, E. Egrioglu, A fuzzy time series approach based on weights determined by the number of recurrences of fuzzy relations, *Swarm and Evolutionary Computation*, 15 (2014) 19–26. <https://doi.org/10.1016/j.swevo.2013.10.004>