



## MODELING OF CRACK PROPAGATION IN MULTI-PHASE STRUCTURE BY PHASE FIELD METHOD WITH INTERFACIAL DAMAGE

Vu Ba Thanh\*, Tran Anh Tuan, Nguyen Dinh Hai

University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

### ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 16/07/2021

Revised: 27/09/2021

Accepted: 01/10/2021

Published online: 15/10/2021

<https://doi.org/10.47869/tcsj.72.8.4>

\* *Corresponding author*

Email: thanhvb@utc.edu.vn

**Abstract.** In recent years, the phase field method has become a reliable and effective simulation tool to predict the damage in structures containing construction materials. In multi-phase structures, the interface shape between material phases is often very complex and random, which makes it difficult to determine the boundaries of these phases, leading to inaccurate simulation results. Therefore, the objectives of this paper: (i) use the phase field method to simulate the crack initiation and propagation in structures containing component multi-phase with the interaction between the bulk damage in the interior of these phases (described by the phase field variable  $d$ ) and the interfacial damage (represented by a supplemental fixed scalar phase field variable  $\beta$ ); (ii) build a supplemental sub-function to handle image formats of structure with each color representing a material phase, based on the principle that one color of image will have a representative range of numbers to determine the interface shape. The obtained results in this paper show that the current phase field method combined with the supplemental sub-function can accurately simulate the damage of structures containing component multi-phase.

**Keywords:** phase field method, crack, supplemental sub-function, multi-phase structure, interfacial damage.

© 2021 University of Transport and Communications



# MÔ PHỎNG SỰ LAN TRUYỀN VẾT NÚT TRONG KẾT CẤU NHIỀU PHA VẬT LIỆU BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHASE FIELD CÓ XÉT TỚI HƯ HỒNG MẶT PHÂN GIỚI GIỮA CÁC PHA

Vũ Bá Thành\*, Trần Anh Tuấn, Nguyễn Đình Hải

Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

## THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 16/07/2021

Ngày nhận bài sửa: 27/09/2021

Ngày chấp nhận đăng: 01/10/2021

Ngày xuất bản Online: 15/10/2021

<https://doi.org/10.47869/tcsj.72.8.4>

\* Tác giả liên hệ

Email: thanhvb@utc.edu.vn

**Tóm tắt.** Trong những năm gần đây, phương pháp phase field là một công cụ mô phỏng đáng tin cậy và hiệu quả để dự đoán hư hỏng trong kết cấu chứa các loại vật liệu xây dựng. Trong kết cấu nhiều pha vật liệu, hình dạng mặt phân giới giữa các pha thường rất phức tạp, điều này gây khó khăn trong việc xác định ranh giới của các pha này dẫn tới kết quả mô phỏng không chính xác. Do đó, mục tiêu của bài báo này: (i) sử dụng phương pháp phase field để mô phỏng sự hình thành và lan truyền vết nứt trong kết cấu chứa nhiều pha vật liệu với sự tương tác giữa hư hỏng trong nội tại các pha (mô tả bằng biến phase field  $d$ ) và hư hỏng mặt phân giới của các pha (đại diện bằng biến phase field bổ sung  $\beta$ ); (ii) xây dựng một hàm con bổ sung xử lý các định dạng ảnh của kết cấu với mỗi màu đại diện cho một pha vật liệu, dựa trên nguyên lý một màu sẽ có một dải số đại diện để xác định hình dạng mặt phân giới. Các kết quả đạt được của bài báo này cho thấy phương pháp phase field hiện tại kết hợp với hàm con bổ sung có thể mô phỏng chính xác hư hỏng của kết cấu chứa nhiều pha vật liệu thành phần.

**Từ khóa:** Phương pháp phase field, vết nứt, hàm con bổ sung, kết cấu nhiều pha, hư hỏng mặt phân giới.

© 2021 Trường Đại học Giao thông vận tải

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong thời gian gần đây, phương pháp phase field trở thành một công cụ mạnh mẽ mô phỏng sự phát triển vết nứt phức tạp trong kết cấu. Các nghiên cứu [1, 2] đã sử dụng phương pháp phase field để dự đoán sự hư hỏng trong vật liệu đồng nhất, đẳng hướng đã cho kết quả

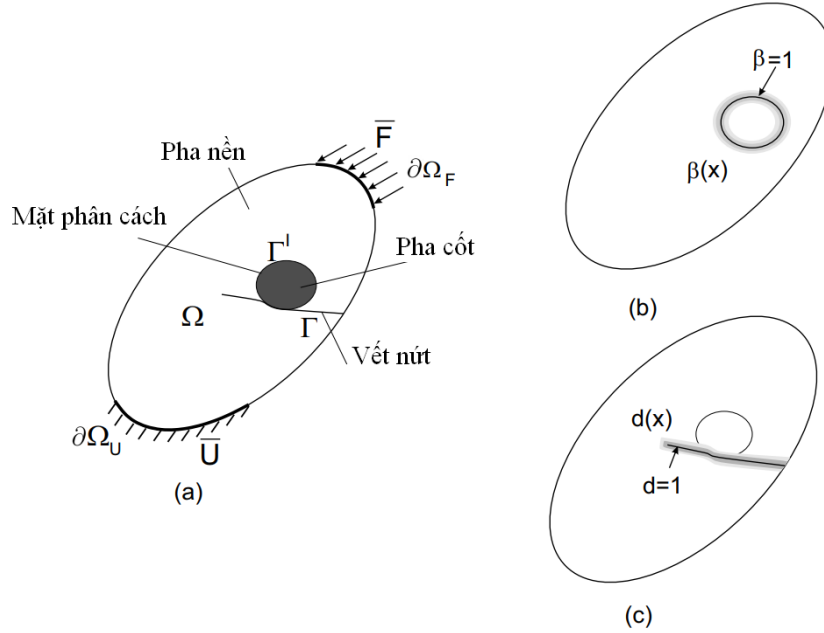
với độ chính xác cao. Tiếp đó, phương pháp mô phỏng này được dùng để mô tả sự phát triển vết nứt trong kết cấu chứa vật liệu dị hướng [3], bằng việc sử dụng nhiều biến phase field và một ten-xơ định hướng để đại diện cho các hướng ưu tiên của vết nứt có thể xảy ra trong kết cấu này. Gần đây, trong nghiên cứu [4], phương pháp phase field được sử dụng để mô phỏng sự hình thành và lan truyền vết nứt trong dầm bê tông cường độ cao sử dụng nano-silica. Kết quả thu được từ mô hình mô phỏng và mô hình thực nghiệm đã cho thấy sự tương đồng về mặt đường cong ứng xử và hình dạng vết nứt.

Trong kết cấu nhiều pha vật liệu thành phần, để mô tả sự phát triển vết nứt phức tạp, đặc biệt tại khu vực mặt phân giới giữa các pha, sẽ xuất hiện các khó khăn được như sau: (i) xác định chính xác hình dạng mặt phân giới giữa các pha, (ii) mô hình để mô tả sự dính kết giữa hai pha vật liệu thành phần và (iii) công cụ mô phỏng để dự đoán hư hỏng trong dạng kết cấu này trong việc kết hợp với (i) và (ii). Để giải quyết vấn đề (i), ta có thể dễ dàng thực hiện khi hình dạng các pha là đơn giản: hình tròn, hình có các cạnh thẳng như hình vuông, chữ nhật. Tuy nhiên, các kết cấu thường gặp trong thực tế rất hiếm khi các pha có hình dạng đơn giản như vậy mà thường là các hình phức tạp và ngẫu nhiên, không có quy luật để mô tả như các hạt cốt liệu trong bê tông. Do đó, cần thiết phải thiết lập một hàm con bổ sung để mô tả các hình dạng mặt phân giới giữa các pha phức tạp này. Nội dung của hàm con nêu trên được viết và giới thiệu trong bài báo này. Đối với vấn đề (ii) đã có nhiều phương pháp được phát triển để xác định sự dính bám tại mặt phân giới như việc tạo ra một pha vật liệu mỏng giữa hai pha vật liệu chính với đặc tính vật liệu được phân cấp [5] hoặc sử dụng mô hình vùng dính kết (Cohesive zone model-CZM) được giới thiệu lần đầu bởi [6, 7] để giải quyết các điểm ứng suất kỳ dị ở đầu vết nứt bằng việc mô tả quan hệ giữa ứng suất kéo gây nứt và bước nhảy chuyển vị tại khu vực mặt phân giới. Mô hình CZM được đưa vào phương pháp phần tử hữu hạn trong [8, 9, 10] để thuận tiện cho việc mô phỏng hoặc là công cụ để thêm vào các phương pháp mô phỏng khác để mô tả hư hỏng mặt phân giới. Với vấn đề cuối cùng (iii), nghiên cứu này đã sử dụng phương pháp phase field với việc sử dụng thêm một biến phase field đại diện cho hư hỏng mặt phân giới kết hợp với mô hình CZM (ii) để mô tả sự cạnh tranh giữa hư hỏng mặt phân giới của các pha và hư hỏng nội tại của các pha này trong kết cấu chứa nhiều pha vật liệu. Từ đó, kết cấu được sử dụng trong mô phỏng là kết cấu được xử lý bằng hàm con bổ sung (i) để xác định chính xác ranh giới giữa các pha, và số điểm ảnh sau khi xử lý chính là số phần tử được chia trong kết cấu.

Bài báo có cấu trúc gồm những phần như sau: Phần 2 dùng để mô tả phương pháp phase field với việc sử dụng thêm một biến phase field tại mặt phân giới, mô hình CZM và nội dung hàm con bổ sung; Phần 3 dành cho việc giới thiệu và phân tích một vài ví dụ áp dụng; Cuối cùng, phần 4 đưa ra các kết luận và kiến nghị.

## 2. PHƯƠNG PHÁP PHASE FIELD CÓ XÉT TỚI HƯ HỎNG MẶT PHÂN GIỚI GIỮA CÁC PHA

Cho một miền  $\Omega$  là một vật thể bị nứt, trong đó  $\partial\Omega$  là biên ngoài của  $\Omega$ . Vật thể này chứa pha cốt và pha nền với mặt phân giới của hai pha là  $\Gamma^I$  được thể hiện trong Hình 1a. Cho  $\Gamma$  là vết nứt trong miền vật thể  $\Omega$ . Trạng thái phát triển của vết nứt được mô tả bằng một biến phase field  $d(\mathbf{x})$  với  $\mathbf{x} \in \Omega$  (xem Hình 1c), trong khi mặt phân giới giữa hai pha vật liệu được đại diện bằng một biến phase field bổ sung  $\beta(\mathbf{x})$  như Hình 1b. Cả hai biến phase field  $d(\mathbf{x})$  và  $\beta(\mathbf{x})$  này đều là đại lượng vô hướng, có giá trị thay đổi từ 0 (trạng thái kết cấu ban đầu chưa bị hư hỏng) tới 1 (kết cấu xuất hiện vết nứt).



Hình 1. Mô tả vật thể nhiều pha bị nứt: (a) Vật thể chứa mặt phân giới giữa các pha và vết nứt, (b) biến phase field trên mặt phân giới  $\beta(\mathbf{x})$ , (c) vết nứt thông qua biến phase field  $d(\mathbf{x})$ .

### 2.1. Các phương trình năng lượng

Trong phương pháp phase field có xét tới hư hỏng mặt phân giới  $\Gamma^l$ , tổng năng lượng trong một vật thể bị nứt được mô tả bởi ba thành phần dưới đây:

$$E(\mathbf{u}, d, \beta) = \int_{\Omega} W_u^e(\boldsymbol{\varepsilon}_e, d) d\Omega + \int_{\Omega} (1-\beta) g_c \gamma(d, \nabla d) d\Omega + \int_{\Omega} \Psi^l(\mathbf{w}, \beta) \gamma_{\beta}(\beta, \nabla \beta) d\Omega \quad (1)$$

Trong đó  $g_c$  là năng lượng kháng nứt,  $\gamma(d, \nabla d) = \frac{d^2}{2l} + \frac{l}{2} \nabla d \cdot \nabla d$  là hàm mật độ vết nứt,  $l$  là tham số chiều dài,  $\gamma_{\beta}(\beta, \nabla \beta) = \frac{\beta^2}{2l} + \frac{l}{2} \nabla \beta \cdot \nabla \beta$  là hàm mật độ vết nứt tại vị trí mặt phân giới  $\Gamma^l$ ,  $\Psi^l$  là hàm năng lượng do chuyển vị trên  $\Gamma^l$ ,  $\mathbf{w} = h \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^l$  là bước nhảy chuyển vị tại  $\Gamma^l$ , với  $h$  là kích thước của lưới phần tử và  $\mathbf{n}^l$  là vec-tơ pháp tuyến của  $\Gamma^l$ . Biến phase field trên mặt phân giới  $\beta(\mathbf{x})$  đạt được bằng việc giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \beta(\mathbf{x}) - l^2 \Delta \beta(\mathbf{x}) = 0 & \text{trong } \Omega \\ \beta(\mathbf{x}) = 1 & \text{tại } \Gamma^l \\ \nabla \beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{tại } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

Trong đó  $\mathbf{n}$  là vec-tơ pháp tuyến tại biên  $\partial\Omega$  và  $\Delta \beta(\mathbf{x})$  là toán tử Laplace của  $\beta(\mathbf{x})$ .

Ten-xơ biến dạng  $\boldsymbol{\varepsilon}$  được chia thành ten-xơ biến dạng bên trong vật thể  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  và ten-xơ biến dạng  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  liên quan tới bước nhảy tại vị trí mặt phân giới:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Ở đó, biến dạng bên

trong vật thể  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  phân rã thành phần dương  $\boldsymbol{\varepsilon}_e^+$  đại diện cho phần chịu kéo và phần âm  $\boldsymbol{\varepsilon}_e^-$  đại diện cho phần chịu nén khi kết cấu chịu tác dụng của tải trọng:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e^+ + \boldsymbol{\varepsilon}_e^- \quad (3)$$

Ta đặt  $E(\mathbf{u}, d, \beta) = \int_{\Omega} W(\mathbf{u}, d, \beta) d\Omega$  thì tổng năng lượng từ (1) được viết lại như sau:

$$W(\mathbf{u}, d, \beta) = W_u^e(\boldsymbol{\varepsilon}_e, d) + (1 - \beta) g_c \gamma(d, \nabla d) + \Psi^l(\mathbf{w}, \beta) \gamma_{\beta}(\beta, \nabla \beta) \quad (4)$$

Trong nghiên cứu của Nguyen và cộng sự [11], hàm mật độ năng lượng đàn hồi  $W_u^e$  được định nghĩa như sau:

$$W_u^e(\mathbf{u}, d) = \Psi_e^+(\boldsymbol{\varepsilon}_e^+) \{g(d) + k\} + \Psi_e^-(\boldsymbol{\varepsilon}_e^-) \quad (5)$$

Trong đó, ta sử dụng hàm suy biến  $g(d) = (1-d)^2$  để mô phỏng sự thay đổi độ cứng của vật thể bị nứt,  $k$  là số thực vô cùng nhỏ để đảm bảo không xuất hiện điểm kỳ dị trong quá trình hư hỏng kết cấu.

Với hai thành phần năng lượng đàn hồi liên quan tới  $\boldsymbol{\varepsilon}_e^+$  và  $\boldsymbol{\varepsilon}_e^-$  được mô tả như sau:

$$\Psi_e^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}_e) = \frac{\lambda}{2} \left( \langle \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \rangle_{\pm} \right)^2 + \mu \text{Tr}\{(\boldsymbol{\varepsilon}_e^{\pm})\}^2 \quad (6)$$

Với  $\langle \bullet \rangle_{\pm} = (\bullet \pm |\bullet|) / 2$ ,  $\lambda$  và  $\mu$  là hệ số Lamé của vật liệu.

## 2.2. Bài toán phase field

Áp dụng nguyên lý tiêu hao năng lượng của [12], hệ phương trình được giải trên miền  $\Omega$  với biên ngoài  $\partial\Omega$  để xác định biến  $d$  như sau:

$$\begin{cases} 2(1-d)\mathcal{H}_e - (1-\beta)g_c\delta\gamma(d, \nabla d) = 0 & \text{trong } \Omega \\ d(\mathbf{x}) = 1 & \text{tại } \Gamma \\ \nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{tại } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

Trong đó  $\delta_d \gamma(d, \nabla d) = \frac{d}{l} - l \Delta d$  là đạo hàm của hàm mật độ vết nứt theo biến phase field  $d$ ,  $\Delta d$  là toán tử Laplace của biến  $d$ .

Với  $\mathcal{H}_e$  là hàm lịch sử biến dạng theo thời gian  $\tau$  được xác định như sau:

$$\mathcal{H}_e = \max_{\tau \in [0, t]} \{ \Psi_e^+(\mathbf{x}, \tau) \} \quad (8)$$

Thay  $\delta_d \gamma(d, \nabla d) = \frac{d}{l} - l \Delta d$  vào phương trình (7<sup>1</sup>) ở trên và sử dụng dạng yếu bằng cách nhân thêm  $\delta d$  trên miền tích phân  $\Omega$ , ta có:

$$\int_{\Omega} \left\{ \left( 2\mathcal{H}^e + (1-\beta) \frac{g_c}{l} \right) d \delta d + (1-\beta) g_c l \nabla d \cdot \nabla (\delta d) \right\} d\Omega = \int_{\Omega} 2\mathcal{H}^e \delta d d\Omega \quad (9)$$

### 2.3. Bài toán chuyển vị

Với tổng năng lượng  $E(\mathbf{u}, d, \beta)$  trong vật thể bị nứt từ công thức (1) với chuyển vị  $\mathbf{u}$ , dạng yếu của bài toán chuyển vị được viết như sau:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W_u^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} : \boldsymbol{\varepsilon}_e (\delta \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi^I(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \delta \mathbf{w} \gamma_{\beta}(\beta, \nabla \beta) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial \Omega_F} \bar{\mathbf{F}} \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (10)$$

Công thức (10) có thể được phân tích lại dưới dạng:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_e (\delta \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{w}) \delta \mathbf{w} \gamma_{\beta}(\beta, \nabla \beta) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_e : \nabla^s \delta \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (11)$$

Trong đó  $\mathbf{f}$  và  $\bar{\mathbf{F}}$  là lực khối trong vật thể  $\Omega$  và ngoại lực trên biên  $\partial \Omega_F$ . Đặt  $\boldsymbol{\sigma}_e = \frac{\partial W_u^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}$

là ứng suất Cauchy và  $\mathbf{t}(\mathbf{w}) = \frac{\partial \Psi^I(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}}$  là ứng suất kéo trên mặt phân giới  $\Gamma^I$  với  $\delta \mathbf{w} = h \nabla (\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}^I$ . Sử dụng  $\boldsymbol{\sigma}_e \mathbf{n} = \mathbf{t}(\mathbf{w})$ , công thức (11) được biến đổi như sau:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_e : \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_e (\delta \mathbf{u}) + \mathbf{n} \otimes \mathbf{w} \gamma_{\beta}(\beta, \nabla \beta) - \nabla^s \delta \mathbf{u} \right\} d\Omega \quad (12)$$

Trong công thức (12),  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  thỏa mãn biểu thức dưới đây:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \mathbf{u} - \mathbf{n} \otimes^s \mathbf{w} \gamma_{\beta}(\beta, \nabla \beta) \quad (13)$$

Trong đó,  $(\nabla^s \mathbf{u})_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ ,  $(\mathbf{n} \otimes^s \mathbf{w})_{ij} = (n_i w_j + n_j w_i)$  và  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{n} \otimes^s \mathbf{w} \gamma_{\beta}(\beta, \nabla \beta)$ .

Với phương trình (10), ứng suất Cauchy được xác định là đạo hàm của hàm mật độ năng lượng đàn hồi với ten-xơ biến dạng bên trong vật thể  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ , với  $\mathbf{1} = \{1; 1; 0\}^T$ :

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \frac{\partial W_u^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} = \{g(d) + k\} \left\{ \lambda \langle \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}_e \rangle_+ \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_e^+ \right\} + \lambda \langle \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}_e \rangle_- \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_e^- \quad (14)$$

### 2.4. Mô hình hư hỏng trên mặt phân giới giữa các pha vật liệu

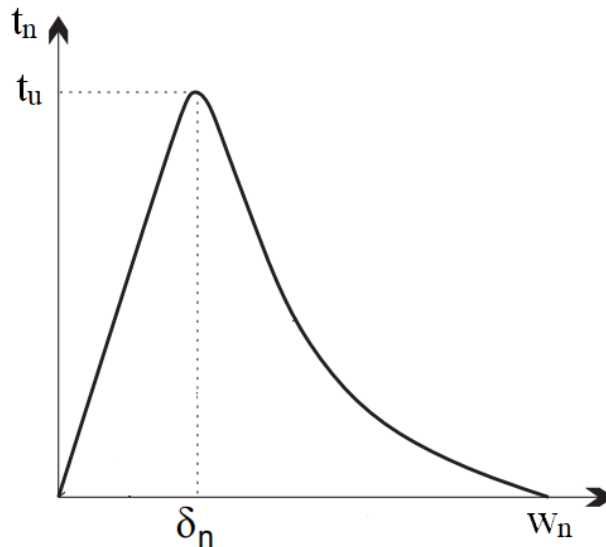
Dạng tổng quát của ứng suất kéo trên mặt phân giới  $\mathbf{t}(\mathbf{w})$  từ công thức (11) như sau:

$$\mathbf{t}(\mathbf{w}) = [t_n(\mathbf{w}_n), t_t(\mathbf{w}_t)]^T \quad (15)$$

Trong đó  $t_n$  và  $t_t$  là thành phần pháp tuyến và tiếp tuyến của  $\mathbf{t}(\mathbf{w})$  trên mặt phân giới  $\Gamma^I$  với  $t_n = \mathbf{t}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}^I$ , ta sử dụng mô hình vùng dính kết CZM của [13] như dưới đây:

$$t_n(\mathbf{w}_n) = g_c^I \left( \frac{\mathbf{w}_n}{\delta_n} \right) \exp \left( -\frac{\mathbf{w}_n}{\delta_n} \right) \quad (16)$$

Với  $\mathbf{w}_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}^I$  thành phần pháp tuyến của bước nhảy chuyển vị,  $g_c^I$  là năng lượng kháng nứt của mặt phân giới được tính bằng diện tích của quan hệ giữa ứng suất kéo và bước nhảy chuyển vị của mặt phân giới như Hình 2,  $t_u$  là cường độ chịu kéo tới hạn của vật liệu tại  $\Gamma^I$  và  $\delta_n = \frac{g_c^I}{t_u \exp(1)}$  là giá trị bước nhảy chuyển vị khi  $t_n = t_u$ .



Hình 2. Mô hình vùng dính kết cho mặt phân giới  $\Gamma^I$ .

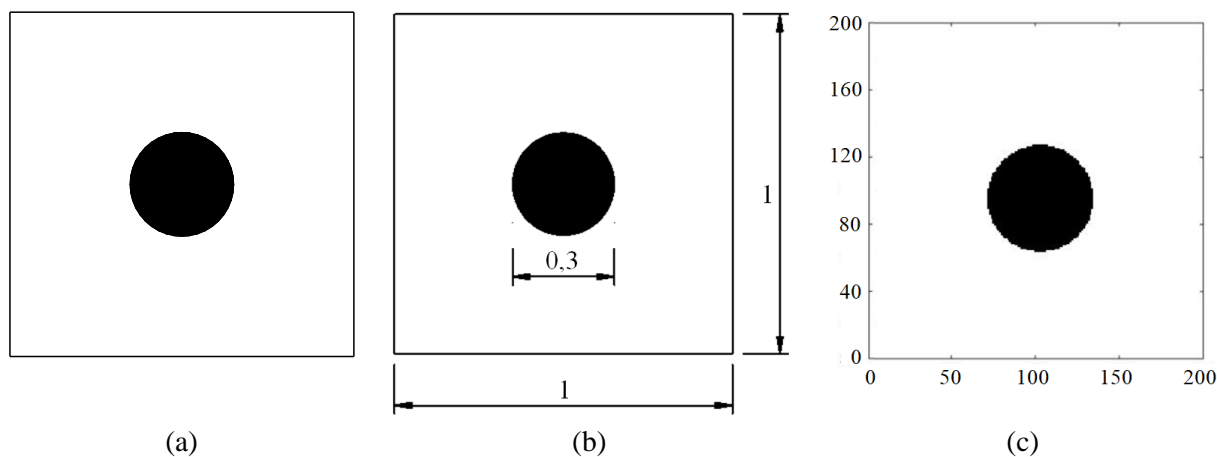
## 2.5. Hàm con bổ sung để xác định hình dạng mặt phân giới giữa các pha

Một hàm con bổ sung được viết trên nền phần mềm Matlab 2014b [14] để nhận diện các điểm ảnh trên định dạng \*.jpg hoặc \*.tif. Mục đích của hàm con này để xác định hình dạng mặt phân giới của các pha trên các định dạng ảnh này. Hàm này có vai trò quan trọng đối với hình dạng mặt phân giới phức tạp và ngẫu nhiên (như hình dạng hạt cốt liệu trong bê tông), các phần mềm hiện nay không tự xử lý được vấn đề này. Để dễ hiểu quá trình thực hiện, nội dung của hàm con có tên “Doc\_hinh\_anh.m” để xác định hình dạng mặt phân giới cho một định dạng ảnh đen trắng đơn giản như Hình 3a có tên “Ten\_hinh.jpg” được trình bày dưới đây:

**Function** [Xu\_ly\_hinh\_anh] =Doc\_hinh\_anh ()

```
% Đọc hình ảnh
Hinh_anh = imread ('Ten_hinh.jpg');
% Xác định kích thước hình ảnh
[cao, rong, matphang] = size(Hinh_anh);
Hinh_xu_ly = reshape(Hinh_anh, cao, rong * matphang);
% Xác định số lượng điểm ảnh theo phương ngang
x= Hinh_xu_ly (:,1:200);
clear Hinh_xu_ly
Hinh_xu_ly =x;
Hinh_xu_ly =double(Hinh_xu_ly);
figure
imshow(Hinh_xu_ly)
% Nhận dạng ranh giới các pha
Hinh_xu_ly (Hinh_xu_ly <=50)=1;
Hinh_xu_ly (Hinh_xu_ly >=50)=2;
imagesc(Hinh_xu_ly)
axis equal
xlim([0 200])
ylim([0 200])
set(gcf,'Color',[1,1,1]);
colormap('gray');
```

**end**



Hình 3. Xử lý hình ảnh một mẫu chứa 2 pha: (a) Ảnh thực tế có tên “Ten\_hinh.jpg”, (b) Kích thước ảnh và các pha, (c) Số điểm ảnh sau khi xử lý là 40000 điểm.



Định dạng ảnh của Hình 3a có tên “Ten\_hinh.jpg” với kích thước 1x1mm có hai pha với pha số 1 có màu đen đại diện cho pha cốt là một hình tròn với đường kính 0,3mm và pha số 2 có màu trắng đại diện cho pha nền được thể hiện ở Hình 3b. Ta có thể xác định được diện tích pha số 1 chiếm 7,07% diện tích mẫu theo cách tính toán học. Sau khi được hàm con “Doc\_hinh\_anh.m” xử lý, mẫu này được chia thành 200x200=40000 điểm ảnh vuông như Hình 3c, trong đó pha số 1 có 2890 điểm ảnh chiếm diện tích là 7,2% diện tích mẫu. Như vậy, sai số giữa tỷ lệ diện tích pha cốt (pha số 1) trong thực tế và nhận được sau khi xử lý bằng hàm con là không đáng kể với 1,8%. Sau đó, mẫu thu được của Hình 3c trở thành mẫu được mô phỏng theo phương pháp phase field được trình bày cụ thể trong mục 3 với 40000 phần tử vuông.

Nội dung của phương pháp phase field có xét tới hư hỏng mặt phân giới để mô phỏng mẫu chứa nhiều pha được xử lý hình ảnh bằng hàm con bổ sung được tóm lược qua thuật toán như sau:

### **Thuật toán**

Cho giá trị ban đầu của chuyển vị  $\mathbf{u}_0$ , biên phase field  $\mathbf{d}_0$ , hàm lịch sử biến dạng  $\mathcal{H}_0^e$

Xử lý hình ảnh để xác định ranh giới các pha của mẫu theo hàm con trong mục 2.5

Xác định biên phase field trên mặt phân giới  $\beta(\mathbf{x})$  theo công thức (2)

**FOR**  $j=1,2,\dots,n$

*Bài toán chuyển vị*

    Tính giá trị  $\mathbf{u}_j$  theo công thức (11) với mô hình vùng dính kết trong mục 2.4

*Bài toán phase field*

    Tính hàm lịch sử biến dạng  $\mathcal{H}_j^e$  từ  $\mathbf{u}_j$  theo công thức (8)

    Tính giá trị  $\mathbf{d}_j$  theo công thức (9)

**END**

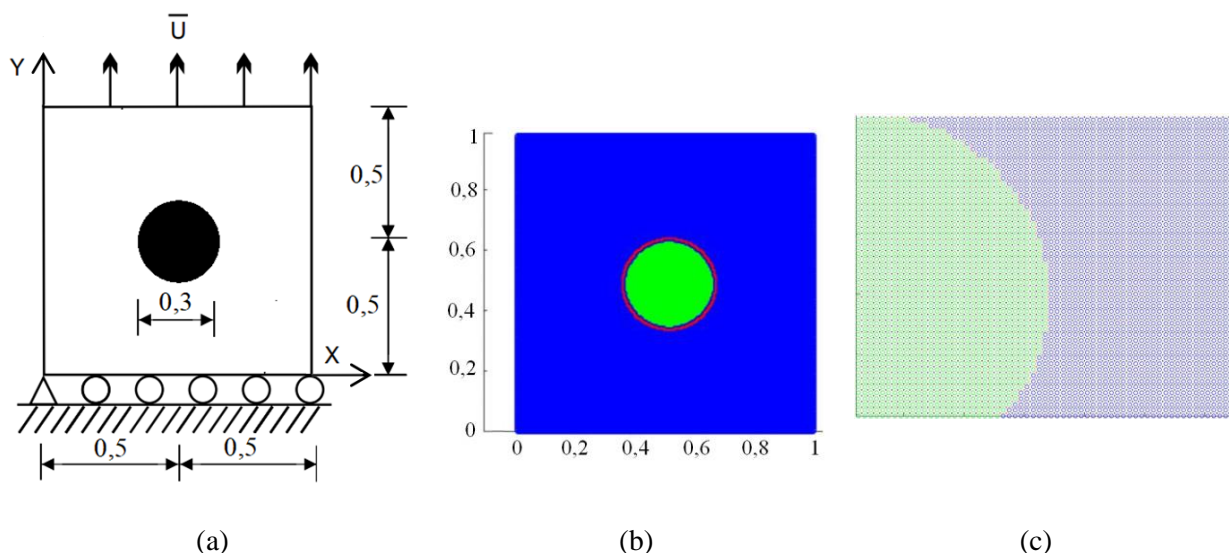
## **3. CÁC VÍ DỤ MÔ PHỎNG**

### **3.1. Mô phỏng một mẫu chứa pha cốt hình tròn chịu kéo**

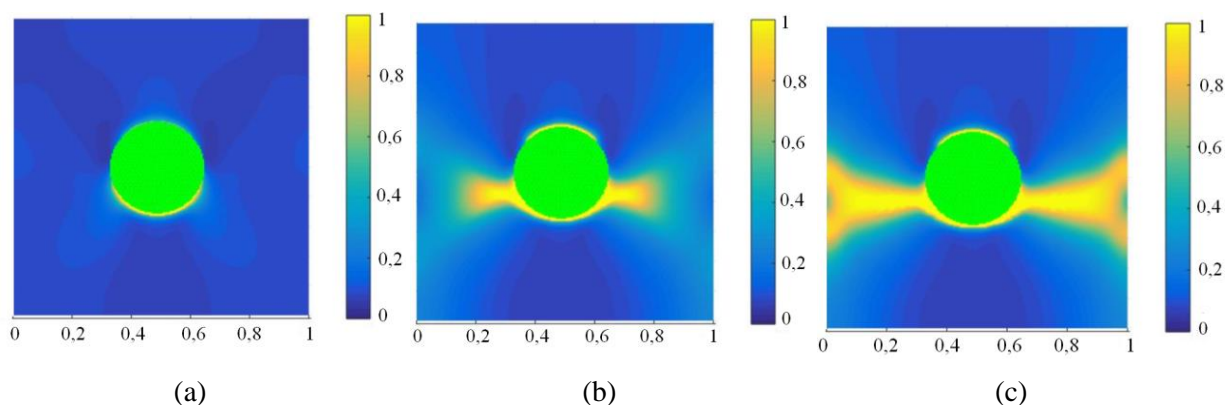
Trong ví dụ này, phương pháp phase field [11] được trình bày chi tiết trong các mục từ 2.1 tới 2.4 có tính đến hư hỏng mặt phân giới giữa hai pha được sử dụng để mô phỏng sự phát triển vết nứt của một mẫu chịu kéo có kích thước 1x1 mm như Hình 3b của định dạng ảnh như Hình 3a với 40000 phần tử vuông như Hình 3c. Điều kiện biên của mẫu được chỉ ra trong Hình 4a với góc bên trái của biên dưới bị khống chế chuyển vị theo hai phương, trong khi các điểm khác của biên dưới bị khống chế chuyển vị theo phương y và tự do theo phương x. Các điểm của biên trên được gia tải với bước chuyển vị không đổi theo phương y với giá trị  $5 \times 10^{-4}$  mm tới khi mẫu bị nứt hoàn toàn.

Trong quá trình mô phỏng, có hai cách xác định ranh giới giữa các pha trong mẫu để so sánh sai số về tỷ lệ diện tích đạt được của pha cốt: cách 1 dùng hàm con bổ sung như được mô tả chi tiết trong mục 2.5 và cách 2 dùng các công cụ sẵn có trong phần mềm Matlab 2014b [14] bởi pha cốt có hình tròn đơn giản mà tự phần mềm [14] có thể xác định được hình dạng của ranh giới này. Hai cách xác định ranh giới các pha ở trên kết hợp với phương pháp phase

field trong [11], do đó ta có thể sử dụng kết quả của cách 2 làm kết quả tham chiếu khi so sánh trong ví dụ này. Cách 1 được mô tả như mục 2.5 với 2890 phần tử pha cốt tương ứng 7,2% diện tích, trong khi cách 2 xác định được 2828 phần tử pha cốt tương ứng 7,07% diện tích giống như cách tính toán học. Sai số về tỷ lệ diện tích pha cốt đạt được giữa hai cách này là 1,8% như nêu ở trên. Mẫu mô phỏng được chia thành 40000 lưới vuông đều với kích thước lưới  $h=0,005\text{mm}$ .



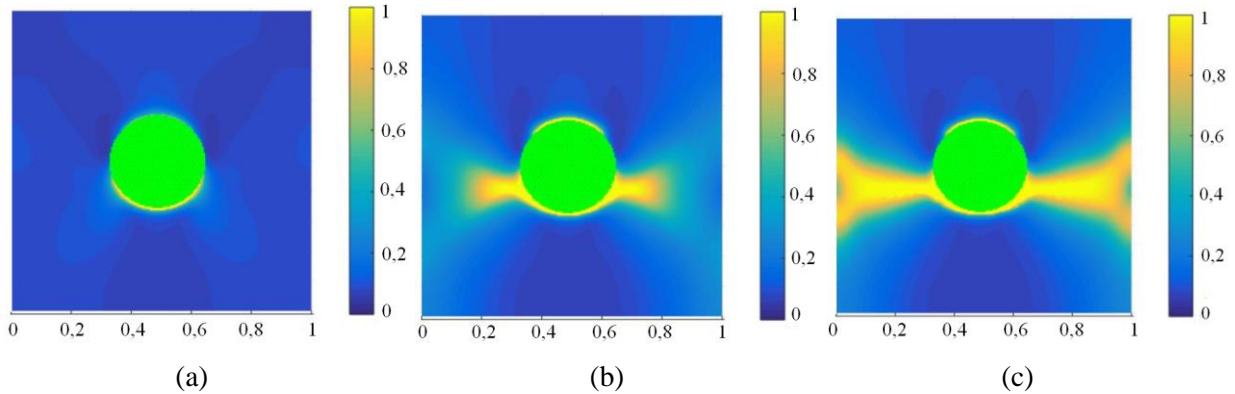
Hình 4. Mẫu chịu kéo chứa hai pha: (a) Điều kiện biên, (b) Ranh giới các pha, (c) Hình dạng mặt phân giới giữa các pha.



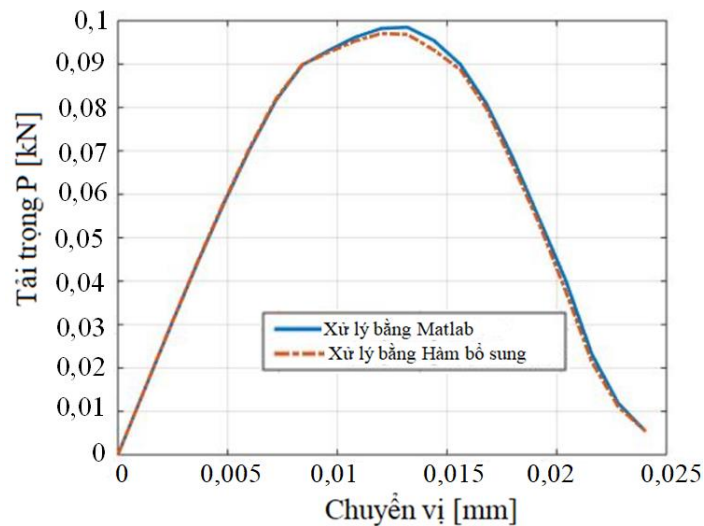
Hình 5. Quá trình hình thành và lan truyền vết nứt của mẫu được xử lý bằng hàm con bổ sung kết hợp phương pháp [11] với giá trị chuyển vị tương ứng: (a) 0,0085mm, (b) 0,0135mm, (c) 0,0235mm.

Các tham số của vật liệu của pha cốt và pha nền tương ứng là  $E_i = 52 \text{ GPa}$ ,  $\nu_i = 0,3$  và  $E_m = 10,4 \text{ GPa}$ ,  $\nu_m = 0,3$ , năng lượng kháng nứt  $g_c = g_c^I = 0,0001 \text{ kN/mm}$  và  $t_u = 0,01 \text{ GPa}$  được lấy theo [11], tham số chiều dài  $l=2h=0,01\text{mm}$ . Hình 4b, 4c thể hiện ranh giới các pha, với màu đỏ là hình dạng của mặt phân giới.

Hình 5 và Hình 6 thể hiện quá trình phát triển vết nứt của mẫu với hình dạng các pha được xử lý bằng hai cách trên cơ sở mô hình phase field trong [11]. Ta thấy rằng, vết nứt được hình thành tại khu vực mặt phân giới, sau đó lan vào pha nền tới khi mẫu bị phá hủy hoàn toàn. Hình 7 so sánh đường cong ứng xử tải trọng và chuyển vị giữa hai cách xử lý hình ảnh kết hợp với phương pháp phase field trong [11]. Từ các Hình 5, 6, 7, ta thấy kết quả là tương tự khi sử dụng hai cách xử lý là hàm con bổ sung và [14]. Điều này chứng tỏ hàm con bổ sung được nêu ra ở trên để xác định hình dạng mặt phân giới giữa các pha cho kết quả đáng tin cậy, là tiền đề để mô phỏng kết cấu với hình dạng pha cốt phức tạp ở ví dụ tiếp theo.



Hình 6. Quá trình hình thành và lan truyền vết nứt với kết cấu được xử lý bằng công cụ có sẵn trong Matlab 2014b [14] kết hợp phương pháp [11] với giá trị chuyển vị tương ứng: (a) 0,0085mm, (b) 0,0135mm, (c) 0,0235mm.



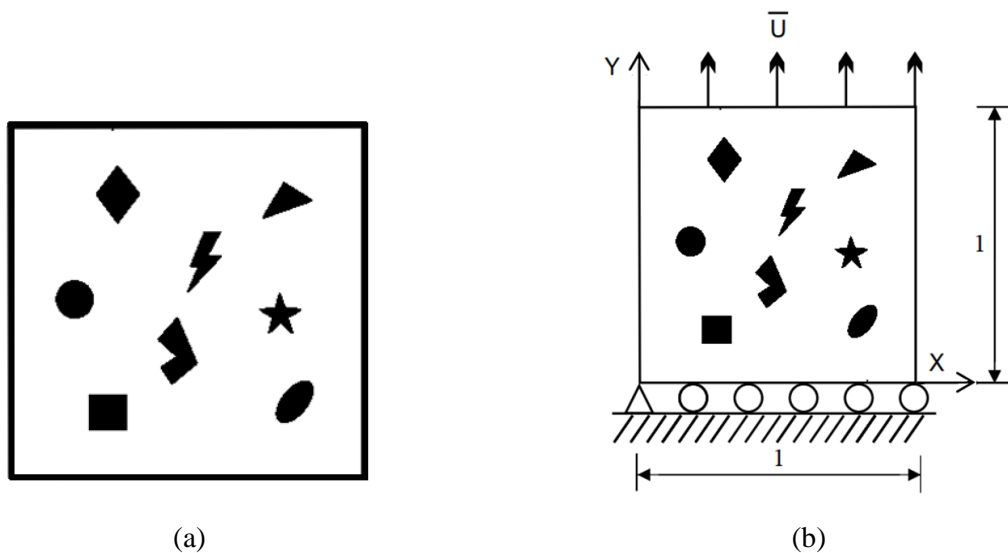
Hình 7. So sánh đường cong ứng xử tải trọng và chuyển vị giữa hai cách xử lý.

### 3.2. Mô phỏng một mẫu chứa các pha cốt có hình dạng phức tạp chịu kéo

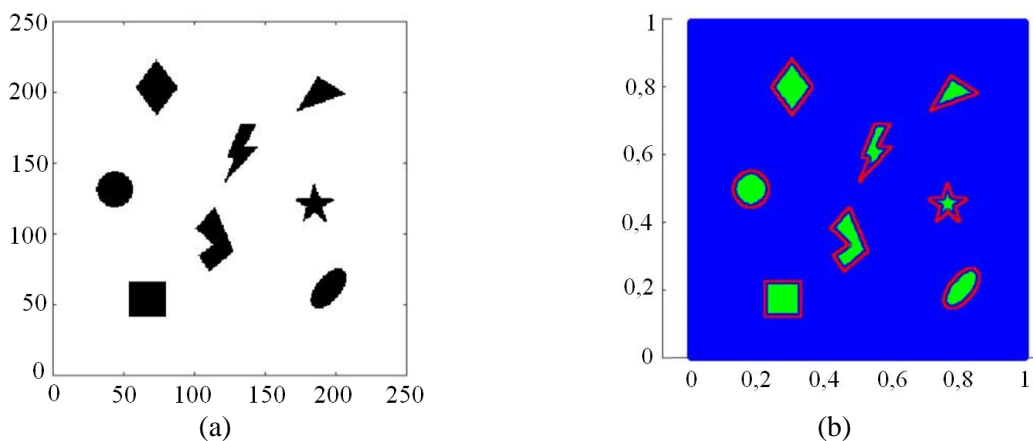
Một mẫu chịu kéo có kích thước 1x1mm chứa 8 hạt cốt liệu với các hình dạng phức tạp và ngẫu nhiên khác nhau với tỷ lệ diện tích của pha cốt so với mẫu trên thực tế là 6% được xử

lý từ định dạng ảnh có tên “Hình\_8hat.jpg” như thể hiện ở Hình 8a. Mẫu có điều kiện biên tương tự như ví dụ 3.1 được gia tải với bước chuyển vị đều là  $5 \times 10^{-4} \text{mm}$  như Hình 8b. Sau khi xử lý bằng hàm con bỏ sung ta có mỗi chiều mẫu có 250 khoảng tương ứng với 62500 điểm ảnh, trong đó có 3838 điểm ảnh thuộc pha cốt tương ứng 6,1% tỷ lệ diện tích như Hình 9a. Do đó, sai số về tỷ lệ diện tích của pha cốt khi dùng hàm con so với thực tế là 1,6%. Với sai số nhỏ đó, mẫu sau xử lý được dùng để mô phỏng sự lan truyền vết nứt trên cơ sở phương pháp phase field trong [11] với 62500 phần tử vuông và kích thước lưới  $h=0,004 \text{mm}$ . Trong đó, Hình 9b thể ranh giới giữa các pha với màu đỏ là hình dạng của mặt phân giới.

Các tham số vật liệu được dùng để mô phỏng được lấy tương tự như ví dụ 3.1:  $\lambda_i = 30 \text{ GPa}$ ,  $\mu_i = 20 \text{ GPa}$  và  $\lambda_m = 6 \text{ GPa}$ ,  $\mu_m = 4 \text{ GPa}$ , năng lượng kháng nứt  $g_c = g_c^I = 0,0001 \text{ kN/mm}$  và  $t_u = 0,01 \text{ GPa}$  với tham số chiều dài  $l=2h=0,008 \text{ mm}$ .



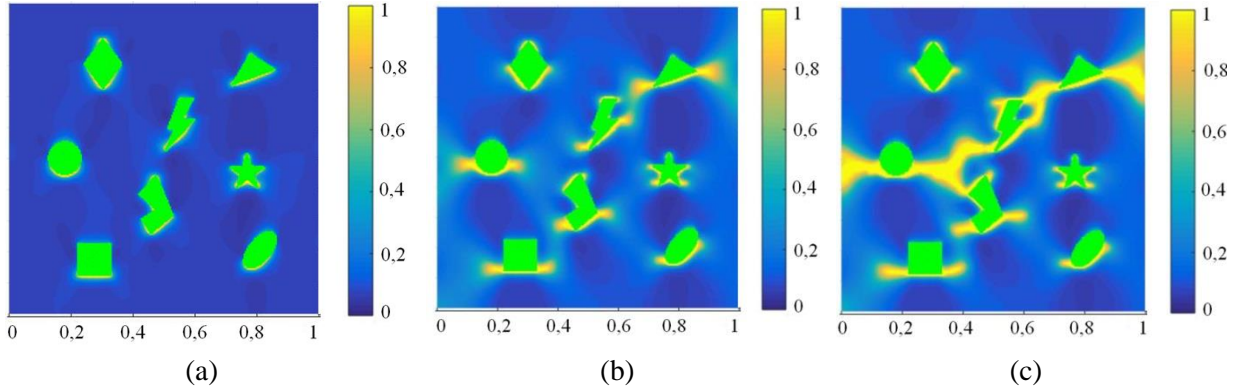
Hình 8. Mẫu chịu kéo với hai pha chứa 8 hạt cốt liệu: (a) Ảnh thực tế có tên “Hình\_8hat.jpg”, (b) Điều kiện biên và hình dạng hạt cốt liệu.



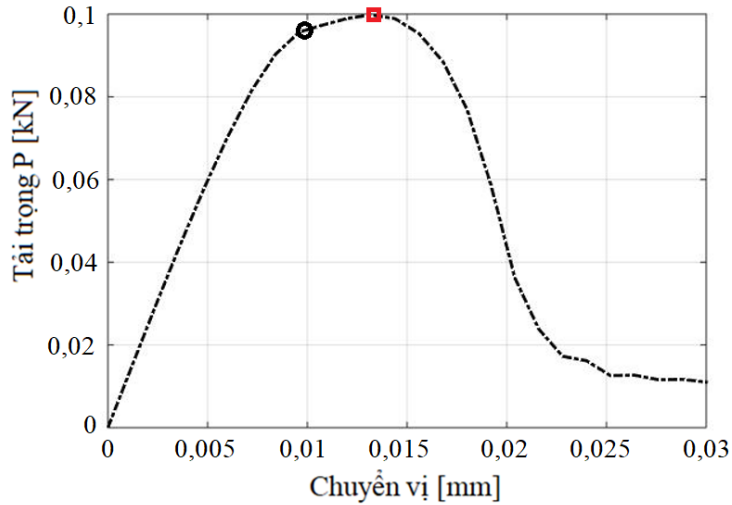
Hình 9. Mẫu chịu kéo với hai pha chứa 8 hạt cốt liệu: (a) Số điểm ảnh sau khi xử lý bằng hàm con, (b) Ranh giới các pha.

Hình 10 thể hiện quá trình phát triển vết nứt trong mẫu trong sự cạnh tranh giữa hư hỏng tại mặt phân giới của các pha và trong nội tại pha nền, ta thấy rằng vết nứt được hình thành ở

các mặt phân giới nơi mà đường như sức kháng nứt là yếu hơn các vị trí khác. Sau đó, các vết nứt này lan truyền độc lập trong pha nền tới chiều dài đủ lớn và liên kết với nhau thành một hệ vết nứt phức tạp tới khi mẫu bị phá hủy hoàn toàn.



Hình 10. Quá trình hình thành và lan truyền vết nứt của mẫu được xử lý bằng hàm con bổ sung kết hợp phương pháp [11] với giá trị chuyển vị tương ứng: (a) 0,01mm, (b) 0,0155mm, (c) 0,0275mm.



Hình 11. Đường cong ứng xử tải trọng và chuyển vị.

Hình 11 thể hiện đường cong ứng xử tải trọng và chuyển vị của mẫu. Từ Hình 11, đường cong ứng xử như được chia thành hai giai đoạn của tải trọng tới hạn gây nứt: giai đoạn 1, tải trọng gây nứt với vết nứt đầu tiên được hình thành tại mặt phân giới khi chuyển vị là 0,01mm (đánh dấu bằng nút tròn), sau đó vết nứt này tiếp tục lan truyền theo ranh giới mặt phân giới tới khi lan ra pha nền, tương ứng với giai đoạn 2 của tải trọng gây nứt pha nền khi chuyển vị là 0,013mm (đánh dấu bằng nút vuông).

#### 4. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Bài báo đã trình bày nội dung hàm con bổ sung để xử lý hình ảnh và xác định chính xác hình dạng của mặt phân giới giữa các pha vật liệu trong mẫu. Hàm con này được kiểm chứng độ chính xác khi sử dụng mẫu với số lượng và hình dạng pha cốt từ đơn giản tới phức tạp nhưng sai số về tỷ lệ diện tích của pha cốt khi dùng hàm con so với thực tế là rất nhỏ trong các ví dụ. Mẫu sau khi xử lý được dùng để mô phỏng với số điểm ảnh chính là số phần tử lưới vuông được chia.

Bài báo cũng trình bày phương pháp phase field có xét tới hư hỏng mặt phân giới của các pha vật liệu bằng việc sử dụng thêm một biến phase field đại diện cho hư hỏng mặt phân giới và mô hình vùng dính kết CZM để mô tả sự cạnh tranh giữa hư hỏng mặt phân giới của các pha và hư hỏng nội tại của các pha này trong mẫu chứa nhiều pha vật liệu, với các mẫu được sử dụng trong mô phỏng là các mẫu được xử lý bằng hàm con bổ sung.

Từ các kết quả trong các ví dụ, ta thấy các vết nứt được hình thành tại mặt phân giới của các pha nơi mà đường như sức kháng nứt yếu hơn so các khu vực khác trong nội tại các pha, sau đó vết nứt lan truyền trong pha nền với đặc tính vật liệu nhỏ hơn pha cốt tới khi mẫu mô phỏng bị phá hủy hoàn toàn. Sự phá hoại theo tuần tự này là rất tự nhiên và hợp lý so với thực tế. Điều này chứng tỏ phương pháp phase field được đề xuất là công cụ rất tốt để mô tả một hệ thống các vết nứt phức tạp, là cơ sở để phân tích, mô phỏng hư hỏng các mẫu ở nhiều cấp độ và kết cấu thực tế như bê tông trong sự tương tác giữa vết nứt mặt phân giới của các hạt cốt liệu đá và vữa xi măng.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. C. Miehe, M. Hofacker, F. Welschinger, A phase field model for rate-independent crack propagation: robust algorithmic implementation based on operator splits, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 199 (2010) 2765-2778. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.04.011>
- [2]. T.T. Nguyen, J. Yvonnet, Q.Z. Zhu, M. Bornert, C. Chateau, A phase field method to simulate crack nucleation and propagation in strongly heterogeneous materials from direct imaging of their microstructure, *Eng. Fract. Mech.*, 139 (2015) 18-39. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.03.045>
- [3]. T.T. Nguyen, J. Rethore, M.C. Bainetto, Phase field modelling of anisotropic crack propagation, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 65 (2017) 279-288. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.05.002>
- [4]. Vũ Bá Thành, Ngô Văn Thức, Bùi Tiến Thành, Trần Thế Truyền, Đỗ Anh Tú, Mô phỏng sự hình thành và lan truyền vết nứt trong dầm bê tông cường độ cao có chất kết dính bổ sung nano-silica bằng phương pháp phase field, *Tạp chí khoa học Giao thông vận tải*, 72 (2021) 672-686. <https://doi.org/10.47869/tcsj.72.6.1>
- [5]. Y.S. Wang, G.Y. Huang, D. Gross, On the mechanical modeling of functionally graded interfacial zone with a griffith crack: plane deformation, *J. Appl. Mech.*, 70 (2003) 676-680. <https://doi.org/10.1115/1.1598476>
- [6]. G.I. Barenblatt, The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, *J. Appl. Math. Mech.*, 23 (1959) 622-636.
- [7]. D.S. Dugdale, Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Solids*, 8 (1960) 100-104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
- [8]. A. Needleman, A continuum model for void nucleation by inclusion debonding, *J. Appl. Mech.*, 54 (1987) 525-531. <https://doi.org/10.1115/1.3173064>
- [9]. V. Tvergaard, J.W. Hutchinson, The influence of plasticity on mixed mode interface toughness, *J. Mech. Phys. Solids*, 41 (1993) 1119-1135. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90057-M](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90057-M)
- [10]. G.T. Camacho, M. Ortiz, Computational modelling of impact damage in brittle materials, *Int. J. Solids Struct.*, 33 (1996) 2899-2938. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00255-3](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00255-3)
- [11]. T.T. Nguyen, J. Yvonnet, Q.Z. Zhu, M. Bornert, C. Chateau, A phase-field method for computational modeling of interfacial damage interacting with crack propagation in realistic microstructures obtained by microtomography, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 312 (2016) 567-95. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.10.007>

- [12]. G.A. Francfort, J.J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, *J. Mech. Phys. Solids*, 46 (1998) 1319-1342. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(98\)00034-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(98)00034-9)
- [13]. C.V. Verhoosel, R. de Borst, A phase-field model for cohesive fracture, *Internat. J. Numer. Methods Engrg*, 96 (2013) 43–62. <https://doi.org/10.1002/nme.4553>
- [14]. Phần mềm Matlab 2014b. <https://www.mathworks.com>